Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

К СИНТЕЗУ МЕХАНИЗМОВ ДЛЯ ДВИЖЕНИЙ, МАЛО УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ РАВНОМЕРНОГО

З. Ш. Блох

(Москва)

В статье [1] показано, как следует выбрать размеры звеньев λ-образного прямолинейно направляющего механизма Чебышева, чтобы скорость точки шатуна, осуществляющей приближенное прямолинейное движение, мало уклонялась от некоторой постоянной величины. В настоящем изложении несколько иным методом будут решены аналогичные задачи для кулиссных механизмов.

1. Пусть требуется определить размеры звеньев кулиссного механизма, изображенного на фиг. 1, так, чтобы угловая скорость кулиссы при равномерном вращении кривошипа AB наименее уклонялась от постоянной величины в некоторых заданных пределах угла поворота φ кривошипа.

Для угла поворота кулиссы α имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r \sin \varphi}{b + r \cos \varphi}$$

Дифференцируя полученное уравнение по времени и исключая угол α, найдем

$$\omega^* = \frac{r^2 + br \cos \varphi}{b^2 + r^2 + 2br \cos \varphi}\, \omega$$

где ω^* — угловая скорость кулиссы, ω — угловая скорость кривошипа.

При $b = r$ кулисса будет вращаться с постоянной угловой скоростью $\omega^* = \omega/2$.

Найденный кулиссный механизм обладает существенным недостатком, связанным с потерей определенности движения в его мертвом положении, когда центр ползушки B попадает в точку C и, кроме того, такой вид движения проще на практике осуществить при помощи двух цилиндрических шестерен с постоянным передаточным отношением $i = 2$.

Исключая из рассмотрения случай $b = r$ как не имеющий практического значения, будем искать механизмы с $b \neq r$, удовлетворяющие поставленному условию.

Считая, что в некоторых пределах угла поворота кривошипа механизма угловая скорость ω^* должна наименее уклоняться от некоторого постоянного значения ω_0, и полагая $\omega = 1$, составим разность

$$f(\varphi) = \omega^* - \omega_0 = \frac{r^2 + br \cos \varphi}{b^2 + r^2 + 2br \cos \varphi} - \omega_0$$

которая по Чебышеву [2] должна наименее уклоняться от нуля в пределах $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, если выполнены условия

$$\frac{r^2 + br \cos \varphi_1}{b^2 + r^2 + 2br \cos \varphi_1} - \omega_0 = E, \qquad \frac{r^2 + br \cos \varphi_2}{b^2 + r^2 + 2br \cos \varphi_2} - \omega_0 = -E \tag{1}$$

где E — соответствующее предельное уклонение. Составленное условие определяет значение ω_0 и E

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{r^2 + br \cos \varphi_1}{b^2 + r^2 + 2br \cos \varphi_1} + \frac{r^2 + br \cos \varphi_2}{b^2 + r^2 + 2br \cos \varphi_2}\right]$$

$$E = \pm \frac{(b^2 - r^2)\, br\, (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)}{2\,(b^2 + r^2 + 2br \cos \varphi_1)\,(b^2 + r^2 + 2br \cos \varphi_2)}$$

Так как движение рассматриваемого механизма симметрично относительно оси y, то выгодно положить $\varphi_1 = 0$ и тогда угловая скорость кулиссы будет наименее уклоняться от ω_0 в пределах угла поворота кривошипа $-\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$.

Если $\varphi_1 \neq 0$, то угловая скорость кулиссы наименее уклоняется от ω_0 на двух отдельных участках, разделенных углом поворота кривошипа $2\varphi_1$.

Угловая скорость кулиссы на участке $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ меняется в пределах

$$\omega^*_{max} = \omega_0 \pm E, \qquad \omega^*_{min} = \omega_0 \mp E$$

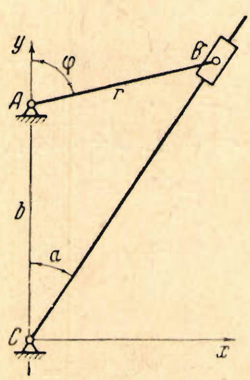
Выбор механизма целесообразно производить по заданной допустимой степени неравномерности вращения кулиссы на участке $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$

$$\delta = \left| \frac{2E}{\omega_0} \right|$$

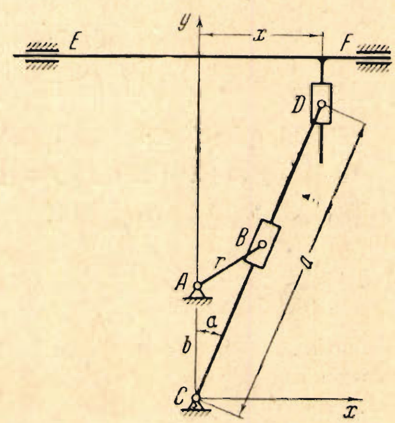
Полагая $b = kr$, получим

$$\delta = \left| \frac{2k(1-k^2)(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)}{(k^3+3k)(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) + 2k^2(1 + 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2) + 2} \right|$$

