Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

О ДАВЛЕНИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ УЧАСТКОВ СЦЕПЛЕНИЯ И СКОЛЬЖЕНИЯ

С. В. Фалькович

(Москва)

В настоящей работе решается задача определения напряжения, возникающего под абсолютно жестким штампом с плоским основанием, прижатым к упругой полуплоскости заданной силой, направленной перпендикулярно границе этой полуплоскости. Эта задача была рассмотрена ранее в работах Садовского [1], Мусхелишвили [2] и Абрамова [3], причем Садовский предполагал, что вдоль линии контакта штампа с полуплоскостью происходит скольжение и трение отсутствует, а Мусхелишвили и Абрамов различными методами получили решение задачи в предположении, что между штампом и упругой средой возникает сцепление. Решая задачу при таком предположении, Абрамов обнаружил, что вблизи штампа нормальное напряжение бесчисленное число раз меняет знак. Подобное явление, повидимому, может иметь место лишь в том случае, если штамп и полуплоскость неподвижно скреплены (спайка). Если же скрепление отсутствует, вблизи концов штампа должны возникнуть участки скольжения. При таком предположении задача и решается в этой работе.

1. Известно, что при плоском напряженном состоянии компоненты напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy}, а также проекции перемещения u и v могут быть выражены через бигармоническую функцию U и ее производные. Следовательно, имеем

$$\Delta\Delta U = 0 \tag{1.1}$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} \tag{1.2}$$

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_x+\sigma_y), \qquad 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_x+\sigma_y) \tag{1.3}$$

Взяв общий интеграл уравнения (1.1) в виде $U = y\varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ — гармонические функции, получим из (1.2) и (1.3)

$$\sigma_y = y\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - y\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y} \tag{1.4}$$

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + y\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y}, \qquad 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -y\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} - \frac{2\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \tag{1.5}$$

Вторую из формул (1.5) можно преобразовать и записать в виде

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial x} = -y\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \tag{1.6}$$

На оси x будем иметь из (1.4)

$$\sigma_y(x,0)=\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}\right)_{y=0},\qquad \tau_{xy}(x,0)=-\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y}\right)_{y=0} \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что значения σ_y и τ_{xy} вдоль оси x совпадают с граничными значениями гармонических функций

$$q_1(x,y)=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2},\qquad q_2(x,y)=-\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y}\right) \tag{1.8}$$

Если рассматривать гармонические функции $q_1(x,y)$ и $q_2(x,y)$ как мнимые части двух функций $w_1=p_1+iq_1$ и $w_2=p_2+iq_2$ комплексного переменного $z=x+iy$, то для сопряженных гармонических функций p_1 и p_2 найдем из (1.8)

$$p_1(x,y)=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y},\qquad p_2(x,y)=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}$$

после чего первые из формул (1.5) и (1.6) при $y=0$ примут вид

$$2\mu\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}q_1-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}p_2,\qquad 2\mu\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}=-\frac{\mu}{\lambda+\mu}q_2-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}p_1 \tag{1.9}$$

Таким образом, определение напряжений в упругой полуплоскости сводится к нахождению двух функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$.

2. Перейдем теперь к решению поставленной задачи. Пусть абсолютно жесткий штамп с плоским основанием $ABOCD$ заданной длины $AD=2b$ под действием заданной силы P, действующей перпендикулярно основанию и проходящей через середину штампа O, производит давление на упругую полуплоскость, совпадающую с нижней полуплоскостью комплексного переменного z. Будем предполагать, что на участке BC линии контакта имеет место сцепление штампа с упругой полуплоскостью. Длина участка сцепления $BC=2a$ неизвестна и подлежит определению. Будем также предполагать, что вдоль участков AB и CD линии контакта происходит скольжение, причем трением будем пренебрегать. При таком допущении характер явления качественно будет тот же, что при учете сил трения, однако при этом задачу оказывается возможным довести до конца.

