Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

ЗАМЕТКИ

О ТОЧКАХ БУРМЕСТЕРА В СФЕРИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

В. В. ДОБРОВОЛЬСКИЙ
(Москва)

Свойства точек Бурместера на плоскости изучены очень хорошо [1] и могут применяться для синтеза плоских направляющих механизмов и механизмов с остановками. [2] В настоящей заметке рассматриваются точки Бурместера при движении неизменяемой системы вокруг неподвижной точки, которое представляется как движение сферы самой в себе.

Для упрощения вычислений проведем неподвижную ось x через мгновенный полюс, т. е. по мгновенной оси вращения, а за плоскость xOz примем общую касательную плоскость к обеим аксоидам. Рассматриваемое положение подвижной сферы примем за начальное, т. е. будем считать, что подвижная ось x совпадает с неподвижной.

Для определения движения зададим эйлеровы углы φ и ψ в функции третьего угла θ, что всегда можно сделать, не уменьшая общности выводов, так как $d\theta \neq 0$ при данном выборе осей; отсюда же следует, что $d\varphi = 0$ и $d\psi = 0$.

Для неподвижных координат X, Y, Z точки (x, y, z) имеем известные формулы

$$X = a_1x + a_2y + a_3z, \qquad Y = b_1x + b_2y + b_3z, \qquad Z = c_1x + c_2y + c_3z \tag{1}$$

в которых при нашем выборе осей

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1$$

Уравнение круга на сфере радиуса *1* может быть представлено в виде

$$Xx_c + Yy_c + Zz_c = \cos\rho$$

где x_c, y_c, z_c — координаты сферического центра этого круга, т. е. точки сферы, равноотстоящей от всех точек круга, а ρ — это постоянное расстояние, измеряемое дугой большого круга. Дифференцируя (2) по θ имеем

$$X'x_c + Y'y_c + Z'z_c = 0, \qquad X''x_c + Y''y_c + Z''z_c = 0 \qquad (3$$

и замечая, что согласно (1)

$$X' = 0,\ Y' = -z,\ Z' = y,\ X'' = -yd,\ Y'' = xd - y,\ Z' = -z$$

(где $d = b''$) находим

$$x_c : y_c : z_c = (Y'Z'' - Y''Z') : (Z'X'' - Z''X') : (X'Y'' - X''Y') =$$
$$= (y^2 + z^2 - dxy) : dy^2 : -zdy$$

В центральной проекции на плоскость, касательную к сфере в полюсе, получим

$$\eta_c = \frac{y_c}{x_c} = -\frac{d\eta^2}{\eta^2 + \zeta^2 - d\eta}, \qquad \zeta_c = \frac{z_c}{x_c} = -\frac{d\eta\zeta}{\eta^2 + \zeta^2 - d\eta} \tag{4}$$

т. е. то же квадратичное соответствие, что и в плоско-параллельном движении. Отсюда следует также известное соотношение, выводимое обыкновенно геометрически [3]:

$$\operatorname{ctg} r - \operatorname{ctg} r_c = \frac{1}{d\cos\theta}$$

аналогичное теореме Савари.

Из (1) после некоторых преобразований получаем

$$\operatorname{tg}\rho = \pm \frac{(y^2+z^2)}{x(y^2+z^2)-dy} \tag{5}$$

Геометрическое место точек, траектории которых имеют в данном положении нулевую геодезическую кривизну, имеет уравнение

$$x(y^2+z^2)-dy=0$$

или в центральной проекции

$$(\eta^2+\zeta^2)(1-d\eta)-d\eta=0 \tag{6}$$

Эта кривая третьего порядка аналогична кругу перегиба в плоском движении. Кривая, аналогичная кривой Альта, т. е. геометрическое место точек, траектории которых имеют заданную геодезическую кривизну $\operatorname{ctg}\rho$, определяется уравнением

$$(\eta^2+\zeta^2)^3=[(\eta^2+\zeta^2)(1-d\eta)-d\eta]^2\operatorname{tg}^2\rho \tag{7}$$

Для условия касания третьего порядка, имеем еще

$$X'''x_c+Y'''y_c+Z'''z_c=0$$

что вследствие

$$X'''=-dy'+3\varphi''z, \qquad Y'''=dx'+z, \qquad Z'''=3\psi''x-y$$

и совместно с (3) дает

$$\begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix}=0 \qquad \text{или} \qquad (\eta^2+\zeta^2)(3\varphi''-\eta d')-3\eta\zeta d^2=0 \tag{8}$$

т. е. строфоиду, аналогичную строфоиде для плоского движения.

