Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

И. Н. Векуа

(Тбилиси)

§ 1. Введение

В работе [1] А. Л. Гольденвейзер доказал, что общее напряженное состояние тонкой сферической оболочки можно представить как сумму так называемых безмоментного, моментного и смешанного напряженных состояний. Усилия, моменты и смещения, соответствующие безмоментному и моментному состояниям, выражаются в явном виде при помощи решений уравнения

$$\triangle U=0, \qquad \triangle \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{1.1}$$

Здесь оператор Лапласа $\triangle$ на сфере выражен в географических координатах. Что же касается усилий, моментов и смещений, соответствующих смешанному напряженному состоянию, то они выражаются также в явном виде при помощи решений уравнения

$$\triangle U+(1+ik)U=0, \qquad \text{где} \quad k^2=\left(1+\frac{3R^2}{h^2}\right)(1-\sigma^2)-1 \tag{1.2}$$

Здесь в выражение постоянной k входят радиус сферы R, толщина оболочки $2h$ и коэффициент Пуассона σ.

В переменных [1]

$$x=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \qquad y=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi \tag{1.3}$$

оператор Лапласа на сфере имеет вид

$$\triangle\equiv\frac{(1+x^2+y^2)^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1.4}$$

Поэтому всякое вообще комплексное решение уравнения Лапласа (1.1) имеет вид

$$U=F(z)+\overline{\Phi(z)} \tag{1.5}$$

где F и Φ — произвольные аналитические функции комплексной переменной $z=x+iy$, причем черта над комплексным выражением указывает на то, что берется сопряженное с ним выражение. Очевидно,

$$z=x+iy=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}, \qquad \bar{z}=x-iy=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \tag{1.6}$$

Используя формулу (1.5), в упомянутой выше работе [1] А. Л. Гольденвейзер выражает в явном виде усилия, моменты и смещения, соответствующие без-

[1] Это преобразование представляет собой стереографическую проекцию с южного полюса ($\theta=\pi$) поверхности единичной сферы на экваториальную плоскость ($\theta=\frac{1}{2}\pi$).

моментному и моментным напряженным состояниям, при помощи двух произвольных аналитических функций одной комплексной переменной.

В случае смешанного напряженного состояния в работе [1] не даны аналогичные общие выражения для усилий, моментов и смещений; автор в этом случае довольствуется лишь построением системы частных решений уравнения (1.2) методом Фурье. Это объясняется тем, что до сих пор не имелось формулы, выражающей подобно (1.5) все решения уравнения (1.2) при помощи аналитических функций одной комплексной переменной. Недавно мне удалось получить формулу [2], выражающую все решения уравнения (1.2) или, что все равно, уравнения

$$\triangle U + n(n+1)U = 0 \tag{1.7}$$

где n — комплексная постоянная. Используя эту формулу, мы даем ниже явное выражение для усилий, моментов и смещений при помощи аналитических функций одной комплексной переменной и в случае смешанного напряженного состояния. Таким образом, полная система решений уравнений тонкой сферической оболочки выражается при помощи четырех произвольных аналитических функций одной комплексной переменной¹.

Эти результаты могут быть использованы также в теории толстых сферических оболочек, предложенной В. З. Власовым [3].

Ниже (§ 2) дается вывод общего представления решений уравнения (1.7) и, кроме того, рассматривается ряд непосредственных следствий из него. В § 3 выводятся формулы, установленные А. Л. Гольденвейзером [1] несколько иным путем, выражающие усилия, моменты и смещения при помощи решений уравнений (1.1) и (1.2), а затем при помощи результатов § 2 усилия, моменты и смещения тонкой сферической оболочки выражаются через четыре аналитические функции одной комплексной переменной.

§ 2. Общее представление решений уравнения (1.7)

1°. Введем дифференциальные операции

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar z} \tag{2.1}$$

Тогда оператор Лапласа на сфере, в силу (1.4), примет вид

$$\triangle \equiv (1+z\bar z)^2\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar z}$$

Поэтому уравнение (1.7) мы можем записать так:

$$(1+z\bar z)^2\,\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial \bar z} + n(n+1)U = 0 \tag{2.2}$$

Рассмотрим на единичной сфере две точки (θ, φ) и (θ_0, φ_0); пусть γ — дуговое расстояние между ними. Тогда

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)$$

¹ Этим фактом подтверждается между прочим правильность гипотезы Кирхгоффа, утверждающей, как известно, что полная система граничных условий тонких оболочек должна содержать четыре независимых условия, а не пять, как думал Пуассон, ибо при помощи выражений, содержащих четыре аналитические функции, нельзя удовлетворить, вообще говоря, пяти независимым граничным условиям.

