

ВДАВЛИВАНИЕ ШТАМПА ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ

Л. А. Галин

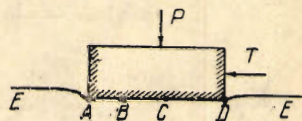
(Москва)

Задача о вдавливании твердого тела, или, как его принято называть, штампа, в упругое тело рассматривалась рядом авторов при различных предположениях о характере соприкосновения. Случай отсутствия сил трения был рассмотрен М. Садовским^[1] и Н. И. Мухелишвили^[2], случай полного сцепления Н. И. Мухелишвили^[3] и В. М. Абрамовым^[4], случай постоянного коэффициента трения — Н. И. Мухелишвили^[5], Н. И. Глаголевым^[6] и автором^[7].

Мы будем рассматривать процесс вдавливания штампа в упругое тело, причем будем считать, что площадка контакта разбивается на три участка, на одном из которых имеет место сцепление, а на других трение.

1. Граничные условия задачи. Если штамп прижимается к упругой полуплоскости силой P (одновременно на него может действовать направленная по оси x сила T , не превышающая некоторого предельного значения и не вызывающая поворота штампа), то на участках проскальзывания AB и CD (фиг. 1.) имеем

$$\begin{aligned} t(x) - \rho p(x) &= 0 & \text{на } AB \\ t(x) + \rho p(x) &= 0 & \text{на } CD \end{aligned}$$



Фиг. 1.

Здесь $t(x)$ и $p(x)$ тангенциальные и нормальные усилия на поверхности, разные знаки перед $\rho p(x)$ указывают, что проскальзывание на AB и CD происходит в противоположных направлениях.

На участке сцепления BC значения тангенциальных напряжений на поверхности контакта недостаточны для того, чтобы вызвать проскальзывание, т. е.

$$\left| \frac{t(x)}{p(x)} \right| < \rho \quad (1.1)$$

Нормальное давление под штампом должно быть всюду положительным, следовательно, $p(x) > 0$ на участках AB , BC и CD . Отсюда вытекает

$$p(x) \neq 0 \quad \text{на } AD \quad (1.2)$$

На свободной поверхности (участки EA и DE) будем иметь

$$p(x) = 0, \quad t(x) = 0$$

Перемещения под штампом будут

$$v(x) = C_2 \quad \text{на } AB, BC, CD; \quad u(x) = C_1 \quad \text{на } BC$$

Таким образом, граничные условия будут следующими:

$$\begin{aligned}
 t(x) = 0, \quad p(x) = 0 & \quad \text{на } EA \quad (-\infty < x < -l) \\
 t(x) - \rho p(x) = 0, \quad v(x) = C_2 & \quad \text{на } AB \quad (-l < x < -a) \\
 u(x) = C_1, \quad v(x) = C_2 & \quad \text{на } BC \quad (-a < x < +a) \\
 t(x) + \rho p(x) = 0, \quad v(x) = C_2 & \quad \text{на } CD \quad (+a < x < +l) \\
 t(x) = 0, \quad p(x) = 0 & \quad \text{на } DE \quad (+l < x < +\infty)
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

При этом на участке BC должно иметь место еще условие (1.1), а на участках AB , BC и CD условие (1.2).

В случае неплоского штампа одно из условий на участке AD будет иметь вид $v(x) = f(x) + C_2$.

2. Определение двух аналитических функций. Перемещения в плоской задаче теории упругости могут быть следующим образом выражены с помощью двух функций φ и ψ комплексной переменной z ^[2]:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \tag{2.1}$$

При этом для полуплоскости

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^{+l} [p(\xi) + it(x)] \lg(\xi - z) d\xi + \text{const} \tag{2.2}$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^{+l} [p(\xi) - it(x)] \lg(\xi - z) d\xi - z\varphi'(z) + \text{const}$$

Подставляя (2.2) в (2.1) и переходя к пределу $z \rightarrow x$, где $-l < x < +l$, получим формулы, связывающие величины перемещений и напряжений на границе полуплоскости

$$\begin{aligned}
 \int_{-l}^{+l} t(\xi) \lg|x - \xi| d\xi + \beta\pi \int_{-l}^x p(\xi) d\xi &= \frac{4\mu}{z-1} (u(x))_{y=0} + \text{const} \\
 \int_{-l}^{+l} p(\xi) \lg|x - \xi| d\xi - \beta\pi \int_{-l}^x t(\xi) p\xi &= \frac{4\mu}{z-1} (v(x))_{y=0} + \text{const}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь

$$\beta = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad \kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu, \quad \beta = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} \tag{2.4}$$

При этом λ и μ — постоянные Ламе, а ν — коэффициент Пуассона. Эти формулы¹ даны Н. И. Мусхелишвили в статье^[3].