Сформулируем граничные условия, которые должны выполняться на оси x. Участки $EA(-\infty,-b)$ и $DE(+b,+\infty)$ свободны от напряжения, т. е. $\sigma_y(x,0)=0$, $\tau_{xy}(x,0)=0$ при $-\infty<x<-b$ и при $+b<x<+\infty$, что на основании (1.7) и (1.8) можно записать в виде

$$q_1(x,0)=0,\qquad q_2(x,0)=0\qquad (|x|<b) \tag{2.1}$$

Вдоль AB и CD происходит скольжение без трения, т. е. $\tau_{xy}(x,0)=0$; кроме того, вдоль всей линии контакта AD вертикальная проекция перемещения $v(x,0)=\mathrm{const}$, т. е. $\partial v(x,0)/\partial x=0$ при $-b<x<-a$ и при $+a<x<+b$; поэтому из второго из уравнений (1.7) и второго из уравнений (1.9) имеем

$$q_2(x,0)=0,\qquad p_2(x,0)=0\qquad (b<|x|<a) \tag{2.2}$$

Вдоль среднего участка линии контакта BC происходит сцепление штампа с упругой полуплоскостью, т. е. $u(x, 0) = 0$, $v(x, 0) = \text{const}$ вдоль BC; дифференцируя эти условия по x, получим на основании (1.9) при $x < a$

$$\beta q_1(x, 0) - p_2(x, 0) = 0, \quad \beta q_2(x, 0) + p_1(x, 0) = 0 \quad \left(\beta = \frac{\mu}{2\mu + \lambda} < 1\right) \tag{2.3}$$

Таким образом определение напряжений под штампом привело к определению двух аналитических функций $w_1(z) = p_1 + iq_1$ и $w_2(z) = p_2 + iq_2$, регулярных в нижней полуплоскости и удовлетворяющих условиям (2.1), (2.2) и (2.3).

3. Для решения указанной задачи используем теорию дифференциальных уравнений класса Фукса[1]. Будем рассматривать $w_1(z)$ и $w_2(z)$ как линейно независимые интегралы некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка. Вопрос сводится к составлению и интегрированию этого уравнения. Чтобы построить это дифференциальное уравнение, заметим, что граничные условия (2.1), (2.2) и (2.3) можно представить в виде

вдоль EA	$\operatorname{Im}(w_1) = 0$	$\operatorname{Im}(w_2) = 0$	(3.1)
вдоль AB	$\operatorname{Im}(iw_1) = 0$	$\operatorname{Im}(w_2) = 0$	(3.2)
вдоль BC	$\operatorname{Im}(\beta w_1 - iw_2) = 0$	$\operatorname{Im}(w_1 + \beta w_2) = 0$	(3.3)
вдоль CD	$\operatorname{Im}(iw_1) = 0$	$\operatorname{Im}(w_2) = 0$	(3.4)
вдоль DE	$\operatorname{Im}(w_1) = 0$	$\operatorname{Im}(w_2) = 0$	(3.5)

Пользуясь этими условиями, можно функции w_1 и w_2 по принципу симметрии продолжить в верхнюю полуплоскость; при этом можно видеть, что точки $-b$, $-a$, $+a$, $+b$ будут особыми точками искомого уравнения, так как при обходе вокруг них интегралы его претерпевают линейную подстановку. Как известно (см., например, [5]), в этом случае можно найти два таких линейно независимых интеграла (каноническая система интегралов), которые в окрестности особой точки могут быть представлены в виде

$$(z - m)^{\alpha_1} \cdot f_1(z - m), \qquad (z - m)^{\alpha_2} f_2(z - m),$$

где m — особая точка, α_1 и α_2 — ее показатели (предполагается, что разность $(\alpha_1 - \alpha_2)$ не равна нулю или целому числу) а функции $f_1(z - m)$ и $f_2(z - m)$ — однозначны в окрестности точки m и, следовательно, их можно в окрестности этой точки представить в виде рядов

$$f_1(z - m) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z - m)^n, \qquad f_2(z - m) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n (z - m)^n$$

Докажем, что эти ряды могут содержать лишь конечное число членов с отрицательными степенями, иначе говоря, докажем, что особые точки будут регулярными особыми точками и, следовательно, уравнение будет уравнением класса Фукса. В самом деле, предположив противное, получим

[1] На возможность применения уравнений класса Фукса к задачам о штампах впервые указал В. М. Абрамов в докладе, сделанном в 1939 г., см. [4].