Легко видеть, что уравнению (1.7) удовлетворяет функция $P_n(\cos\gamma)$, где P_n — функция Лежандра первого рода[1]. Это проверяется путем непосредственной подстановки, если иметь в виду, что функция $P_n(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Лежандра

$$(1-z^2)P_n''(z)-2zP_n'(z)+n(n+1)P_n(z)=0 \tag{2.3}$$

Пусть

$$t=\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\exp(i\varphi_0), \qquad \bar{t}=\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\exp(-i\varphi_0) \tag{2.4}$$

Тогда в силу (1.6) и (2.4) нетрудно найти, что

$$\cos\gamma\equiv\omega=\frac{(1-z\bar{z})(1-t\bar{t})+2z\bar{t}+2\bar{z}t}{(1+z\bar{z})(1+t\bar{t})} \tag{2.5}$$

Так как $P_n(\cos\gamma)$ есть решение уравнения (1.7), то следует ожидать, что функция

$$P_n(\omega)\equiv P_n\left(\frac{(1-z\bar{z})(1-t\bar{t})+2z\bar{t}+2\bar{z}t}{(1+z\bar{z})(1+t\bar{t})}\right) \tag{2.6}$$

будет удовлетворять уравнению (2.2). И действительно, мы докажем, что выражение (2.6) представляет собой решение уравнения (2.2) относительно переменных z и z при любых, не обязательно взаимно сопряженных t и $\bar{t}$.

2°. Путем несложных выкладок из (2.7) получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{2(\bar{t}-\bar{z})(1+\bar{z}t)}{(1+z\bar{z})^2(1+t\bar{t})}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}=\frac{2(t-z)(1+z\bar{t})}{(1+z\bar{z})^2(1+t\bar{t})}$$
$$\frac{\partial^2\omega}{\partial z\,\partial\bar{z}}=-\frac{2\omega}{(1+zz)^2}, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}=\frac{1-\omega^2}{(1+z\bar{z})^2} \tag{2.7}$$

На основании этих формул и в силу (2.3) будем иметь

$$\triangle P_n(\omega)+n(n+1)P_n(\omega)=\frac{d}{d\omega}\left[(1-\omega^2)\frac{dP_n(\omega)}{d\omega}\right]+n(n+1)P_n(\omega)=0$$

что и доказывает наше утверждение.

Полагая теперь в (2.6) $\bar{t}=0$, получим функцию

$$P_n\left(\frac{1-z\bar{z}+2\bar{z}t}{1+z\bar{z}}\right) \tag{2.8}$$

которая, согласно доказанному, будет решением уравнения (2.2) при любом t.

3°. Рассмотрим теперь какую-нибудь функцию $\Phi(z)$, аналитическую в некоторой области D плоскости z, содержащей начало координат, и докажем, что выражение

$$U_1=\int_0^z\Phi(t)P_n\left(\frac{1-zz+2\bar{z}t}{1+z\bar{z}}\right)dt \tag{2.9}$$

является решением уравнения (2.2) в области D.

---

[1] О функциях Лежандра см., например, книгу Уиттекер и Ватсона [4].

Этот интеграл берется вдоль любой кривой C, лежащей в D и соединяющей начало координат с точкой z. Когда точка t описывает кривую C, комплексная переменная $\omega=(1-z\bar{z}+2\bar{z}t)(1+z\bar{z})^{-1}$ опишет некоторую кривую C', соединяющую точки $\omega=\cos\theta$ и $\omega=1$. Очевидно, вообще, кривая C' может несколько раз пересечь отрицательную часть вещественной оси в точках[1], лежащих влево от точки $\omega=-1$. В случае целого n это обстоятельство не имеет никакого значения, ибо тогда P_n — полином, но в случае значения n, отличного от целого, необходимо рассматривать значения переменной ω на римановой поверхности функции P_n, представляющей собой, как известно, бесконечнолистную поверхность наложения с единственной точкой разветвления $\omega=-1$. Следовательно, кривая C' будет лежать на указанной римановой поверхности и соединять точки $\omega=\cos\theta$, $\omega=1$, которые находятся на одном и том же (начальном) листе этой поверхности.

Так как $P_n(1)=1$, из (2.9) имеем

$$\frac{\partial U_1}{\partial z}=\Phi(z)+\int_0^z \Phi(t)\frac{\partial}{\partial z}P_n\left(\frac{1-z\bar{z}+2\bar{z}t}{1+z\bar{z}}\right)dt \tag{2.10}$$

Отсюда сразу получим, что

$$(1+z\bar{z})^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial z\,\partial\bar{z}}+n(n+1)U_1=$$

$$=\int_0^z \Phi(t)\left[(1+z\bar{z})^2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}+n(n+1)\right]P_n\left(\frac{1-z\bar{z}+2\bar{z}t}{1+z\bar{z}}\right)dt=0$$

так как выражение (2.8) для любого t является решением уравнения (2.2).

Совершенно аналогично доказывается, что выражение

$$U_2=\int_0^{\bar{z}} \overline{\Psi(t)}\,P_n\left(\frac{1-z\bar{z}+2z\bar{t}}{1+z\bar{z}}\right)d\bar{t} \tag{2.11}$$

где $\Psi(z)$ — любая аналитическая функция в области D, являются решением уравнения (2.2) в этой области. Замечая также, что функция

$$P_n\left(\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)=P_n(\cos\theta)$$

которая получается из (2.8) при $t=0$, является решением уравнения (2.2), приходим к заключению, что выражение

$$U(z,\bar{z})=a_0P_n\left(\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)+\int_0^z \Phi(t)P_n\left(\frac{1-z\bar{z}+2\bar{z}t}{1+z\bar{z}}\right)dt+$$

$$+\int_0^{\bar{z}} \overline{\Psi(t)}\,P_n\left(\frac{1-z\bar{z}+2z\bar{t}}{1+z\bar{z}}\right)d\bar{t} \tag{2.12}$$

где a_0 — любая вообще комплексная постоянная, $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — любые аналитические функции в области D, представляет собой решение уравнения (2.2) в этой области.

