Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Д. И. Шерман

(Москва)

§ 1. Пусть требуется определить функцию $u(x, y)$ гармоническую в конечной односвязной области S, расположенной в плоскости $z = x + iy$ и ограниченной кривой L, имеющей непрерывную кривизну, при следующем условии:

$$a(s)\frac{\partial u}{\partial x} + b(s)\frac{\partial u}{\partial y} = f(s) \tag{1.1}$$

на L, где $a(s)$, $b(s)$ и $f(s)$ — некоторые заданные функции дуги s. Предположим, что $a(s)$ и $b(s)$ удовлетворяют условию Гельдера, и, кроме того, одновременно не обращаются в нуль. Функцию же $f(s)$ будем считать непрерывной на L.

Задача об определении функции $u(x, y)$ гармонической в S при условии (1.1) на L носит название задачи Гильберта. Решение ее для любой односвязной области известно и может быть получено последовательным решением двух задач Дирихле или же (что то же самое) с помощью конформного отображения области на круг [1].

В настоящей статье мы указываем новый прием, позволяющий непосредственно привести задачу к эквивалентному уравнению Фредгольма. Этот прием может быть также использован при решении некоторых других задач.

Положим, считая [2] $a^2 + b^2 = 1$,

$$a = \cos\omega(s), \qquad b = \sin\omega(s) \tag{1.2}$$

и рассмотрим сначала случай, когда $\omega(s)$ при обходе L (в положительном направлении относительно области S) получает приращение $-2n\pi$, где n — некоторое целое положительное число или нуль.

Взяв начало координат лежащим в области S, условимся (что, очевидно, возможно) считать $u(0, 0) = 0$. При этом функцию $u(x, y)$ будем искать в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(s)\,\mathrm{Re}\,\frac{i}{a+ib}\ln\frac{t-z}{t}\,dt + \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n+1} a_k z^k \tag{1.3}$$

---

[1] Решение же ее для круга содержится, например, в курсе В. И. Смирнова [1].

[2] Если $a^2 + b^2 \neq 0$, то разделив обе части (1.1) на $\sqrt{a^2+b^2}$ и обозначив новые коэффициенты соответственно через те же буквы, придем к этому соотношению.

где t — аффикс точек L; символ Re, как обычно, обозначает вещественную часть рядом содержащегося выражения; под $\ln[(t-z)/t]$ понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$, и $\nu(s)$ — новая неизвестная функция; далее,

$$a_k = \frac{i}{\pi k}\int_L \nu(s)\,\frac{1}{a+ib}\,\frac{dt}{t^k} \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

и a_{n+1} — либо вещественная, либо чисто мнимая величина, равная соответственно вещественной или умноженной на i мнимой части функционала

$$\frac{i}{\pi(n+1)}\int_L \nu(s)\,\frac{1}{a+ib}\,\frac{dt}{t^{n+1}} \tag{1.5}$$

Более точно выбор a_{n+1} будет указан ниже.

Обозначая через $v(x, y)$ гармоническую функцию, сопряженную с $u(x, y)$ и полагая $\varphi(z) = u + iv$, будем иметь

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_L \nu(s)\,\frac{1}{a+ib}\ln\frac{t-z}{t}\,dt + \sum_{k=1}^{n+1} a_k z^k + iC \tag{1.6}$$

где C — произвольная вещественная постоянная.