из (1.9), что по крайней мере одна из проекций перемещения u и v при приближении к особой точке неограниченно возрастает, что невозможно [1].

Перейдем теперь к построению дифференциального уравнения. Для этого рассмотрим поведение его интегралов в окрестности особых точек, т. е. в окрестности точек $-b$, $-a$, $+a$ и $+b$; сопоставляя уравнения (3.1) и (3.2), найдем, что в окрестности и точки $-b$

$$w_1(z) = (z+b)^{\frac{1}{2}+k}[a_0 + a_1(z+b) + \ldots], \qquad w_2(z) = b_0 + b_1(z+b) + \ldots \tag{3.6}$$

где k — целое число.

В окрестности точки $-b$ проекции перемещения u и v ограничены, поэтому, пользуясь (1.9), имеем $\frac{1}{2}+k+1 \geqslant 0$; так как k — целое, то $k \geqslant -1$. Последнее неравенство для дальнейшего запишем в виде

$$k = -1 - n \qquad (n \geqslant 0) \tag{3.7}$$

Чтобы найти каноническую систему интегралов в окрестности точек $-a$ и $+a$, представим (3.2) и (3.4) следующим образом:

$$\operatorname{Im}(i\beta w_1 + w_2) = 0, \qquad \operatorname{Im}(iw_1 + \beta w_2) = 0 \qquad (a < |x| < b) \tag{3.8}$$

Сопоставляя теперь (3.3) и (3.8), найдем, что канонические интегралы в окрестности точки $-a$ имеют вид

$$\begin{gathered} \beta w_1(z) - iw_2(z) = (z+a)^{\frac{1}{2}+l}[a_0 + a_1(z+a) + \ldots] \\ iw_1(z) + \beta w_2(z) = b_0 + b_1(z+a) + \ldots \end{gathered} \tag{3.9}$$

где l — целое число. Аналогично для точки $+a$ будем иметь

$$\begin{gathered} \beta w_1(z) - iw_2(z) = (z-a)^{\frac{1}{2}+m}[c_0 + c_1(z-a) + \ldots] \\ iw_1(z) + \beta w_2(z) = d_0 + d_1(z-a) + \ldots \end{gathered} \tag{3.10}$$

где m — целое число. Потребуем, чтобы компоненты напряжения σ_y и τ_{xy} были непрерывны в точках $-a$ и $+a$, тогда из (1.7) и (1.8) получим

$$\frac{1}{2} + l \geqslant 0, \quad \frac{1}{2} + m \geqslant 0, \qquad \text{или} \qquad l \geqslant 0, \quad m \geqslant 0 \tag{3.11}$$

(так как m и l — целые числа).

Наконец, из (3.4) и (3.5) следует, что в окрестности точки $+b$

$$w_1(z) = (z-b)^{\frac{1}{2}+r}[l_0 + l_1(z-b) + \ldots], \quad w_2(z) = f_0 + f_1(z-b) + \ldots \tag{3.12}$$

где r — целое число, причем аналогично (3.7) легко установить, что

$$r = -1 + s \qquad (s \geqslant 0) \tag{3.13}$$

Изучим теперь поведение функции w_1 и w_2 в окрестности бесконечно удаленной точки. Согласно принципу Сен-Венана действие штампа при $|z| \to \infty$

---

[1] Неограниченное возрастание u и v в окрестности некоторой точки может иметь место, если к этой точке приложена сосредоточенная сила или момент. Однако если сила и момент конечны, то легко показать, что и в этом случае особая точка будет регулярной.

будет эквивалентно действию сосредоточенной силы P, приложенной в начале координат; следовательно, в окрестности бесконечно удаленной точки

$$w_1(z) = \frac{P}{\pi z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots, \qquad w_2(z) = \frac{P}{\pi z} + \frac{B_2}{z^2} + \ldots \tag{3.14}$$

В качестве канонической системы интегралов в окрестности бесконечно удаленной точки возьмем

$$w_1(z) = \frac{P}{\pi z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots \qquad w_1(z) - w_2(z) = \frac{A_2 - B_2}{z^2} + \ldots \tag{3.15}$$