Пусть, например, требуется построить механизм с $\delta = 0.04$ в пределах угла поворота



Фиг. 1



Фиг. 2

кривошипа $\varphi = 120°$. Полагая $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 60°$, получим уравнение для определения k

$$2k(1-k^2) \pm \delta\,[3(k^3+3k) + 8k^2 + 4] = 0$$

Решая уравнение, определяем один из пригодных корней

$$k = \frac{2 \pm 5\delta + \sqrt{(2 \pm 5\delta)^2 \pm 16\delta(2 \mp 3\delta)}}{2(2 \mp 3\delta)}$$

Знак в формуле перед δ выбирается в зависимости от типа проектируемого механизма. Если кулисса вращается, то $k < 1$ и в формуле следует взять нижний знак. Если кулисса качается, то $k > 1$ и в формуле следует сохранить верхний знак.

Желая получить механизм с качающейся кулиссой, вычисляем с верхними знаками $k = 1{,}24$. Найденный механизм изображен на фиг. 1. В нем $\omega_0 = 0.438$, $E = 0.00875$, $\delta = 0.04$.

2. Пусть требуется определить размеры звеньев более сложного кулиссного механизма (фиг. 2), так, чтобы линейная скорость точек звена EF наименее уклонялась от постоянной величины v_0 при равномерном вращении кривошипа AB.

Для перемещения точек звена EF имеем

$$x = a \sin\alpha$$

Скорость звена

$$v = a\omega^* \cos\alpha$$

или после замены a и ω^* их значениями при $r\omega=1$

$$v=\frac{a(b+r\cos\varphi)(r+b\cos\varphi)}{\sqrt{(b^2+r^2+2br\cos\varphi)^3}}$$

Скорость v будет наименее уклоняться от постоянной величины v_0 в пределах угла поворота кривошипа $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$, если выполняются условия

$$\frac{a(b+r\cos\varphi_1)(r+b\cos\varphi_1)}{\sqrt{(b^2+r^2+2br\cos\varphi_1)^3}}-v_0=E,\qquad \frac{a(b+r\cos\varphi_2)(r+b\cos\varphi_2)}{\sqrt{(b^2+r^2+2br\cos\varphi_2)^3}}-v_0=-E$$

Полагая $\varphi_1=0$, получим

$$E=\frac{a}{2(b+r)}-\frac{a(b+r\cos\varphi_2)(r+b\cos\varphi_2)}{2\sqrt{(b^2+r^2+2br\cos\varphi_2)^3}}$$

$$v_0=\frac{a}{2(b+r)}+\frac{a(b+r\cos\varphi_2)(r+b\cos\varphi_2)}{2\sqrt{(b^2+r^2+2br\cos\varphi_1)^3}}$$

Ход звена EF, на котором скорость v наименее уклоняется от v_0, равен

$$l=\frac{2ra\sin\varphi_2}{\sqrt{b^2+r^2+2br\cos\varphi_2}} \tag{2}$$

Степень неравномерности хода звена EF при $b=kr$ определяется величиной

$$\delta=\frac{2E}{v_0}=2\,\frac{\sqrt{(1+k^2+2k\cos\varphi_2)^3}-(1+k)(k+\cos\varphi_2)(1+k\cos\varphi_2)}{\sqrt{(1+k^2+2k\cos\varphi_2)^3}+(1+k)(k+\cos\varphi_2)(1+k\cos\varphi_2)}$$

При проектировании механизма по заданному значению δ имеем

$$(1+k^2+2k\cos\varphi_2)^3=\left(\frac{2+\delta}{2-\delta}\right)^2[(1+k)(k+\cos\varphi_2)(1+k\cos\varphi)_2]^2$$

Выбирая k, получим уравнение четвертой степени для определения φ, после чего находим по выведенным формулам l, E и v_0.

Пусть $k=1.5$ и $\delta=0.05$. Вычисляем $\varphi_2=34°$. Принимая $r=1$ и $l=2$, определяем по (2) длину звена $a=4.3$ и по (1) величины $E=0.042$, $v_0=1.68$.

Скорость звена EF мало уклоняется от v_0 в пределах угла поворота кривошипа

$$2\varphi_2=68°$$

Поступила в редакцию
15 VII 1944

Z. S. BLOCH. SYNTHESIS OF MECHANISMS FOR MOTIONS SLIGHTLY DEVIATING FROM UNIFORM MOTION

Formulae are given for the determination of the dimensions of the links of two driving mechanisms, in accord with the coefficient of non-uniformity of motion of the drive lenk. This coefficient is the maximum deviation from the uniform.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блох З. Ш. К теории λ-образного механизма Чебышева. Изв. ОТН АН СССР. 1944. № 7
2. Чебышев П. Л. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля. Соч. 1907. т. 2.