Если продифференцировать уравнения (2.3) по x , то $(\partial u(x)/\partial x)_{y=0}$ и $(\partial v(x)/\partial x)_{y=0}$ будут выражены через действительные и мнимые части пре-

¹ Аналогичные выражения могут быть получены для анизотропного упругого тела, занимающего полуплоскость.

дельных значений интегралов типа Коши, плотности которых соответственно $p(\xi)$ и $t(\xi)$. Введем две функции:

$$\omega_1(z) = \int_{-l}^{+l} p(x) \frac{dx}{x-z} = u_1 + iv_1, \quad \omega_2(z) = \int_{-l}^{+l} t(x) \frac{dx}{x-z} = u_2 + iv_2 \quad (2.5)$$

При $y=0$ будем иметь

$$p(x) = v_1, \quad t(x) = v_2, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial x} = u_2 - \beta v_1, \quad \frac{\partial v(x)}{\partial x} = u_1 - \beta v_2 \quad (2.6)$$

Функции $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ должны удовлетворять условиям

$$\omega_1(z) \rightarrow \frac{P}{z}, \quad \omega_2(z) \rightarrow \frac{T}{z} \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

Кроме того, функции $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ должны быть таковы, чтобы их особенности в точках действительной оси были вида

$$(z - \beta)^{-\theta} \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.8)$$

На основании (2.6) граничные условия (1.3) примут вид:

на EA ($-\infty < x < -l$)

$$v_1 = \text{Im } \omega_1 = 0, \quad v_2 = \text{Im } \omega_2 = 0$$

на AB ($-l < x < -a$)

$$v_2 - \rho v_1 = \text{Im}(\omega_2 - \rho \omega_1) = 0, \quad u_1 + \beta v_2 = \text{Im}(i\omega_1 + \beta \omega_2) = 0$$

на BC ($-a < x < +a$)

$$u_2 - \beta v_1 = \text{Im}(i\omega_2 - \beta \omega_1) = 0, \quad u_1 + \beta v_2 = \text{Im}(i\omega_1 + \beta \omega_2) = 0 \quad (2.9)$$

на CD ($+a < x < +l$)

$$v_2 + \rho v_1 = \text{Im}(\omega_2 + \rho \omega_1) = 0, \quad u_1 + \beta v_2 = \text{Im}(i\omega_1 + \beta \omega_2) = 0$$

на DE ($+l < x < +\infty$)

$$v_1 = \text{Im } \omega_1 = 0, \quad v_2 = \text{Im } \omega_2 = 0$$

При этом на участке BC должно иметь место условие $|v_2/v_1| < \rho$, а на участках AB , BC и CD — условие $v_1 \neq 0$.

Рассмотрим первое условие (2.9) на участке EA . Так как граничные значения функций ω_1 и ω_2 действительны, то и их частное будет также действительным. Поэтому получим $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) = 0$.

На участке AB имеем $\text{Im}(\omega_2 - \rho \omega_1) = 0$, откуда $\text{Im} \beta \omega_2 = -\text{Im} \beta \rho \omega_1$. Второе из условий примет вид $\text{Im}[(i + \beta \rho) \omega_1] = 0$. Разделив второе из условий на этом участке на полученное условие, получим

$$\text{Im} \frac{i\omega_1 + \beta \omega_2}{(i + \beta \rho) \omega_1} = \text{Im} \left(\frac{i}{i + \beta \rho} + \frac{\beta}{i + \beta \rho} \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = 0$$

Аналогичное преобразование можно провести и для других участков.

Обозначим для краткости

$$s(z) = \frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)} \quad (2.10)$$

Для функции $s(z)$ будем иметь:

на EA ($-\infty < x < -l$)

$$\operatorname{Im} s(z) = 0$$

на AB ($-l < x < -a$)

$$\operatorname{Im} \left(\frac{i}{i + \beta\rho} + \frac{\beta}{i + \beta\rho} s(z) \right) = 0 \quad (2.11)$$

на BC ($-a < x < +a$)

$$\operatorname{Im} \left(\frac{i + \beta s(z)}{i s(z) - \beta} \right) = 0$$

на CD ($+a < x < +l$)

$$\operatorname{Im} \left(\frac{i}{i - \beta\rho} + \frac{\beta}{i - \beta\rho} s(z) \right) = 0$$