Из формулы (1.6) следует, что

$$\varphi^{(k)}(0) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{1.7}$$

и, кроме того, в связи со сказанным относительно a_{n+1} имеем либо

$$\operatorname{Re}\varphi^{(n+1)}(0) = 0 \tag{1.8}$$

либо

$$\operatorname{Im}\varphi^{(n+1)}(0) = 0 \tag{1.9}$$

Подставив выражение $u(x, y)$ из равенства (1.3) в (1.1), получим для определения функции $\nu(s)$ уравнение Фредгольма

$$\nu(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \nu(s)\Big[\{a(s)\,a(s_0) + b(s)\,b(s_0)\}\frac{\partial \ln r}{\partial n} +$$
$$+\{a(s)\,b(s_0) - b(s)\,a(s_0)\}\frac{\partial \ln r}{\partial s}\Big]ds + \Omega(s_0) = f(s_0) \tag{1.10}$$

где s и s_0 — дуги точек $M(\xi, \eta)$ и $M(\xi_0, \eta_0)$, лежащих на L, причем

$$\Omega = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n+1} k a_k\{a(s_0) + ib(s_0)\}\,t^{k-1}(s_0), \qquad r = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2}$$

Докажем, что уравнение (1.10) всегда имеет единственное решение. Для этого рассмотрим соответствующее однородное уравнение. Пусть оно имеет какое-либо решение $\nu_0(s)$. Обозначим через $u_0(x, y)$ и $\varphi_0(z)$ функции, которые получим, заменив в правых частях (1.3) и (1.6) $\nu(s)$ на $\nu_0(s)$. Очевидно, $u_0(x, y)$ будет удовлетворять однородному условию (1.1), т. е. при $f(s) = 0$. Это однородное условие после преобразований может быть представлено в виде

$$\operatorname{Re}\{e^{ig(t)}\,t^{-n}\,\varphi_0'(t)\} = 0 \tag{1.11}$$

где $g(z) = g_1(x, y) + ig_2(x, y)$ — функция, регулярная в S, вещественная часть которой непрерывна на L и равна $\omega(s) + n\theta$, причем θ — полярный угол.

На основании равенств (1.7), которым удовлетворяет также $\varphi_0(z)$, функция, содержащаяся под знаком символа Re в (1.11), будет регулярна в S. Поэтому

$$\varphi_0'(z) = iC_1 z^n e^{-ig(z)} \tag{1.12}$$

где C_1 — некоторая вещественная постоянная.

Условимся считать $\sin g_1(0, 0) \neq 0$. Этого всегда можно добиться выбором начала координат. Тогда в силу одной из формул (1.8) и (1.9) найдем, что $C_1 = 0$, и, следовательно,

$$\varphi_0(z) = iC \tag{1.13}$$

Учитывая это, будем иметь на L

$$\nu_0(s) = (a + ib)\left\{\psi_0(t) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} ka_k t^{k-1}\right\} \tag{1.14}$$

где $\psi_0(z)$ — некоторая функция, регулярная вне S и равная нулю на бесконечности; ее следует определить из условия

$$\operatorname{Im}(a + ib)\left\{\psi_0(t) - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n+1} ka_k t^{k-1}\right\} = 0 \tag{1.15}$$

вытекающего из вещественности $\nu_0(s)$. Оно может быть преобразовано к виду

$$\operatorname{Im} e^{i\chi(t)}\left\{\frac{\psi_0(t)}{t^n} - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n+1} ka_k t^{k-n-1}\right\} = 0 \tag{1.16}$$

где $\chi(z) = \chi_1(x, y) + i\chi_2(x, y)$ — функция, регулярная вне S (обращающаяся в постоянную на бесконечности); причем вещественная часть этой функции[1] на кривой L равна $\omega(s) + n\theta$.

---

[1] Вещественную часть функции $\chi(z)$ можно, например, искать в виде

$$\chi_1(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_L \mu \frac{\partial \ln r}{\partial n} ds - C$$

где плотность $\mu(s)$ и постоянная C — неизвестные, подлежащие определению. Устремляя в этом равенстве точку $M(x, y)$ к контуру L, получим для μ уравнение Фредгольма. Соответствующее однородное уравнение будет, очевидно, иметь решение $\mu = \text{const}$. Обозначая далее через $\lambda(s)$ решение союзного уравнения, легко убедимся, что интеграл от $\lambda(s)$ по контуру неравен нулю. Действительно, допустим противное. В этом случае функция

$$V = \int_L \lambda(s) \ln r\, ds$$

равная некоторой постоянной на L, будет обращаться в нуль на бесконечности, как $(x^2 + y^2)^{-1/2}$ u, следовательно, должна быть тождественно равна нулю внутри и вне S. Но тогда $\lambda = 0$, что невозможно.