[1] Мы будем предполагать, что кривая C' не проходит через точку $\omega=-1$; этого, очевидно, всегда можно добиться путем соответствующего выбора кривой C.

Если Φ и Ψ голоморфны в окрестности точки $z=0$, то выражение (2.12), как легко видеть, представляет собой регулярное решение[1] уравнения (2.2) в указанной окрестности. Более того, это выражение, очевидно, является аналитической функцией двух комплексных переменных z и $\bar{z}$ в окрестности точки $z=0$, $\bar{z}=0$. Обозначая эту функцию через $U(z, \bar{z})$, из (2.12) получим

$$a_0 = U(0,0), \qquad \int_0^z \Phi(t)\,dt = U(z,0) - U(0,0), \qquad \int_0^{\bar{z}} \overline{\Psi(t)}\,d\bar{t} = U(0,\bar{z}) - U(0,0) \tag{2.13}$$

т. е. постоянная a_0 и функция Φ и Ψ однозначно определяются при помощи функции U в окрестности начала.

4°. Рассмотрим теперь какое-нибудь решение U^* уравнения (2.9), регулярное в окрестности начала координат. Так как уравнение (2.2) — эллиптического типа и его коэффициенты — аналитические функции, то, согласно теореме Пикара[2], U^* будет аналитической функцией в окрестности начала. Поэтому $U^*(z, \bar{z})$ в окрестности точки $z=0$, $\bar{z}=0$ будет аналитической функцией двух комплексных переменных z и $\bar{z}$. Положим

$$a_0^* = U^*(0,0), \qquad \int_0^z \Phi^*(t)\,dt = U^*(z,0) - U^*(0,0),$$
$$\int_0^{\bar{z}} \overline{\Psi^*(t)}\,d\bar{t} = U^*(0,z) - U^*(0,0) \tag{2.14}$$

Ясно, что функции Φ^* и Ψ^* будут голоморфными в окрестности точки $z=0$. Рассмотрим теперь решение уравнения (2.2), определенное формулой

$$V^*(z,\bar{z}) = a^* P_n\left(\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) + \int_0^z \Phi^*(t)\,P_n\left(\frac{1-z\bar{z}+2\bar{z}t}{1+z\bar{z}}\right)dt +$$
$$+ \int_0^{\bar{z}} \overline{\Psi^*(t)}\,P_n\left(\frac{1-z\bar{z}+2z\bar{t}}{1+z\bar{z}}\right)d\bar{t} \tag{2.15}$$

Докажем, что U^* и V^* совпадают. Этим мы докажем, что любое регулярное в окрестности начала решение уравнения (2.2) может быть представлено в виде (2.12).

Согласно (2.14) и (2.15), в окрестности начала имеем

$$V^*(z,0) = U^*(z,0), \qquad V^*(0,\bar{z}) = U^*(0,\bar{z}) \tag{2.16}$$

Рассмотрим функцию $W = V^* - U^*$. Очевидно, W — регулярное решение уравнения (2.2) в окрестности начала. Поэтому для малых z и $\bar{z}$ имеет место разложение

$$W(z,\bar{z}) = \sum_{p,q=0}^{\infty} a_{pq} z^p \bar{z}^q, \qquad \text{где} \quad a_{pq} = \frac{1}{p!\,q!}\left(\frac{\partial^{p+q} W}{\partial z^p\,\partial \bar{z}^q}\right)_0 \tag{2.17}$$

[1] Т. е. решение, имеющее непрерывные частные производные первого и второго порядков.

[2] Эту теорему для уравнения (2.2) мы получим ниже, как следствие формулы (2.12).

Но в силу (2.16) в окрестности точки $z=0$

$$W(z,0)=0, \qquad W(0,\bar{z})=0 \tag{2.18}$$

Поэтому, очевидно,

$$a_{p0}=a_{0p}=\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial^p W}{\partial z^p}\right)_0=\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial^p W}{\partial \bar{z}^p}\right)_0=0 \qquad (p=0,1,2,\ldots) \tag{2.19}$$

Воспользуемся теперь тем, что W удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial \bar{z}}+\frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2}W=0 \tag{2.20}$$

Дифференцируя обе части этого уравнения $p-1$ раз по z и принимая во внимание (2.17), (2.18) и (2.19), получим

$$a_{p1}=0 \qquad (p=1,2,\ldots) \tag{2.21}$$

Совершенно так же получим

$$a_{1p}=0 \qquad (p=1,2,\ldots) \tag{2.22}$$

Дифференцируя теперь обе части (2.20) один раз по $\bar{z}$ и $p-1$ раз по z и принимая во внимание (2.17), (2.18), (2.19), (2.21) и (2.22), сразу получим

$$a_{p2}=0 \qquad (p=2,3,\ldots)$$

Продолжая этот процесс дальше, мы докажем, что

$$a_{pq}=0 \qquad (p,q=0,1,2,\ldots)$$

Следовательно, $W\equiv 0$, т. е. $V^*\equiv U^*$.