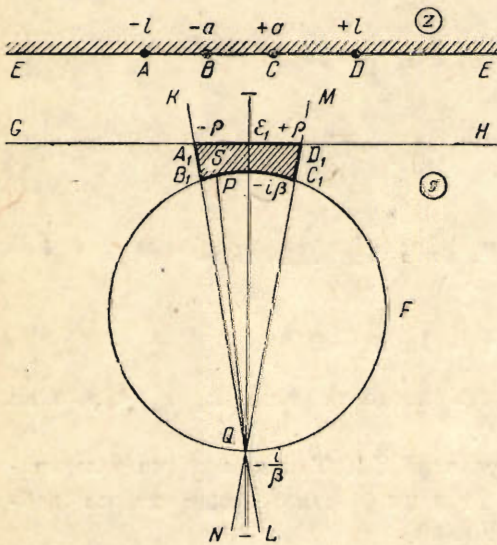
на DE ($+l < x < +\infty$)

$$\operatorname{Im} s(z) = 0$$

Пусть функция $s(z)$ отображает некоторую область S на полуплоскость.

Тогда для каждой линии, являющейся частью контура области S , будем иметь условие вида

$$\operatorname{Im} \left(\frac{a + b s(z)}{c + d s(z)} \right)$$



Фиг. 2.

Это значит, что каждая из таких линий посредством дробно-линейного преобразования переходит в действительную ось, т. е. прямую. Следовательно, эти линии будут дугами окружностей. Таким образом область S ограничена дугами окружностей. Эта область, очевидно, аналогична годографу скоростей в задачах теории фильтрации [8].

Условием на EA и DE соответствует прямая GH (фиг. 2), условием на AB и CD — прямые KL и MN , а условию на BC — окружность F . Покажем теперь, что если за S принять область, заштрихованную на фиг. 2, то будут удовлетворены условия (2.11), а также дополнительные

условия (1.4) (1.2). Таким образом мы удовлетворим условиям (1.3) и тем самым найдем полное решение поставленной задачи.

Установим соответствие между областью S и верхней полуплоскостью.

Точка E_1 , соответствующая E , находится на прямой GH . Так как $[\varphi_2(z)/\varphi_1(z)]_{z \rightarrow \infty} = T/P$, то, принимая во внимание (2.7), найдем, что координата точки E_1

$$E_1 = s(\infty) = \frac{T}{P} \quad (2.12)$$

Отсюда, между прочим, следует, что сдвигающая сила T по абсолютной величине не может быть больше, чем ρP , так как в противном случае точка E_1 уходит за пределы области S . При $|T| > \rho P$ штамп, очевидно, будет сдвигаться и мы получим задачу с другими условиями.

Точка A_1 совпадает с точкой пересечения прямых KL и GH . Так как $w_1(z)$ и $w_2(z)$ согласно (2.5) являются интегралами типа Коши, плотности которых на участке AB пропорциональны вследствие условия $t(x) - \rho p(x) = 0$, то, рассматривая эти функции в окрестности точки A , можно показать, что они будут иметь особенности одного и того же порядка, т. е. соответственно вида $A_1(z-a)^{-\alpha}$ и $A_2(z-a)^{-\alpha}$. Следовательно, функция $s(z)$, равная отношению $w_2(z)$ к $w_1(z)$, будет ограниченной в точке A и поэтому A_1 находится не в бесконечности, а в точке, показанной на фиг. 2. Рассуждая подобным же образом, найдем положение точки D_1 .

Таким образом мы установили полное соответствие между областью S и верхней полуплоскостью (соответствие между точками E_1, A_1, D_1 и точками E, A и D). Неизвестное положение точек B и C при этом определяется.

Рассмотрим теперь дугу, соединяющую точки B_1 и C_1 . На участке BC имеем условие, которому удовлетворяет $s(z)$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{i + \beta s(z)}{-\beta + is(z)} \right) = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{i + \beta s(z)}{-\beta + is(z)} = \operatorname{Re} \left(\frac{i + \beta s(z)}{-\beta + is(z)} \right) \quad (2.13)$$

Допустим, что в точках $x = M$ и $x = N$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{i + \beta s(M)}{-\beta + is(M)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{i + \beta s(N)}{-\beta + is(N)} \right) \quad (2.14)$$

На основании (2.13) имеем

$$\frac{i + \beta s(M)}{-\beta + is(M)} = \frac{i + \beta s(N)}{-\beta + is(N)}$$

В силу однозначности дробно-линейной функции это приводит к условию

$$s(M) = s(N) \quad (2.15)$$

Итак, если выражение (2.13) меняется на участке немонотонно, что влечет за собой условие (2.14), то это приводит к условию (2.15). Однако условие (2.15) является признаком того, что при перемещении по контуру области S от B_1 к C_1 мы пройдем часть дуги круга дважды. В этом случае на дуге, соединяющей точки B_1 и C_1 , будет точка возврата и, следовательно, область будет обладать некоторым разрезом. С другой стороны, монотонность этого выражения влечет за собой отсутствие точек возврата на дуге B_1C_1 .