Определив постоянную C из условия ортогональности, найдем $\mu(s)$.

Функция, заключающаяся под знаком символа Im в формуле (1.16), регулярна вне S и равна постоянной на бесконечности. Поэтому

$$\psi_0(z) = C_2 z^n e^{-i\chi(z)} + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n+1} k a_k z^{k-1} \tag{1.17}$$

где C_2 — некоторая вещественная постоянная. Отсюда, принимая во внимание, что $\psi_0(\infty) = 0$, и выбрав a_{n+1} вещественным, если $\sin\{\mathrm{Re}\,\chi(\infty)\} \neq 0$, и чисто мнимым в противном случае (или любым из них, если одновременно $\sin\{\mathrm{Re}\,\chi(\infty)\}$ и $\cos\{\mathrm{Re}\,\chi(\infty)\}$ отличны от нуля), найдем, что все постоянные a_k, C_2 и функция $\psi_0(z)$ равны нулю. При этом плотность $\nu_0(s)$ также будет равно нулю.

Следовательно, уравнение (1.10) разрешимо при любом значении $f(s)$. Определив из него функцию $\nu(s)$, найдем затем по формуле (1.3) искомое решение $u(x, y)$.

Примечание 1. Нетрудно видеть, что любая гармоническая функция $u(x, y)$ может быть представлена в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_L \nu(s)\,\mathrm{Re}\,\frac{t}{a+ib}\ln\frac{t-z}{t}\,dt + \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n+1} b_k z^k$$

где b_k — некоторые постоянные (из них b_{n+1} — вещественная или чисто мнимая величина в зависимости от того, $\sin\{\mathrm{Re}\,\chi(\infty)\}$ отличен или равен нулю). В самом деле, поступая аналогично предыдущему, получим

$$\nu(s) = (a+ib)\left\{\psi(t) + \frac{\varphi'(t)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} k b_k t^{k-1}\right\}$$

где $\psi(z)$ — регулярная вне S и обращающаяся в нуль на бесконечности функция, определяемая из равенства

$$\mathrm{Im}\, e^{i\chi(t)}\left\{\frac{\psi(t)}{t^n} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} k b_k t^{k-n-1}\right\} + \mathrm{Im}\,\frac{1}{2} e^{i\chi(t)} t^{-n}\varphi'(t) = 0$$

Для нее будем иметь

$$\psi(z) = z^n\left[\{C_1 - \delta(z)\}\, e^{-i\chi(z)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} k b_k z^{k-n-1}\right]$$

при этом C_1 — вещественная постоянная, а через $\delta(z)$ обозначена функция, регулярная вне S, мнимая часть которой равна на L второму слагаемому в предшествующем равенстве. Для определенности будем считать $\mathrm{Re}\,\delta(\infty) = 0$.

Функция, содержащаяся в квадратных скобках последнего равенства, должна обращаться на бесконечности в нуль как z^{-n-1}. Из этого условия найдем все постоянные b_k $(k = 1, \ldots, n+1)$ и C_1, и затем получим окончательное выражение для плотности $\nu(s)$.

Между прочим отсюда ясно, что, прибавив в правой части уравнения (1.10) функцию

$$\Omega^* (s_0) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n+1} k b_k \{a (s_0) + i b (s_0)\} t^{k-1} (s_0)$$

где b_k — произвольные постоянные (с указанным выбором b_{n+1}), и разрешив его, мы получим общее решение задачи Гильберта (содержащее также все нетривиальные решения однородной задачи).