Собирая полученные результаты, для показателей особых точек имеем

$-a$	$-b$	$+b$	$+a$	∞
$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 1$
$\alpha_2 = \frac{1}{2} + l$	$\alpha_2 = -\frac{1}{2} + n$	$\alpha_2 = -\frac{1}{2} + s$	$\alpha_2 = \frac{1}{2} + m$	$\alpha_2 = 2$

Так как сумма показателей всех особых точек согласно соотношению Фукса должна равняться трем, то

$$0 + n - \tfrac{1}{2} + 0 + \tfrac{1}{2} + l + 0 + \tfrac{1}{2} + m + 0 - \tfrac{1}{2} + s + 1 + 2 = 3 \quad \text{или} \quad n + l + m + s = 0$$

Принимая во внимание (3.7), (3.11) и (3.15), найдем, что $l = m = n = s = 0$.

Следовательно, схема Римана для искомого дифференциального уравнения имеет вид

$$W = P \begin{Bmatrix} -b & -a & +a & +b & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & \end{Bmatrix}$$

что, пользуясь свойством символа P, можно представить в виде

$$W = \frac{1}{\sqrt{z^2 - b^2}} \, P \begin{Bmatrix} -b & -a & +a & +b & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{Bmatrix}$$

полагая

$$W = \frac{1}{\sqrt{z^2 - b^2}} \, Y \tag{3.16}$$

Найдем, что $Y(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 Y}{dz^2} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{z+b} + \frac{\frac{1}{2}}{z+a} + \frac{\frac{1}{2}}{z-a} + \frac{\frac{1}{2}}{z-b} \right) \frac{dY}{dz} + \frac{\lambda^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \, Y = 0 \tag{3.17}$$

где λ^2 — вещественный акцессорный параметр, значение которого неизвестно и подлежит определению.

4. Для интегрирования уравнения (2.17) введем новое независимое переменное t:

$$t = \int_{-\infty}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - b^2)}} \tag{4.1}$$

Тогда (3.17) примет вид

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \lambda^2 Y = 0$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание (3.10), получим

$$w_1 = p_1 + iq_2 = \frac{A\cos\lambda t + \beta\sin\lambda t}{\sqrt{z^2-b^2}}, \quad w_2 = p_2 + iq_2 = \frac{C\cos\lambda t + D\sin\lambda t}{\sqrt{z^2-b^2}} \tag{4.2}$$

Определим теперь постоянные интегрирования A, B, C, D и параметр λ так, чтобы выполнялись граничные условия (2.1), (2.2) (2.3). Полагая A, B, C, D вещественными, мы удовлетворим условию (2.1). Чтобы удовлетворить условию (2.2) при $-b < x < +b$, заметим, что в указанном интервале

$$t = \int_{-\infty}^{-b} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-a^2)(\zeta^2-b^2)}} - i\int_{-b}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{(b^2-\zeta^2)(\zeta^2-a^2)}} = J_1 - iJ$$

где для записей в дальнейшем введены очевидные обозначения интегралов J_1 и J. Выражения (4.2) примут вид

$$w_1 = p_1 + iq_1 = \frac{A\cos\lambda(J_1 - iJ) + B\sin\lambda(J_1 - iJ)}{i\sqrt{b^2-z^2}}$$

$$w_2 = p_2 + iq_2 = \frac{C\cos\lambda(J_1 - iJ) + D\sin\lambda(J_1 - iJ)}{i\sqrt{b^2-z^2}}$$

Отделяя действительные и мнимые части и удовлетворяя условию (2.2) при $-b < x < -a$, получим

$$A\sin\lambda J_1 - B\cos\lambda J_1 = 0, \qquad C\cos\lambda J_1 + D\sin\lambda J_1 = 0 \tag{4.3}$$

$$q_1(x, 0) = \sigma_y(x, 0) = -\frac{(A\cos\lambda J_1 + B\sin\lambda J_1)\operatorname{ch}\lambda J}{\sqrt{b^2-x^2}} \tag{4.4}$$

Пользуясь (4.3), можно исключить постоянные B и C из соотношений (4.2) и (4.4) и представить их так:

$$w_1 = p_1 + iq_1 = \frac{A\cos\lambda(J_1 - t)}{\cos\lambda J_1\sqrt{z^2-b^2}}, \quad w_2 = p_2 + iq_2 = -\frac{D\sin\lambda(J_2 - t)}{\cos\lambda J_1\sqrt{z^2-b^2}} \tag{4.5}$$