В пересечении этой кривой с «кривой перегиба» получаем точки, аналогичные точке Болла. Представив (6) и (8) в сферических полярных координатах и исключая $\operatorname{tg} r$, найдем

$$[9\varphi''\psi''t^2+3d'(\varphi''-\psi'')t-d'^2](1+t^2)-9d''t^2=0 \tag{9}$$

где $t=\operatorname{tg}\vartheta$ и определяет направление луча, идущего к каждой из четырех «точек Болла».

Для касания четвертого порядка имеем

$$X^{\mathrm{IV}}x_c+Y^{\mathrm{IV}}y_c+Z^{\mathrm{IV}}z_c=0$$

что вследствие

$$X^{\mathrm{IV}}=-3d^2x-(d''-6\varphi'')y+4\varphi''z$$

$$Y^{\mathrm{IV}}=(d''-6\psi'')x-(3d^2-1)y$$

$$Z^{\mathrm{IV}}=4\psi'''x+z$$

и совместно с (3) дает

$$\begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X^{\mathrm{IV}} & Y^{\mathrm{IV}} & Z^{\mathrm{IV}} \end{vmatrix}=0$$

или

$$(\eta^2+\zeta^2)[4\varphi'''\zeta-(d+d''-6\varphi'')\eta-3d^2]+3d^3\eta(1+\eta^2)-$$

$$-6d(\varphi''-\psi'')\eta^2-4dd'\eta\zeta=0 \tag{10}$$

В пересечении этой кривой со строфоидой получаем точки, аналогичные точкам Бурместера. Представив (10) в полярных координатах, с помощью второго уравнения (8) найдем

$$-9\varphi''\psi''t^6+3(4\varphi'''d-6d'\varphi''+d'd)t^5+(27\varphi''\psi''+4d'^2-3d''d-3d^2)t^4+$$
$$+12(\varphi'''d-d'\varphi'')t^3+(9\varphi''d+9\varphi''^2-3d''d-3d^2+2d'^2+9d^4)t^2+$$
$$+3d'(d-2\psi'')t+d'^2=0 \qquad (11)$$

Это уравнение определяет направление лучей, идущих из полюса к шести точкам, аналогичным точкам Бурместера.

На неподвижной сфере получим соответственно:

1) Уравнение кривой третьего порядка, аналогичной кругу возврата:

$$(\eta_c^2+\zeta_c^2)(1+\eta_c d)+\eta_c d=0 \qquad (12)$$

Эта кривая симметрична с «кривой перегиба» относительно общей касательной к центроидам.

2) Уравнение «кривой Альта»

$$(\eta_c^2+\zeta_c^2)^3=[(\eta_c^2+\zeta_c^2)(1+\eta_c d)+\eta_c d]^2\,\mathrm{tg}^2\rho \qquad (13)$$

3) Уравнение строфоиды

$$(\eta_c^2+\zeta_c^2)(3\psi''\zeta_c+\eta_c d')+3d^2\eta_c\zeta_c=0 \qquad (14)$$

4) Уравнение кривой, определяющей совместно с (14) точки Бурместера:

$$(\eta_c^2+\zeta_c^2)[4\psi''\zeta_c-(d+d''-6\psi'')\eta_c+3d^2]+3d^3\eta_c(1+\eta_c^2)-$$
$$-6d(\varphi''-\psi'')\eta_c^2-4d'd\eta_c\zeta_c=0 \qquad (15)$$

Поступила в редакцию
31 V 1943

V. V. DOBROVOLSKY. BURMESTER'S POINTS IN SPHERICAL MOTION

The points of a sphere moving in itself are fixed. The trajectories of these points have an osculation of the highest orders with their own circles of curvature.

The trajectories of the strofoid points have the third order of osculation with the circles of curvature. The equation of the central projection of this strofoid is available (8). The intersections of this curve with the curve (6) give four points analogous to those of Ball, and the intersection with the curve (11) give six points similar to these of Burmester.

ЛИТЕРАТУРА

1. Котельников А. П. Точки Бурместера, их свойства и построение. Математический сборник. 1927. XXXIV. 3—4.
2. Артоболевский И. И., Блох З. Ш., Добровольский В. В. Синтез механизмов. 1944.
3. Добровольский В. В. Новая теория сферических механизмов. Труды Московского станко-инструментального института. 1940. Сб. VI.