Положим теперь, что отношение $t(x)/p(x)$ меняется монотонно на участке BC . Тогда в силу граничных условий (1.4)

$$+\rho > \frac{t(x)}{p(x)} > -\rho, \quad \text{или} \quad \left| \frac{t(x)}{p(x)} \right| < \rho \quad (2.16)$$

и, следовательно, условие (1.1) будет выполнено.

Согласно (2.10) имеем

$$\frac{i + \beta s(z)}{-\beta + i s(z)} = \frac{i\omega_1 + \beta\omega_2}{-\beta\omega_1 + i\omega_2}$$

Принимая во внимание, что на участке BC

$$\operatorname{Im}(-\beta\omega_1 + i\omega_2) = 0, \quad \operatorname{Im}(i\omega_1 + \beta\omega_2) = 0$$

найдем

$$\frac{i + \beta s(z)}{\beta + i s(z)} = \frac{\operatorname{Re}(i\omega_1 + \beta\omega_2)}{\operatorname{Re}(-\beta\omega_1 + i\omega_2)} = \frac{v_1 + \beta u_2}{v_2 - \beta u_1} \quad (2.17)$$

Но из (2.9) следует, что $u_2 - \beta v_1 = 0$ и $u_1 + \beta v_2 = 0$ на участке BC . Поэтому $u_1 = -\beta v_2$ и $u_2 = \beta v_1$. Следовательно,

$$\frac{v_1 + \beta u_2}{v_2 - \beta u_1} = \frac{v_1 + \beta^2 v_1}{v_2 + \beta^2 v_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{p(x)}{t(x)}$$

Подставляя это условие в (2.17), получим на участке BC

$$\frac{i + \beta s(z)}{-\beta + i s(z)} = \operatorname{Re} \frac{i + \beta s(z)}{-\beta + i s(z)} = \frac{p(x)}{t(x)} \quad (2.18)$$

Монотонность $t(x)/p(x)$ влечет за собой монотонность $p(x)/t(x)$ и, следовательно, выражения (2.13), а это последнее свойство приводит к тому, что точки B_1 и C_1 должны соединяться дугой без точек возврата. Должна быть принята именно дуга, показанная на фиг. 2, а не другая, дополняющая эту последнюю по окружности. Только в этом случае в результате уменьшения ρ до 0 область S , непрерывно изменяясь, превращается в линию и функция $s(z)$ будет равна нулю почти всюду (см. ниже). В результате этого в пределе будет получено известное решение М. Садовского^[1] для вдавливания штампа с плоским основанием без сил трения.

Итак, вид дуги, ограничивающей область S на участке B_1C_1 , влечет за собой выполнение условия (1.1).

Воспользуемся одним из условий (2.9), общим для участков AB , BC и CD :

$$u_1 + \beta v_2 = \operatorname{Im}(i\omega_1 + \beta\omega_2) = 0 \quad (2.19)$$

Но согласно (2.11) имеем $\omega_2(z) = s(z)\omega_1(z)$; поэтому из (2.19) получим:

$$\operatorname{Im}[(i + \beta s(z))\omega_1] = 0 \quad \text{на } AD, \quad \operatorname{Im}\omega_1 = 0 \quad \text{на } EA \text{ и } DE \quad (2.20)$$

Таким образом для определения $\omega_1(z)$ получаем частный случай задачи Гильберта. Функция $\omega_1(z)$ может быть определена по известным формулам (см. по этому поводу^[9] и^[7]). Выражение для $\omega_1(z)$ в случае, когда будут удовлетворены условия (2.7) и (2.8), имеет вид

$$\omega_1(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \operatorname{lg} \left[\frac{i + \beta s(x)}{-i + \beta s(x)} \right] \frac{dx}{x-z} \right\} \frac{P(z)}{(z-l)(z+l)} \quad (2.21)$$

Если функция $s(z)$ будет известна, то входящий в это выражение полином первой степени $P(z)$, нуль которого находится в точке $z = +l$ или в точке $z = -l$, может быть определен таким образом, чтобы были удовлетворены условия (2.7) и (2.8).

Функция $\omega_1(z)$, удовлетворяющая условиям (2.7), (2.8), может быть построена также для случая, когда на поверхности упругого тела в точке $x = b$ приложены сосредоточенные нормальные и тангенциальные силы, связанные некоторым соотношением. В этом случае множитель в правой части выражения (2.21) будет $C / (z - b)$.