Итак, доказано, что *всякое решение уравнения* (2.2), *регулярное в* (*достаточно малой*) *окрестности начала, можно представить в виде* (2.12), *где* a_0 — *постоянная*, $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — *голоморфные функции в указанной окрестности*.

Постоянная a_0 *и функции* Φ и Ψ *однозначно определяются при помощи соответствующего решения уравнения* (2.2) *и связаны с ним формулами* (2.13).

Можно также доказать, что формула (2.12) дает общее представление *всех* решений уравнения (2.2) в *любой* окрестности точки $z=0$. Не останавливаясь здесь на подробном доказательстве этого предложения, сделаем следующие замечания. Если U — регулярное решение уравнения (2.2) в некоторой области D, содержащей точку $z=0$, то функции Φ и Ψ, определенные в окрестности точки $z=0$ формулами (2.13), аналитически продолжимы по любому пути в области D. Полученные таким путем функции дают представление решения U уравнения (2.2) во всей области D при помощи формулы (2.12).

Функции Φ и Ψ будут вообще многозначными в D. Однако, если D — односвязная область, то функции Φ и Ψ будут однозначными в D.

Таким образом, *если* D — *односвязная область, содержащая начало координат, то формула* (2.12), *где* a_0 — *любая постоянная*, Φ *и* Ψ — *любые голоморфные функции в* D, *дает все регулярные в* D *решения уравнения* (2.2), *причем функции* Φ, Ψ *и постоянная* a_0 *однозначно определяются при помощи соответствующего им решения уравнения* (2.2).

В случае многосвязной области, как это показано в нашей работе[5], представление (2.12) также имеет место, только в этом случае функции Φ и Ψ будут иметь многозначность определенного (логарифмического) типа.

5°. Выведем теперь некоторые непосредственные следствия из формулы (2.12). Интегрированием по частям мы можем записать эту формулу в виде

$$U=\Phi_1(z)-\int_0^z \Phi_1(t)\frac{\partial}{\partial t}P_n\left(\frac{1-z\bar{z}+2z\bar{t}}{1+z\bar{z}}\right)dt+$$

$$+\overline{\Psi_1(z)}-\int_0^{\bar{z}}\Psi(t)\frac{\partial}{\partial \bar{t}}P_n\left(\frac{1-z\bar{z}+2\bar{z}t}{1+z\bar{z}}\right)d\bar{t} \tag{2.23}$$

где

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2}a_0+\int_0^z\Phi(t)\,dt,\qquad \Psi_1(z)=\frac{1}{2}\bar{a}_0+\int_0^z\Psi(t)\,dt \tag{2.24}$$

Очевидно, что формула (2.23) для любых аналитических функций Φ_1 и Ψ_1 дает решение уравнения (2.2). Полагая в (2.23)

$$\Phi_1(z)=\Psi_1(z)=-\frac{1}{4\pi}\lg z \tag{2.25}$$

и принимая во внимание (1.6), после простых преобразований получим

$$\Omega=\frac{1}{2\pi}P_n(\cos\theta)\lg\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\lg t\,\frac{\partial}{\partial t}P_n\Big[t+(1-t)\cos\theta\Big]dt \tag{2.26}$$

Это так называемое *элементарное решение* уравнения (1.7) с полюсом в точке $\theta=0$. Нетрудно видеть, что элементарное решение с полюсом в точке (θ_0,φ_0) будет иметь вид

$$\Omega(\cos\gamma)=\frac{1}{2\pi}P_n(\cos\gamma)\lg\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\lg t\,\frac{\partial}{\partial t}P_n[t+(1-t)\cos\gamma]\,dt \tag{2.26}$$

где γ — дуговое расстояние между точками (θ,φ) и (θ_0,φ_0). Принимая во внимание формулу (2.5), будем иметь

$$\cos\gamma=\frac{(1-x^2-y^2)(1-\xi^2-\eta^2)+4(x\xi+y\eta)}{(1+x^2+y^2)(1+\xi^2+\eta^2)} \tag{2.27}$$

где точки $z=x+iy$ и $t=\xi+i\eta$ — стереографические проекции точек θ,φ и θ_0,φ_0 на экваториальную плоскость $\theta=\pi/2$ с южного полюса $\theta=\pi$.

Пусть D — область на плоскости z, лежащая внутри круга $|z|=1$ и ограниченная конечным числом кусочно гладких кривых. Обозначим границу D через C. Если $U(x,y)$ — регулярное решение уравнения (2.2) в D, то, применяя формулу Грина, получим

$$U(x,y)=\int_C\left(\frac{U\,d\,\Omega(\cos\gamma)}{dn_t}-\Omega(\cos\gamma)\frac{dU}{dn_t}\right)ds \tag{2.28}$$

где n_t — нормаль в точке интеграции $t=\xi+i\eta$, направленная во внутрь области D.