Примечание 2. Отбросив в левой части (1.10) функцию $\Omega (s_0)$ и сохранив в его правой части $\Omega^* (s_0)$, получим новое уравнение для $\nu (s)$. Очевидно, к этому уравнению мы придем, исходя непосредственно из представления, указанного в предыдущем примечании. В том случае, когда соответствующее ему однородное уравнение имеет фундаментальные функции, некоторые из b_k $(k = 1, \ldots, n+1)$ должны быть определены через остальные постоянные и функцию $f(s)$ из условий ортогональности.

Как легко видеть, это однородное уравнение при $n = 0$ имеет лишь тривиальное решение. В самом деле, вместо (1.12) и (1.14) будем тогда иметь последовательно

$$\varphi_0' (z) = i C_1 e^{-ig(z)}$$

и

$$\nu_0 (s) = (a + ib) \left\{ \psi_0 (t) + \frac{1}{2} i C_1 e^{-ig(t)} \right\}$$

где вещественная часть $g (t)$ равна $\omega (s)$ на L. Отсюда

$$\operatorname{Im} \{e^{ig(t)} \psi_0 (t)\} = - C_1 e^{g_2 - \gamma_2}$$

Правая часть последнего равенства сохраняет постоянный знак. Поэтому, отобразив область вне S на внутренность единичного круга в плоскости ζ так, чтобы бесконечно удаленная точка перешла в $\zeta = 0$, и принимая во внимание, что среднее значение функции в левой части того же равенства вдоль единичной окружности на плоскости ζ (в силу обращения $\psi_0 (z)$ в нуль на бесконечности) равно нулю, найдем, что $C_1 = 0$. Следовательно, плотность $\nu_0 (s)$ также будет равна нулю.

§ 2. Предположим теперь, что $\omega (s)$ при обходе L получает приращение $2n\pi$, где n — целое положительное число. В этом случае искомую функцию будем искать в виде

$$u (x, y) = \frac{1}{\pi} \int_L \nu (s) \operatorname{Re} \frac{i}{a + ib} \ln \frac{t - z}{t} dt \tag{2.1}$$

считая здесь также $u (0, 0) = 0$.

Покажем, что $u (x, y)$ может быть действительно таким образом представлена. Из (2.1) имеем

$$\varphi (z) = - \frac{1}{\pi i} \int_L \nu (s) \frac{1}{a + ib} \ln \frac{t - z}{t} dt + iC \tag{2.2}$$

откуда на L

$$\nu (s) = (a + ib) \left\{ \psi (t) + \frac{\varphi' (t)}{2} \right\} \tag{2.3}$$

где функция $\psi(z)$ регулярна вне S и равна нулю на бесконечности. Она должна удовлетворять равенству

$$\operatorname{Im} e^{i\chi(t)} t^n \left\{ \psi(t) + \frac{\varphi'(t)}{2} \right\} = 0$$

или же

$$\operatorname{Im} e^{i\chi(t)} t^n \left\{ \psi(t) - \sum_{1}^{n-1} \frac{c_k}{t^k} \right\} + \operatorname{Im} e^{i\chi(t)} t^n \left\{ \frac{\varphi'(t)}{2} + \sum_{1}^{n-1} \frac{c_k}{t^k} \right\} = 0 \tag{2.4}$$

где c_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ — первые $n-1$ коэффициентов в разложении $\psi(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Отсюда, обозначая через $\delta(z)$ функцию, регулярную вне S (и обращающуюся в постоянную на бесконечности), мнимая часть которой равна второму слагаемому в (2.4), найдем

$$\psi(z) = \sum_{1}^{n-1} \frac{c_k}{z^k} + e^{-i\chi(z)} \frac{\{C_1 - \delta(z)\}}{z^n}. \tag{2.5}$$

Легко непосредственно убедиться, что значение $\nu(s)$, определяемое из равенств (2.3) и (2.5), будет удовлетворять (2.2) при $C = \operatorname{Im}\varphi(0)$ и произвольных значениях c_k $(k = 1, \ldots, n-1)$. Тем самым доказана представимость функции $u(x, y)$ в виде (2.1).