Будем иметь также

$$\omega_2(z) = s(z) \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \operatorname{Im} \left[\frac{i + \beta s(z)}{-i + \beta \bar{s}(z)} \right] \frac{dx}{x - z} \right\} \frac{P(z)}{(z-l)(z+l)} \quad (2.22)$$

Нормальное давление и тангенциальные усилия определяются формулами.

$$p(x) = (\operatorname{Im} \omega_1(z))_{z=x+i0} \quad t(x) = (\operatorname{Im} \omega_2(z))_{z=x+i0} \quad (2.23)$$

Покажем, что если удовлетворено условие (2.20), то тем самым удовлетворяются условия (2.9). Рассмотрим, например, участок BC . Если имеет место $\operatorname{Im} \{ [i + \beta s(z)] \omega_1(z) \} = 0$, то на основании (2.10) $i\omega_1(z) + \beta\omega_2(z)$ на этом участке действительной оси действительно.

Но из определения функции $s(z)$ следует, что на участке BC должно выполняться условие (2.11)

$$\operatorname{Im} \left(\frac{i + \beta s(z)}{is(z) - \beta} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{i\omega_1(z) + \beta\omega_2(z)}{i\omega_2(z) - \beta\omega_1(z)} \right) = 0$$

Таким образом на BC

$$\frac{i\omega_1(z) + \beta\omega_2(z)}{i\omega_2(z) - \beta\omega_1(z)}$$

имеет действительное значение. Выше было показано, что в этом выражении действительным будет числитель. Раз это так, то действительным будет также знаменатель. Поэтому имеем на BC

$$\operatorname{Im} (i\omega_2(z) - \beta\omega_1(z)) = 0 \quad (2.24)$$

Таким образом удовлетворены оба условия (2.9) на BC . Рассуждая подобным же образом, можно показать, что условия (2.9) будут выполнены на всех участках действительной оси.

Покажем теперь, что при выборе области S , который был сделан выше, давление $p(x)$ на участке AD нигде не будет обращаться в нуль, т. е. будет выполнено условие (1.2).

Необходимо рассмотреть два случая: во-первых, когда $\omega_1(z) = 0$ в какой-нибудь точке отрезка AD и, следовательно, $p(x) = \operatorname{Im} [\omega_1(x + i0)] = 0$; во-вторых, когда $\omega_1(z)$ на участке AD нулю не равно, обращается в нуль лишь $p(x) = \operatorname{Im} [\omega_1(x + i0)]$. Первый случай будет, если $|\omega_1(z)| = 0$, второй, когда $\arg \omega_1(x + i0) = k\pi$, где k — целое число.

Заметим прежде всего, что величина $i + \beta s(z)$ будет комплексным числом; так как β действительная константа, то (фиг. 2)

$$\arg (P - Q) = \arg \left[s(z) - \left(-\frac{i}{\beta} \right) \right] = \arg \left\{ \frac{1}{\beta} [i + \beta s(z)] \right\} = \arg [i + \beta s(z)]$$

Из фиг. 2 видно, что величина $i + \beta s(z)$ меняется на участке AD непрерывно, не обращаясь нигде в нуль.

Покажем теперь, что невозможен первый случай $|\omega_1(z)| = 0$. Из (2.21) следует, что для этого необходимо, чтобы на участке AD интеграл

$$\int_{-i}^{+i} \lg \left[\frac{i + \beta s(z)}{-i + \beta s(z)} \right] \frac{dx}{x-z} \quad (2.25)$$

был в некоторой точке не ограниченным. Так как плотность этого интеграла типа Коши повсюду ограничена, то интеграл будет принимать бесконечно большие значения только в тех точках, где $\lg \{[i + \beta s(z)] / [-i + \beta s(z)]\}$ будет иметь разрывы. Однако согласно установленному выше, $i + \beta s(z)$ и, следовательно, также сопряженная величина, изменяясь непрерывно, нигде не обращаются в нуль. Поэтому $\lg \{[i + \beta s(x)] / [-i + \beta s(x)]\}$ будет непрерывным и интеграл (2.25) является повсюду ограниченным. Из (2.21) следует, что в таком случае $\omega_1(z)$ нигде не будет обращаться в нуль и поэтому на AD не может иметь места $|\omega_1(z)| = 0$.