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{A\operatorname{ch}\lambda J}{\cos\lambda J_1\sqrt{b^2-x^2}} \qquad (-b < x < -a) \tag{4.6}$$

для удовлетворения условий (2.3) примем во внимание, что при $-a < x < +a$

$$t = \int_{-\infty}^{-b} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-a^2)(\zeta^2-b^2)}} - i\int_{-b}^{-a} \frac{d\zeta}{\sqrt{(b^2-\zeta^2)(\zeta^2-a^2)}} - \int_{-a}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{(b^2-\zeta^2)(a^2-\zeta^2)}} =$$

$$= J_1 - iJ_2 - J \tag{4.7}$$

где для дальнейшего введены очевидные обозначения интегралов J_1, J_2 и J.

Подставляя это выражение t в формулы (4.5), будем иметь

$$w_1 = p_1 + iq_1 = \frac{A\cos\lambda(iJ_2 + J)}{i\cos\lambda J_1\sqrt{b^2-z^2}}, \qquad w_2 = p_2 + iq_2 = -\frac{D\sin\lambda(iJ_2 + J)}{i\cos\lambda J_1\sqrt{b^2-z^2}} \tag{4.8}$$

Разделяя здесь действительную и мнимую части и удовлетворяя условиям (2.3), получим

$$\beta\operatorname{ch}\lambda J_2 A - \operatorname{sh}\lambda J_2 D = 0, \qquad \operatorname{sh}\lambda J_2 A - \beta\operatorname{ch}\lambda J_2 D = 0 \tag{4.9}$$

Для того чтобы A и D были отличны от нуля, необходимо и достаточно, чтобы определитель этих уравнений был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \beta \operatorname{ch} \lambda J_2 & -\operatorname{sh} \lambda J_2 \\ \operatorname{sh} \lambda J_2 & -\beta \operatorname{ch} \lambda J_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{th}^2 \lambda J_2 = \beta^2 \tag{4.10}$$

Из (4.9) следует, что $D = \beta \operatorname{cth} \lambda J_2 A$, или на основании (4.00) имеем $D = A$. Из (4.9) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} q_1(x, 0) = \sigma_y(x_1 0) = -\frac{A \operatorname{ch} \lambda J_2 \cos \lambda J}{\cos \lambda J_1 \sqrt{b^2 - x^2}} \\ q_2(x, 0) = \tau_{xy}(x_1 0) = -\frac{A \operatorname{sh} \lambda J_2 \sin \lambda J}{\cos \lambda J_1 \sqrt{b^2 - x^2}} \end{aligned}\right\} \quad (-a < x < +a) \tag{4.11}$$

Компоненты напряжений τ_{xy} и σ_y по условию должны быть непрерывны в точках $-a$ и $+a$, т. е. $\tau_{xy}(\pm a, 0) = 0$. Поэтому второе из равенств (4.11) на основании (4.8) дает

$$\sin\left(\lambda \int_{-a}^{+a} \frac{d\zeta}{\sqrt{(a^2 - \xi^2)(b^2 - \zeta)^2}}\right) = \sin\left(2\lambda \int_{-\infty}^{b} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - b^2)}}\right) = \sin 2\lambda J_1 = 0$$

Отсюда $\lambda J_1 = \pi n / 2$, где n — целое число.

Легко видеть, что, выбирая для n значения, не равные двум, мы получим для τ_{xy} перемену знака в интервалах $-a < x < 0$ и $0 < x < +a$. Естественно, однако, считать, что τ_{xy} внутри интервала $-a < x < +a$ имеет единственный нуль в начале координат, что возможно лишь при $n = 2$. Полагая $n = 2$, получим уравнение

$$\lambda J_1 = \pi \tag{4.12}$$

для определения акцессорного параметра λ. Исключая из (4.12) и (4.10) параметр λ, получим для определения длины $2a$ участка сцепления

$$\operatorname{th}^2 \frac{\pi J_2}{J_1} = \beta^2 \tag{4.13}$$

Отсюда, замечая, что

$$\beta = \frac{\mu}{2\mu + \lambda} = \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}$$