Далее, из формул (1.1) и (2.1) получим для определения $\nu(s)$ уравнение Фредгольма, совпадающее с (1.10) при $\Omega = 0$. Как нетрудно видеть, оно, вообще говоря, не имеет решения. В самом деле, обозначим аналогично предыдущему через $\nu_0(s)$ некоторое решение соответствующего однородного уравнения и через $u_0(x, y)$ и $\varphi_0(z)$ функции, полученные из равенств (2.1) и (2.2) после замены в их правых частях $\nu(s)$ на $\nu_0(s)$. Тогда будем иметь

$$\operatorname{Re}\{e^{i\theta(t)} t^n \varphi_0'(t)\} = 0 \qquad \text{на } L$$

откуда $\varphi_0(z) = iC$. После этого, поступая, как выше, найдем соотношения, аналогичные (2.3) и (2.4):

$$\nu_0(s) = (a + ib)\,\psi_0(t)$$

$$\operatorname{Im} e^{i\chi(t)} t^n \left\{ \psi_0(t) - \sum_{1}^{n-1} \frac{c_k^{(0)}}{t^k} \right\} + \operatorname{Im} e^{i\chi(t)} \sum_{1}^{n-1} c_k^{(0)} t^{n-k} = 0$$

Последнее служит для определения функции $\psi_0(z)$, регулярной вне S, причем вещественная часть $\chi(z)$ (также регулярной вне S) равна $\omega(s) - n\theta$ на L. Из этих же соотношений легко видеть, что функция $\nu_0(s)$ может определяться любым из следующих выражений

$$\nu_0^{(0)}(s) = \frac{e^{\chi_2}}{|t|^n}$$

$$\nu_{0j}^{(k)}(s) = (a + ib)\left\{ \frac{\varepsilon_j}{t^k} - e^{-i\chi(t)} \frac{\delta_{kj}(t)}{t^n} \right\} \qquad (k = 1, \ldots, n-1;\ j = 1, 2) \tag{2.6}$$

где $\delta_{kj}(z)$ — функция, регулярная вне S, мнимая часть которой на L равна $\operatorname{Im} \varepsilon_j e^{i\chi(t)} t^{n-k}$, а ее вещественная часть обращается в нуль на бесконечности; при этом $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = i$.

Таким образом однородное уравнение Фредгольма имеет в данном случае $2n-1$ фундаментальных функций. Следовательно, неоднородное уравнение вообще говоря, неразрешимо.

Отсюда вытекает, что в этом случае рассматриваемая задача также, вообще говоря, не имеет решения.

Она будет разрешима лишь в том случае, если функция $f(s)$ будет ортогональна ко всем фундаментальным функциям союзного уравнения. Последние же могут быть легко найдены.

Действительно, союзное уравнение имеет вид

$$\mu(s_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(s)\Big[\{a(s)\,a(s_0)+b(s)\,b(s_0)\}\frac{\partial \ln r_0}{\partial n_0}+$$
$$+\{b(s)\,a(s_0)-a(s)\,b(s_0)\}\frac{\partial \ln r_0}{\partial s_0}\Big]\,ds=0 \tag{2.7}$$

и, как нетрудно убедиться, может быть представлено в виде

$$\{a(s)\cos(n,x)+b(s)\cos(n,y)\}\frac{\partial u_0^*}{\partial x}+\{a(s)\cos(n,y)-b(s)\cos(n,x)\}\frac{\partial u_0^*}{\partial y}=0 \tag{2.8}$$

где

$$u_0^*(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_L \mu\,\mathrm{Re}\,\{(a+ib)\ln(t-z)\}\,ds$$

и точка z лежит вне области S.