Перейдем к рассмотрению второго случая. Из фиг. 2 видно, что на AD

$$\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{\beta \rho} < \arg(P - Q) = \arg(i + \beta s(z)) < \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{1}{\beta \rho}$$

Так как постоянные β и ρ конечны и положительны, то $\arctg 1/\beta \rho < \pi/2$ и поэтому на AD

$$0 < \arg[i + \beta s(z)] < \pi \quad (2.26)$$

Допустим на этом участке $\text{Im } \omega_1(z) = 0$. Это будет иметь место, если $\arg \omega_1(z) = k\pi$, где k —целое число. Но из условия

$$\text{Im} [(i + \beta s(z)) \omega_1(z)] = 0 \quad \text{на } AD$$

следует, что

$$\arg(i + \beta s(z)) + \arg \omega_1(z) = k_1\pi, \quad \arg(i + \beta s(z)) = k_2\pi,$$

где k_1 и k_2 —целые числа. Однако из (2.26) следует, что это не будет иметь места; таким образом мы доказали, что $\text{Im } \omega_1(z) \neq 0$ на AD .

Итак мы построили функции $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$, которые удовлетворяют всем условиям (2.9) и, следовательно, также условиям (1.3). При этом качественный анализ решения оказалось возможным произвести, не зная точно выражения для $s(z)$. Перейдем теперь к определению этой функции.

3. Определение функции $s(z)$. Для построения $s(z)$ необходимо найти функцию, отображающую четырехугольник S , ограниченный дугами окружностей на полуплоскость. Покажем, что углы при вершинах этого четырехугольника будут равны между собой.

Из фиг. 2 имеем $\alpha = \angle BA_1E_1 = \frac{1}{2}\pi - \angle BQH$. С другой стороны,

$$\angle A_1B_1M + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\angle QB_1H = \frac{1}{2}\angle A_1B_1M + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\angle BQH = \pi$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{1}{2}\angle A_1B_1M = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\angle B_1QH = \frac{1}{2}\angle B_1A_1E_1$$

Таким образом доказывается, что все углы четырехугольника S равны между собой. Как известно, нахождение функции, отображающей такую область на полуплоскость, приводится к отысканию интегралов дифференциального уравнения класса Фукса^[10]

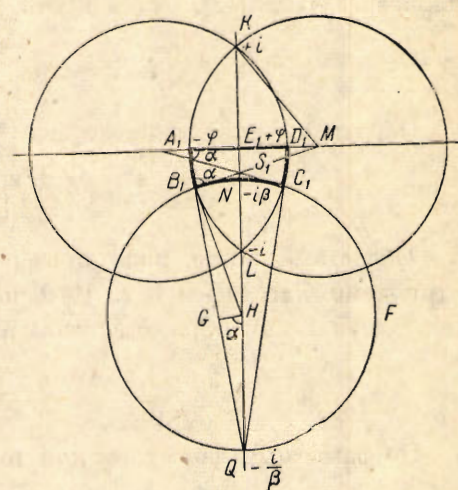
$$s'' + \left(\frac{1-\alpha/\pi}{z} + \frac{1-\alpha/\pi}{z-1} + \frac{1-\alpha/\pi}{z-a} \right) s' + \frac{(1-\alpha/\pi)(1-2\alpha/\pi)(z-\lambda)}{z(z-1)(z-a)} s = 0 \quad (3.1)$$

Трудности данной задачи, как известно, заключаются в определении параметров a и λ . Только при $\rho=0$ и, следовательно, $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ мы получим частный случай дифференциального уравнения Ламе, причем задача при этом становится элементарной.

Однако этот случай не представляет интереса для исследования контактных задач, так как при $\rho=0$ единственным возможным решением будет решение М. Садовского^[1], и область S при этом вырождается в линию.

Мы применим здесь приближенное конформное отображение области S , причем на основании некоторых оценок, как будет показано ниже, точность при этом получается вполне удовлетворительной.

Проведем через точки A_1, B_1 и через точки D_1, C_1 окружности, ортогональные к окружности F и прямой A_1D_1 (фиг. 3). Дугами этих окружностей A_1B_1 и D_1C_1 , дугой B_1C_1 и прямой A_1M_1 ограничена область S_1 , геометрически весьма близкая к S при всех значениях ρ и β , с которыми приходится иметь дело в реальных условиях. (В этом легко убедиться из фиг. 3, где области S и S_1 построены для случая $\rho=0.6$ и $\beta=0.286$, т. е. коэффициенты Пуассона $\nu=0.3$.)



Фиг. 3.

Найдем функцию, отображающую область S_1 , на полуплоскость. При этом точкам A_1, E_1 и D_1 мы будем приводить в соответствие точки A, E и D действительной оси. Рассмотрим вначале случай, когда сдвигающая сила T отсутствует и, следовательно, $E_1=0$.