Из этой формулы непосредственно следует использованная нами выше теорема Пикара об аналитичности всякого регулярного решения уравнения (2.2) в области своей регулярности.

Рассмотрим теперь интегралы

$$V(x, y) = \int_C \mu(t)\, \Omega(\cos\gamma)\, ds, \quad W(x, y) = \int_C \nu(t) \frac{d}{dn_t} \Omega(\cos\gamma)\, ds \tag{2.29}$$

где μ и ν любые интегрируемые функции на C.

Ясно, что эти интегралы будут играть для уравнения (2.2) такую же роль, какую играют для уравнения Лапласа обычные логарифмические потенциалы простого и двойного слоев.

6°. Возвращаясь к переменным θ, φ, формулам (2.12) и (2.23) можем придать следующий вид соответственно:

$$U(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \int_0^z \Phi(t) P_n(\cos\theta + te^{-i\varphi}\sin\theta)\, dt$$

$$+ \int_0^{\bar z} \overline{\Psi(t)}\, P_n(\cos\theta + \bar t e^{i\varphi}\sin\theta)\, d\bar t \tag{2.30}$$

$$U(\theta, \varphi) = \Phi_1(z) - \int_0^z \Phi_1(t) \frac{\partial}{\partial t} P_n(\cos\theta + te^{-i\varphi}\sin\theta)\, dt \; +$$

$$+ \overline{\Psi_1(z)} - \int_0^{\bar z} \overline{\Psi_1(t)} \frac{\partial}{\partial \bar t} P_n(\cos\theta + \bar t e^{i\varphi}\sin\theta)\, d\bar t \tag{2.31}$$

где

$$z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}, \quad \bar z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}$$

В частности, если область D_0 на сфере, внутри которой рассматривается решение уравнения $\Delta U + n(n+1)U = 0$, является звездной относительно точки $\theta = 0$, то (2.30) и (2.31) могут быть записаны еще так:

$$U(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \int_0^1 [z\Phi(zt) + \bar z\, \overline{\Psi(zt)}]\, P_n[t + (1-t)\cos\theta]\, dt \tag{2.32}$$

$$U(\theta, \varphi) = \Phi_1(z) + \overline{\Psi_1(z)} - \int_0^1 [\Phi_1(zt) + \overline{\Psi_1(zt)}] \frac{\partial}{\partial t} P_n[t + (1-t)\cos\theta]\, dt \tag{2.33}$$

Подставляя теперь в (2.32)

$$a_0 = 0, \qquad \Psi = 0, \qquad \Phi = z^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots,) \tag{2.34}$$

получим

$$U_k(\theta, \varphi) = e^{ik\varphi}\, \Theta_{nk}(\cos\theta) \tag{2.35}$$

где

$$\Theta_{nk}(\cos\theta) = \left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^k \int_0^1 t^{k-1} P_n[t + (1-t)\cos\theta]\, dt \tag{2.36}$$

Нетрудно доказать, что Θ_{nk} только множителем отличается от присоединенной функции Лежандра P_{nk}. А именно,

$$P_{nk}(\cos\theta) = \frac{2^{n-k}\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)}\Theta_{nk}(\cos\theta) \tag{2.37}$$

На основании этой формулы мы можем выражение (2.36) принять в качестве определения присоединенных функций Лежандра первого рода.

7°. Пусть $U(\theta, \varphi)$ — регулярное решение уравнения (2.2) внутри сферического сегмента $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $\theta_0 \leqslant \pi$. Тогда мы можем его представить в виде (2.32), где Φ и Ψ — голоморфные функции внутри круга $|z| = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_0$. Поэтому внутри этого круга они разлагаются в ряды Тейлора

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - ib_k)z^{k-1}, \qquad \Psi(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\bar{a}_k + i\bar{b}_k)z^{k-1} \tag{2.38}$$

где a_k и b_k — комплексные числа. Подставляя (2.38) в (2.32) и имея в виду (2.36), получим ряд

$$U(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\varphi + b_k \sin k\varphi)\Theta_{nk}(\cos\theta) \tag{2.39}$$

который равномерно сходится внутри сферического сегмента $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$.

Таким образом имеем теорему: *всякое решение уравнения* $\triangle U + n(n+1)U = 0$ *где* $\triangle$ — *оператор Лапласа на сфере, регулярное внутри сферического сегмента* $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, *разлагается в ряд вида* (2.39), *который равномерно сходится внутри указанного сферического сегмента.*

8°. Пусть D_0 — некоторая односвязная область, лежащая на сфере, которая содержит точку $\theta = 0$, но не содержит точки $\theta = \pi$. Пусть D — стереографическая проекция области D_0 на экваториальную плоскость $\theta = \pi/2$ с южного полюса $\theta = \pi$. Пусть $U(\theta, \varphi)$ — регулярное решение уравнения (2.2) внутри D_0. Тогда мы можем это решение представить в виде (2.30), где Φ и Ψ — голоморфные функции в D.