Из равенства (2.8), полагая $u_0^*+iv_0^*=\varphi_0^*(z)$, получим

$$\mathrm{Re}\,\{e^{-i\chi^*(t)}\,t^{-n+1}\,\varphi_0^{*\prime}(t)\}=0$$

при этом вещественная часть функции $\chi^*(z)$, регулярной вне S, равна $\overline{\omega(s)}-\{(n-1)\,\theta+\alpha\}$ на L, причем α — угол между нормалью к L и осью x.

Отсюда имеем $\varphi_0^{*\prime}(z)=0$ и

$$\mu(s)=(a-ib)\frac{dt}{ds}\psi_0^*(t)$$

где функция $\psi_0^*(z)$, регулярная внутри S, должна быть определена из равенства

$$\mathrm{Im}\,ie^{-ig^*(t)}\,t^{-n+1}\,\psi_0^*(t)=0$$

в котором вещественная часть функции $g^*(z)=g_1^*+ig_2^*$, также регулярной в S, равна $\omega(s)-\{(n-1)\,\theta+\alpha\}$ на L. Поступая, как выше, найдем $\psi_0^*(z)$ и затем получим выражения для $\mu(s)$

$$\mu^{(0)}(s)=|t|^{n-1}\,e^{-g_2^*}$$

$$\mu_j^{(k)}(s)=(a-ib)\frac{dt}{ds}\{\varepsilon_j t^k+it^{n-1}e^{ig^*(t)}\delta_{kj}^*(t)\}\qquad (k=0,\ldots,n-2;\ j=1,2) \tag{2.9}$$

где $\delta_{kj}^*(t)$ есть функция, регулярная в S, причем ее мнимая часть равна

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon_j ie^{-ig^*(t)}\,t^{k-n+1}$$

на L и, кроме того, $\mathrm{Re}\,\delta_{kj}^*(0)=0$.

Примечание. Отметим, что с помощью приема, указанного выше, сингулярное интегральное уравнение

$$a(s_0)\mu(s_0)-\frac{b(s_0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(s)\operatorname{ctg}\frac{s_0-s}{2}\,ds+\int_{-\pi}^{\pi}\mu(s)K(s,s_0)\,ds=f(s_0)$$

в котором $K(s,s_0)$ — абсолютно интегрируемая функция вида $(s-s_0)^{-\alpha}K_1(s,s_0)$, где $\alpha<1$ и $K_1(s,s_0)$ ограничено, можно легко преобразовать в эквивалентное уравнение Фредгольма (следует сравнить с результатами работ [2,3,4]).

Действительно, пусть $\mu(s)$ — контурное значение некоторой гармонической в единичном круге функции $u(x,y)$. Обозначая через $-2n\pi$ приращение $\omega(s)$, положим при $n>0$

$$u(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_L\nu(s)\operatorname{Re}\frac{i}{a+ib}\frac{dt}{t-z}+\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$$

или

$$\varphi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\nu(s)\frac{1}{a+ib}\frac{dt}{t-z}+\sum_{k=0}^{n}a_kz^k+iC$$

где L — окружность и a_k — некоторые постоянные; из них a_0 — вещественная и a_n — вещественная или чисто мнимая в зависимости от того, $\sin\{\operatorname{Re}\chi(\infty)\}$ отличен или равен нулю. Очевидно, здесь

$$\operatorname{Re}\chi(\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(s)\,ds$$

При $n=0$ будем считать $a_0\neq0$, $a_k=0$ $(k=1,\ldots,n)$, если $\cos\operatorname{Re}\chi(\infty)=0$, и a_0 также равным нулю, если $\cos\operatorname{Re}\chi(\infty)\neq0$.

Наконец, при $n<0$ положим все постоянные $a_k=0,(k=0,\ldots,n)$.

Рассуждая, как прежде, докажем, что любая гармоническая функция $u(x,y)$ представима указанным образом.