Путем элементарных, но довольно длинных вычислений устанавливается, что координаты точек K и L равны соответственно $+i$ и $-i$.

Если посредством дробно-линейного преобразования перевести точку K в бесконечность, E в $+i$ и L в 0 , то область S_1 перейдет в четырехугольник, ограниченный двумя concentрическими окружностями и двумя радиусами. Этот последний отображается на прямоугольник, который в свою очередь отображается на верхнюю полуплоскость.

Таким образом имеем ряд зависимостей

$$\xi = \frac{s_1 + i}{is_1 + 1}, \quad \zeta = \lg \xi, \quad \eta = i\zeta + \frac{1}{2}\pi + i \lg x$$

$$F(z_1, k) = \frac{K'}{\lg z} \eta, \quad z_1 = \frac{z}{ik} \quad \left(x = \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \quad (3.2)$$

Здесь $F(z_1, k)$ — эллиптический интеграл 1-го рода:

$$F(z_1, k) = \int_0^{z_1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (3.3)$$

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \quad (k' = \sqrt{1-k^2})$$

На основании соотношений (3.2) получим выражение для $s_1(z)$, причем, полагая $s(z) \approx s_1(z)$, будем иметь

$$s(z) \approx \frac{i+\xi}{i\xi-1}, \quad \xi = \exp \left\{ -\frac{i}{K'} \lg z F \left(\frac{z}{lk_1}, k \right) - \lg z \right\} \quad (3.4)$$

Обратная функция имеет вид

$$z(s) \approx lk \operatorname{sn} \left\{ \frac{K'}{\lg z} \left[\lg \frac{s+i}{is+1} + \frac{1}{2} \pi \right] + i \lg z \right\} \quad (3.5)$$

Область S_1 после ряда преобразований переходит в прямоугольник со сторонами $4 \operatorname{arctg} \rho$ и $\lg z$. На основании этого определяется модуль k . Он находится таким образом, чтобы имело место равенство

$$\frac{K}{K'} = \frac{2 \operatorname{arctg} \rho}{\lg z} \quad (3.6)$$

По известным формулам для тета-функций^[11] имеем

$$K' = K \frac{1}{\pi} \lg \left(\frac{1}{q} \right) \\ k = \frac{\vartheta_3^2(0, q)}{\vartheta_3^2(0, q)} = \frac{(2q^4 + 2q^8 + 2q^{12} + \dots)^2}{(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)^2}$$

На основании этого получим

$$k = \frac{\vartheta_3^2(0, q)}{\vartheta_3^2(0, q)}, \quad \text{где } q = \exp \left\{ -\frac{\pi \lg z}{\operatorname{arctg} \rho} \right\} \quad (3.7)$$

Эллиптический интеграл (3.3) переводит прямоугольник в верхнюю полуплоскость, причем положение точек C^*_1 и D^*_1 , соответствующих точкам C_1 и D_1 области S_1 , будет $C^*_1 = 1$, $D^*_1 = 1/k$. Последнее из преобразований состоит в умножении на постоянную k , поэтому

$$\frac{C^*_1}{D^*_1} = k \approx \frac{C}{D} = \frac{a}{l} \quad (3.8)$$

Таким образом определено искомое отношение длины площадки сцепления ко всей линии контакта.

Приведем значения отношения a/l при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$ и различных значениях коэффициента трения ρ

$\rho = 0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\frac{a}{l} = 0.0000$	0.0369	0.366	0.695	0.868	0.942	0.974	0.989	0.993	0.996	0.997

На фиг. 4 эта зависимость изображена графически.

Постараемся получить представление о точности примененного конформного отображения. Функция $s_1(z)$ отображает область S на область S_2 , представляющую полуплоскость, из которой вырезаны две, вообще говоря, весьма неглубокие лунки. В частности, при $\rho=0.6$, $\nu=0.3$ и $l=1.000$ концы этих лунок будут соответственно в точках

$$x = -1.000, \quad x = -0.974 \quad \text{и} \quad x = 1.000, \quad x = 0.974$$

Максимальная глубина этих лунок равна 0.0010.