Пусть E — какое-нибудь замкнутое множество, лежащее внутри D. Тогда для любого положительного ε существуют два таких полинома $P(z)$ и $Q(z)$, что

$$|\Phi(z) - P(z)| < \varepsilon, \quad |\Psi(z) - Q(z)| < \varepsilon, \quad z \in E \tag{2.40}$$

Подставляя в (2.30) вместо Φ и Ψ соответственно $P(z)$ и $Q(z)$, получим решение уравнения (2.2), которое, очевидно, будет иметь вид

$$V(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)\Theta_{nk}(\cos\theta) \tag{2.41}$$

где m — натуральное число, a_k, b_k — вообще комплексные числа. Из (2.30) в силу (2.40) получим

$$|U(\theta, \varphi) - V(\theta, \varphi)| < K\varepsilon, \qquad z \in E \tag{2.42}$$

где K — положительная постоянная, которая не зависит ни от функции U, ни от ε; конечно, она может зависеть от E.

Из неравенства (2.42) вытекает теорема: *всякое решение уравнения* $\triangle U + n(n+1)U = 0$, *регулярное внутри односвязной области* D_0, *содержащей* *точку* $\theta=0$, *но не содержащей точки* $\theta=\pi$, *можно апроксимировать равномерно внутри* D_0 *при помощи линейной комбинации функций*

$$P_n(\cos\theta), \qquad \Theta_{nk}(\cos\theta)\,\frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi} \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{2.43}$$

§ 3. Общее решение уравнений тонкой сферической оболочки

В этом параграфе мы выводим сперва формулы, явно выражающие усилия, моменты и смещения тонкой сферической оболочки при помощи решений уравнений $\triangle U=0$ и $\triangle U+(1+ik)U=0$, где $\triangle$ — оператор Лапласа на сфере. Эти важные формулы были найдены А. Л. Гольденвейзером [1].

Для получения интересующих нас формул мы пользуемся несколько иным способом; а именно, мы записываем уравнения тонкой сферической оболочки в усилиях и моментах в комплексной форме при помощи дифференциальных операций $\partial/\partial z$, $\partial/\partial\bar z$ и затем непосредственно интегрируем их, что быстро приводит к цели.

1°. Пусть поверхность сферы радиуса R отнесена к какой-нибудь системе криволинейных ортогональных координат (α,β) и пусть квадрат линейного элемента

$$ds^2=A^2d\alpha^2+B^2d\beta^2 \tag{3.1}$$

Полную систему уравнений тонкой сферической оболочки в усилиях и моментах можно тогда записать в виде

$$B\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}-A\frac{\partial S_2}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}(S_1-S_2)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(T_1-T_2)-\frac{AB}{R}N_1+ABX=0 \tag{3.2}$$

$$B\frac{\partial S_1}{\partial\alpha}+A\frac{\partial T_2}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}(T_1-T_2)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(S_1-S_2)-\frac{AB}{R}N_2+ABY=0 \tag{3.3}$$

$$B\frac{\partial H_1}{\partial\alpha}-A\frac{\partial G_2}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}(G_1-G_2)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(H_1-H_2)+ABN_2+ABL=0 \tag{3.4}$$

$$B\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}+A\frac{\partial H_2}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}(H_1-H_2)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(G_1-G_2)-ABN_1+ABM=0 \tag{3.5}$$

$$T_1+T_2+\frac{R}{AB}\left[\frac{\partial(BN_1)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(AN_2)}{\partial\beta}\right]+RZ=0 \tag{3.6}$$

$$H_1+H_2+R(S_1+S_2)=0 \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(T+\frac{3R}{h^2}G\right)-\frac{1+\sigma}{R}\left(1+\frac{3R^2}{h^2}\right)N_1+(1+\sigma)\left(X+\frac{3R}{h^2}M\right)=0 \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(T+\frac{3R}{h^2}G\right)-\frac{1+\sigma}{R}\left(1+\frac{3R^2}{h^2}\right)N_2+(1+\sigma)\left(Y-\frac{3R}{h^2}L\right)=0 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{3R}{h^2}(1-\sigma)G-\frac{R^2}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[B\left(\frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial\alpha}-\frac{1+\sigma}{R}N_1\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[A\left(\frac{1}{B}\frac{\partial T}{\partial\beta}-\frac{1+\sigma}{R}N_2\right)\right]\right\}\\ -\frac{1+\sigma}{AB}R^2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BX)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AY)\right]=0\end{aligned} \tag{3.10}$$

где X, Y, Z, M, L — заданные функции от α, β,

$$T=T_1+T_2, \qquad G=G_1+G_2, \tag{3.11}$$

Группа уравнений (3.2) — (3.7) представляет собой систему уравнений равновесия тонкой сферической оболочки. Эти уравнения были получены Лявом. Уравнения (3.8) — (3.10) принадлежат А. Л. Гольденвейзеру [1,6] и представляют собой уравнения неразрывности деформаций[1].