Далее, записав наше сингулярное уравнение в виде

$$\operatorname{Re}[(a+ib)\{u(s_0)+iv(s_0)\}]+\int_{-\pi}^{\pi}\mu(s)K(s,s_0)\,ds=f(s_0)$$

где

$$v(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_L\nu(s)\operatorname{Im}\frac{i}{a+ib}\frac{dt}{t-z}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\nu(s)b(s)\,ds+\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}a_kz^k$$

и подставив вместо $u(s)$ и $v(s)$ предельные значения правых частей соответствующих равенств, получим для $\nu(s)$ уравнение Фредгольма

$$\nu(s_0)+\int_{-\pi}^{\pi}\nu(s)K^*(s,s_0)\,ds=f^*(s_0)$$

где выражения для абсолютно интегрируемого ядра $K^*(s,s_0)$ (указанного вида) и функции $f^*(s)$ могут быть легко выписаны.

§ 3. В заключение рассмотрим так называемую задачу Пуанкаре, заключающуюся в определении функции $u(x,y)$, гармонической в области S и удовлетворяющей на контуре L равенству

$$\frac{du}{dn}+p(s)\frac{du}{ds}+q(s)u=f(s) \tag{3.1}$$

где заданные функции $p(s)$, $q(s)$ и $f(s)$ непрерывны в смысле Гельдера[1]

Полагая

$$a(s)=\frac{\cos(n,x)-p(s)\cos(n,y)}{\sqrt{1+p^2(s)}}, \quad b(s)=\frac{\cos(n,y)+p(s)\cos(n,x)}{\sqrt{1+p^2(s)}}$$

запишем (3.1) в форме

$$a(s)\frac{\partial u}{\partial x}+b(s)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{q(s)}{\sqrt{1+p^2(s)}}u=\frac{f(s)}{\sqrt{1+p^2(s)}}$$

Отметим, что при обходе L

$$[\arg(a+ib)]_L=\left[\arg\frac{p(s)-i}{\sqrt{1+p^2(s)}}\right]_L+\left[\arg\frac{dt}{ds}\right]_L=2\pi$$

Функцию $u(x,y)$ будем искать в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(s)\frac{1}{1+p^2(s)}\operatorname{Re}\left\{(ip(s)-1)\ln\frac{t-z}{t}\right\}ds+A \tag{3.2}$$

где A — функционал, равный либо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \nu(s)\frac{p(s)}{1+p^2(s)}ds \tag{3.3}$$

либо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \nu(s)\frac{1}{1+p^2(s)}ds \tag{3.4}$$

Более точный его выбор будет указан ниже.

Легко видеть, что по заданной функции $u(x,y)$ плотность $\nu(s)$ определяется единственным образом. Действительно, поступая, как прежде, имеем

$$\nu(s)=(p(s)-i)\frac{dt}{ds}\left\{\varphi(t)+\frac{\varphi'(t)}{2}\right\}, \tag{3.5}$$

и затем для определения $\varphi(z)$ равенство

$$\operatorname{Im} e^{i\chi(t)}t\varphi(t)+\operatorname{Im}\frac{1}{2}e^{i\chi(t)}t\varphi'(t)=0 \tag{3.6}$$

в котором вещественная часть $\chi(z)$ равна $\omega(s)-\theta$ на L. Отсюда, обозначая аналогично тому, как выше, через $\delta(z)$ функцию, мнимая часть которой равна второму слагаемому в (3.6), и считая $\operatorname{Re}\delta(\infty)=0$, получим

$$\varphi(z)=\frac{C_1-\delta(z)}{z}e^{-i\chi(z)}.$$

[1] В частном случае, когда $p(s)=iA(s)$, $q(s)=0$ и $A(s)$, $f(s)$ — аналитические действительные функции, задача Пуанкаре [5] была приведена к уравнению Фредгольма Г. Бертраном [6], а затем для аналитической кривой L и аналитических же действительных функций $p(s)$, $q(s)$ и $f(s)$ Погорцельским [7].

Более подробно, нежели в указанных работах, эта задача была рассмотрена Б. Хведелидзе [8, 9]. Автором в случае односвязной и многосвязной конечных областей [с при менее ограничительных предположениях относительно кривой L и функций $p(s)$, $q(s)$ и $f(s)$] получено для нее эквивалентное уравнение Фредгольма.