Если обозначить функцию, отображающую область S_2 на полуплоскость, через $s_2(z)$, то

$$s(z) = s_1(s_2(z))$$

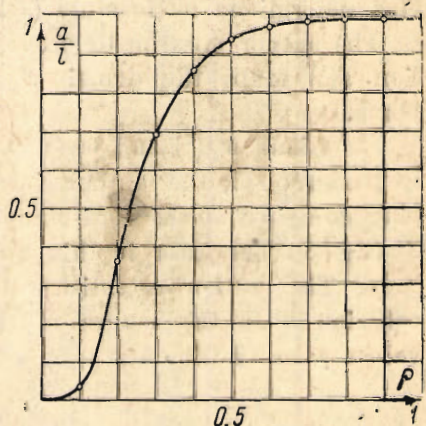
Для таких областей, весьма близких к полуплоскости, функция $s_2(z)$ может быть определена с достаточной степенью точности. Вычисления, на деталях которых мы не будем здесь останавливаться, позволяют уточнить значение a/l , определенное для данного случая, и найти его с точностью до третьего знака. Это значение будет 0.973. Таким образом приближенное конформное отображение дает, очевидно, вполне достаточную точность.

Рассмотрим теперь два предельных случая, когда $\rho=0$ и когда коэффициент Пуассона $\nu=0.5$ и, следовательно, $\beta=0$. Как видно из фиг. 2, в этих случаях область S превращается в линию. Пользуясь внутренней теоремой площадей, легко показать, что при этом $s'(z)=0$, а $s(z)=C$ почти всюду, причем C должна быть принята равной нулю.

Но если это так, то $\omega_2(z) = \omega_1(z)s(z)$ будет равно нулю почти всюду. Следовательно, в обоих этих случаях тангенциальные усилия на поверхности будут отсутствовать почти везде.

Остановимся в заключении на случае, когда сдвигающая сила $T \neq 0$. При этом в соответствие точке T/P плоскости s приводится бесконечно удаленная точка E плоскости z ; соответствие других точек остается прежним. Определим функцию $s^*(z)$ в этом случае. Функция $s(z)$ переводит точку $E_1 = T/P$ на контуре области S в точку $z^* = z(T/P)$ на действительной оси. (Приближенное выражение для функции $z(s)$, обратной $s(z)$, дано формулой (3.5)). Дробно-линейная функция, отображающая полуплоскость самоё на себя, переводит E_1 в бесконечно удаленную точку. Поэтому окончательное выражение для $s^*(z)$ будет таким:

$$s^*(z) = s \left[\frac{z^*z + l^2}{z + z^*} \right] \quad (3.9)$$



Фиг. 4.

L. A. GALIN. PRESSURE OF A PUNCH WITH FRICTION AND COHESION DOMAINS

The paper investigates the problem of the pressure of a punch with a plane base on an elastic medium occupying the semi-plane. Between the two bodies friction is assumed according to the law of Coulomb, while in the range of the contact BC , where the tangential stresses are insufficient for slipping, cohesion is assumed to be set up (fig. 1).

The boundary conditions of the problem are given by the expression (1.3), where $p(x)$ and $t(x)$ are the normal and tangential stresses acting on the contact line, $u(x)$ and $v(x)$ are displacements, ρ is the coefficient of friction, β is a constant, dependent on the Poisson coefficient ν and determined by formula (2.3).

The author introduces two functions, $w_1(z)$ and $w_2(z)$, determined by the expression (2.5). These functions are assumed to be regular on the upper part of the semi-plane. In accordance with (2.3) and (2.6), the conditions along the real axis are of the form (2.9). The author then introduces the function $s(z)$, determined by formula (2.10).

The author goes on to prove that conditions (1.3) will be satisfied if function $s(z)$ maps the domain S (cross-hatched in fig. 2) on the upper semi-plane.

Functions $w_1(z)$ and $w_2(z)$ are determined by formulae (2.24) and (2.22). In paragraph 3, the author introduces a function (3.4), approximately mapping domain S on the semi-plane; the domain being substituted by the domain S' (fig. 3). The error in this approximation is shown to be of small magnitude. The author establishes that the ratio of the length of the range of cohesion a to the length of the entire range of contact l depends upon the values ρ and β (fig. 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sadowsky M. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 1928. 8.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. 1935.
3. Мухелишвили Н. И. ДАН. 1935. III.
4. Абрамов В. М. ДАН. 1937. XVII.
5. Мухелишвили Н. И. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР. 1942. Т. III. № 5.
6. Глаголев Н. И. ДАН. 1942. XXXVII.
7. Галин Л. А. ДАН. 1943. XXXIX.
8. Христианович С. А., Михлин С. Г. и Девисон Б. Б. Некоторые новые задачи механики сплошной среды.
9. Demtchenko В. Problèmes mixtes harmoniques en hydrodynamique des fluides parfaits. 1933.
10. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 1941.
11. Уиттекер Е. и Ватсон Г. Курс современного анализа. часть II. 1934.
12. Фромт. Н. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 1927. 7.