Если перейти к переменным x, y [см. формулы (1.3)], квадратичная форма (3.1) примет вид

$$ds^2 = \frac{4R^2}{(1+x^2+y^2)^2}(dx^2+dy^2), \tag{3.12}$$

т. е. в данном случае

$$A = B = \frac{2R}{1+x^2+y^2} = \frac{2R}{1+z\bar{z}} \tag{3.13}$$

В дальнейшем, простоты ради, мы будем предполагать, что $X = Y = Z = M = L = 0$. Это особенно не ограничивает общности, так как использованный ниже метод позволяет строить частные решения системы неоднородных уравнений (3.2) — (3.10), если функции X, Y, Z, M, L аналитические.

Кроме того, мы будем предполагать, что

$$S_1 = -S_2 = S, \qquad H_1 = -H_2 = H \tag{3.14}$$

Эти соотношения вытекают из формул, связывающих усилия и моменты с деформациями [см., например, [1], стр. 442].

Имея теперь в виду (3.13), (3.14) и рассматривая дифференциальные операции $\partial/\partial z$, $\partial/\partial\bar{z}$, определенные формулами (2.1), систему уравнений (3.2) — (3.10) можем записать в виде

$$(1+z\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \frac{T_1 - T_2 - 2iS}{(1+z\bar{z})^2} + \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{2(N_1 - iN_2)}{1+z\bar{z}} = 0 \tag{3.15}$$

$$(1+z\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \frac{G_1 - G_2 + 2iH}{(1+z\bar{z})^2} + \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{2R(N_1 - iN_2)}{1+z\bar{z}} = 0 \tag{3.16}$$

$$T + \frac{(1+z\bar{z})^2}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\frac{N_1 + iN_2}{1+z\bar{z}} + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{N_1 - iN_2}{1+z\bar{z}}\right\} = 0 \tag{3.17}$$

$$\left(1+\frac{3R^2}{h^2}\right)(1+\sigma)(N_1 + iN_2) - (1+z\bar{z})\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(T + \frac{3R}{h^2}G\right) = 0 \tag{3.18}$$

$$\frac{3R}{h^2}(1-\sigma)G - (1+z\bar{z})^2\frac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial\bar{z}} + \frac{(1-\sigma)(1+z\bar{z})^2}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\frac{N_1 + iN_2}{1+z\bar{z}} + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{N_1 - iN_2}{1+z\bar{z}}\right\} = 0 \tag{3.19}$$

2°. Пусть D_0 — серединная поверхность оболочки. Мы будем предполагать, что точка $\theta = 0$ содержится в D_0. Обозначим через D стереографическую проекцию области D_0 с южного полюса $\theta = \pi$ на экваториальную плоскость $\theta = \pi/2$. Очевидно, D содержит начало координат (центр сферы).

Наша цель — дать общее выражение всех решений системы уравнений (3.15) — (3.19) в области D.

---

[1] Следует отметить, что А. Л. Гольденвейзер [6] установил три уравнения неразрывности деформаций для произвольной тонкой оболочки, которые в случае сферы заметно упрощаются и принимают вид (3.8) — (3.10).

Рассмотрим сперва группу уравнений (3.16), (3.17), (3.19), которая содержит неизвестные функции T, G, N_1, N_2. Из (3.18) имеем

$$N_1+iN_2=(1+z\bar{z})\frac{\partial V}{\partial z} \tag{3.20}$$

где

$$V=\frac{1-\sigma}{1+k^2}\left(T+\frac{3R}{h^2}G\right), \qquad k^2=\left(1+\frac{3R^2}{h^2}\right)(1-\sigma^2)-1 \tag{3.21}$$

Подставляя теперь (3.21) в (3.17), получим

$$T=-\triangle V, \qquad \text{где} \quad \triangle\equiv(1+z\bar{z})^2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}} \tag{3.22}$$

В силу (3.22) из (3.21) имеем

$$\frac{3R}{h^2}G=\frac{1+k^2}{1-\sigma}V+\triangle V \tag{3.23}$$

В силу (3.20), (3.22) и (3.23) уравнение (3.19) принимает вид

$$\triangle\triangle V+2\triangle V+(1+k^2)V=0 \tag{3.24}$$

Таким образом формулы (3.21), (3,22) и (3.23) дают все решения системы уравнений (3.17), (3.18) и (3.19).

Функция V, входящая в указанные формулы, является произвольным решением уравнения (3.24). Так как функции T, G согласно их физическому значению, должны быть регулярными вещественными функциями в D, то, как видно из (3.21), мы должны предположить, что функция V является вещественным регулярным решением уравнения (3.24) в D.