Здесь, ограничиваясь случаем односвязной области, мы приводим для задачи Пуанкаре новое эквивалентное ей уравнение Фредгольма.

Подставим теперь значение $\nu(s)$ из формулы (3.5) в равенство для $\varphi(z)$, вытекающее из (3.2), и возьмем A равным (3.3) или (3.4), смотря по тому, будет $\sin\{\operatorname{Re}\chi(\infty)\}$ отличен или равен нулю. Тогда, замечая, что в силу вещественности правой части (3.5) функционалы (3.3) и (3.4), как легко убедиться, могут быть записаны соответственно в виде

$$A = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_L \psi(t)\,dt \quad \text{и} \quad A = \operatorname{Im}\frac{1}{2\pi}\int_L \psi(t)\,dt$$

получим в первом случае

$$\varphi(0) = \operatorname{Re} i\{C_1 - \delta(\infty)\}\,e^{-i\chi(\infty)} + C$$

и во втором случае

$$\varphi(0) = \operatorname{Im} i\{C_1 - \delta(\infty)\}\,e^{-i\chi(\infty)} + C$$

В каждом из них определим C и C_1. Отсюда следует наше утверждение.

Возвращаясь к рассматриваемой задаче, получим для определения функции $\nu(s)$ уравнение Фредгольма

$$\nu(s_0) - \frac{1}{\pi}\int_L \nu(s)\,\frac{1}{1+p^2(s)}\Big[\{1+p(s)\,p(s_0)\}\frac{d\ln r_0}{dn_0} + \{p(s)-p(s_0)\}\frac{d\ln r_0}{ds_0} +$$

$$+ q(s_0)\left\{\ln\frac{r_0}{\rho} + \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta-\eta_0}{\xi-\xi_0} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}\right) + \varepsilon\right\}\Big]ds = f(s_0)$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$ и $\varepsilon = p(s)$ или $=1$. (3.7)

Если однородная задача (при $f(s)=0$) имеет лишь тривиальное решение $u_0(x, y) = 0$, то, как следует из предыдущего, однородное уравнение, соответствующее (3.7), будет также иметь лишь тривиальное решение $\nu_0(s) = 0$. В этом случае неоднородное уравнение (3.7) будет всегда единственным образом разрешимо. Определив из него $\nu(s)$, найдем затем по формуле (3.2) искомую функцию $u(x, y)$.

Примечание. Постоянную A, если это представляется более удобным, можно не брать равной одному из функционалов (3.3) или (3.4), а перенеся в правую часть соответствующего уравнения (3.7), определить ее (в том случае, когда задача разрешима) из условия ортогональности.

Поступила в редакцию
24 II 1945

Институт механики
Академии Наук СССР

D. I. SHERMAN.—CERTAIN PROBLEMS OF THE THEORY OF POTENTIAL

The paper presents a method for the direct reduction of the so-called problem of Gilbert and Poincaré to the equivalent integral equation of Fredholm.

The same method makes it possible to solve the problem of the transformation of a singular integral equation into the equivalent Fredholm equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III.
2. Михлин С. Г. Доклады Академии Наук СССР.
3. Векуа И. Н. Доклады Академии Наук СССР. 1940. XXVI. № 4.
4. Векуа И. Н. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР. 1942. Т. III. № 9.
5. Poincaré H. Lesons de mécanique céleste. III. Paris. 1910. Chap. X.
6. Bertrand G. Ann. Ec. de l'Ec. Norm. Sup. 1923. 3 Ser. 40.
7. Pogorzelski W. Math. ZS. 1939. 44.
8. Хведелидзе Б. Доклады Академии Наук СССР. 1941. Т. XXX. № 3.
9. Хведелидзе Б. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР. 1941. Т. II. № 7, 10.