где σ — коэффициент Пауссона, имеем

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \frac{1}{2\pi} \ln (3 - 4\sigma) \tag{4.14}$$

Для вычисления преобразуем интегралы J_1 и J_2 в (4.7), полагая в первом интеграле $\zeta = -b / t$, во втором $\zeta = -at$ и обозначая $a / b = k$, получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = \frac{1}{b} K(k), \\ J_2 &= \frac{1}{b} \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)}} = \frac{1}{b} K'(k) \end{aligned} \tag{4.15}$$

тогда отношение (4.14) дает

$$\frac{K'(k)}{K(k)} = \frac{1}{2\pi} \ln (3 - 4\sigma), \quad \text{откуда} \quad q' = \exp\left(-\frac{\pi K}{K'}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\ln (3 - 4\sigma)}\right)$$

Пользуясь известной формулой из теории эллиптических функций

$$k' = \sqrt{1-k^2} = 4\sqrt{q'}\,\frac{1+q'^2+q'^4+\ldots}{1+2q'^4+2q'^9+\ldots} \tag{4.16}$$

легко можем найти отношение $k = a/b$. Например, для $\sigma = 0.3$ получим $a = 0.997\,b$. При $\sigma = 0.5$, $k = 1$, $a = b$; в этом случае граничные условия на участке сцепления $-a < x < +a$ не будут отличаться от граничных условий на участках скольжений $a < |x| < b$.

Используя (4.14) и (4.12), запишем (4.5) в виде

$$w_1 = p_1 + iq_1 = \frac{A}{\sqrt{z^2-b^2}}\cos\frac{\pi t}{J_1}, \qquad w_2 = p_2 + iq_2 = \frac{A}{\sqrt{z^2-b^2}}\sin\frac{\pi t}{J_1}.$$

Для нахождения постоянной A заметим, что при $|z| \to \infty$ $t \to 0$. Тогда, используя первую из формул (3.14), найдем $A = P/\pi$. Таким образом окончательно будем иметь

$$w_1 = p_1 + iq_1 + \frac{P}{\pi\sqrt{z^2-b^2}}\cos\frac{\pi t}{J_1}, \qquad w_2 = p_2 + iq_2 = \frac{P}{\pi\sqrt{z^2-b^2}}\sin\frac{\pi t}{J_1} \tag{4.17}$$

Для σ_y получим из (4.6) и (4.13)

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi\sqrt{b^2-x^2}}\operatorname{ch}\left(\frac{\pi J}{J_1}\right) \qquad (a < |x| < b),$$

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{b^2-x^2}}\sin\left(\frac{\pi J}{J_1}\right) \qquad (|x| < a) \tag{4.18}$$

Для τ_{xy} из (4.12) имеем

$$\tau_{xy} = \frac{P\beta}{\pi\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{b^2-x^2}}\sin\left(\frac{\pi J}{J_1}\right) \qquad (|x| < a) \tag{4.19}$$

Интересно отметить, что σ_y меняет знак на отрезке $|x| < a$. Можно показать, что это обстоятельство будет иметь место также и в случае, когда на участках скольжения действует кулоново трение.

Поступила в редакцию
11 II 1945

Институт механики
Академии Наук СССР

S. V. FALKOVICH. PRESSURE OF A RIGID PUNCH ON AN ELASTIC SEMI-PLANE WITH RANGES OF SLIDING AND ADHESION ON THE LINE OF CONTACT

A definition is given of the stress set up by a rigid punch pressed to an elastic semi-plane with a given force. The theory of Fouchs type linear differential equatios is employed in solving the problem. Formulae (4.18) and (4.19) are given for the normal and tangential stresses along the contact line.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sadowsky. Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie, ZAMM, 1928, Bd. 8.
2. Мусхелишвили Н. И. Решение основной смешанной задачи теории упругости для полуплоскости. Доклады АН СССР. 1935. Т. III. № 2 [Стр. 51—54].
3. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким штампом. Доклады АН СССР. 1937. Т. XVII. № 4 [Стр. 173—178].
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. Изд. Ан СССР. 1942.
5. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. ОНТИ. 1941.