3°. Уравнение (3.24) можно записать в виде [1]

$$(\triangle+1+ik)(\triangle+1-ik)V=0 \tag{3.25}$$

Отсюда в силу вещественности функции V сразу получим

$$V=U+\overline{U} \tag{3.26}$$

где U — произвольное, вообще комплексное решение уравнения

$$\triangle U+(1+ik)U=0 \tag{3.27}$$

Это уравнение, полученное, повидимому, впервые А. Л. Гольденвейзером [1], будет играть во всем дальнейшем основную роль. Докажем, что U однозначно определяется в области D при помощи T и G. В силу (3.27) из (3.26)

$$\triangle V=\triangle U+\triangle\overline{U}=-(1+ik)U-(1-ik)\overline{U}=-V-ik(U-\overline{U})$$

т. е.

$$U-U=\frac{i}{k}(\triangle V+V) \tag{3.28}$$

Из (3.26) и (3.28) имеем

$$U=\frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{k}\right)V+\frac{i}{2k}\Delta V \tag{3.29}$$

---

[1] Относительно построения решения уравнения вида

$$\Delta^n U+a_1\Delta^{n-1}U+\ldots+a_nU=0$$

см. нашу статью [7].

Принимая теперь во внимание (3.21) и (3.22), получим

$$U=\frac{\sigma+ik}{2k(i-k)}T+\frac{1-\sigma}{2k(k-i)}\frac{3R}{h^2}G \tag{3.30}$$

что и доказывает наше утверждение.

4°. В силу (3.26) и (3.27) формулы (3.20), (3.22) и (3.23) принимают вид

$$N_1+iN_2=(1+z\bar{z})\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(U+\bar{U}) \tag{3.31}$$

$$T=(1+ik)U+(1-ik)\bar{U},\qquad G=\frac{R(1+\sigma)(1+ik)}{\sigma+ik}U+\frac{R(1+\sigma)(1-ik)}{\sigma-ik}\bar{U} \tag{3.32}$$

Формулы (3.31) и (3.32), где U — любое решение уравнения (3.27) в области D, дают все решения уравнений (3.17), (3.18) и (3.19).

5°. Рассмотрим теперь систему уравнений (3.15) и (3.16). В силу (3.31) и (3.32) уравнение (3.15) принимает вид

$$(1+z\bar{z})^2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{T_1-T_2-2iS}{(1+z\bar{z})^2}-\frac{\partial}{\partial z}[(1-ik)U+(1+ik)\bar{U}]=0 \tag{3.33}$$

Принимая во внимание (3.27), легко убедимся, что функция

$$T_1-T_2-2iS=\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+z\bar{z})^2\frac{\partial}{\partial z}(U+\bar{U})\right]$$

является частным решением уравнения (3.33). Поэтому общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$T_1-T_2-2iS=(1+z\bar{z})^2\psi(z)+\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+z\bar{z})^2\frac{\partial}{\partial z}(U+\bar{U})\right] \tag{3.34}$$

где $\psi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D. Очевидно, $\psi(z)$ определяется однозначно при помощи T_1, T_2, S и G.

В силу (3.31) и (3.32) уравнение (3.16) примет вид

$$(1+z\bar{z})^2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{G_1-G_2+2iH}{(1+z\bar{z})^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{R(\sigma-1)(1-ik)}{\sigma+ik}U+\frac{R(\sigma-1)(1+ik)}{\sigma-ik}\bar{U}\right]=0 \tag{3.35}$$

Общее решение этого уравнения, как легко проверить, будет иметь вид

$$G_1-G_2+2iH=(1+z\bar{z})^2\chi(z)+\frac{\partial}{\partial z}\left\{(1+z\bar{z})^2\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{R(\sigma-1)}{\sigma+ik}U+\frac{R(\sigma-1)}{\sigma-ik}\bar{U}\right]\right\} \tag{3.36}$$

где $\chi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D, которая однозначно определяется при помощи G_1, G_2, H и U.

Формулы (3.31), (3.32), (3.34), (3.36) представляют общее решение системы однородных уравнений (3.15) — (3.19) тонкой сферической оболочки. Эти важные формулы, как было выше отмечено, получены в работе [1] А. Л. Гольденвейзера. Они там записаны несколько иначе; в приведенной выше форме эти формулы имеют сравнительно простой вид и более удобны для применений.

6°. Дадим теперь общее выражение для компонентов вектора смещения u, v, w при помощи функций U, $\psi(z)$, $\chi(z)$. Для этой цели мы воспользуемся известными формулами, связывающими усилия и моменты с компонентами смещения, которые приведены в работе [1] А. Л. Гольденвейзера. Эти формулы можно записать в следующем виде:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{Eh}{R(1-\sigma)} \left\{ (1+z\bar{z})^2 \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{u+iv}{1+z\bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{u-iv}{1+z\bar{z}} \right] - 4w \right\} \tag{3.37}$$

$$T_1 - T_2 - 2iS = \frac{2Eh}{R(1+\sigma)} \frac{\partial}{\partial z} [(1+z\bar{z})(u-iv)] \tag{3.38}$$

$$\frac{3R}{h^2} G + T = -\frac{2Eh}{R(1-\sigma)} (\triangle w + 2w) \tag{3.39}$$

$$\frac{3R}{h^2}(G_1 - G_2 + 2iH) + T_1 - T_2 - 2iS = -\frac{2Eh}{R(1+\sigma)} \frac{\partial}{\partial z} \left[(1+z\bar{z})^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right] \tag{3.40}$$

7°. Согласно (3.21) и (3.26) из (3.39) получим

$$\triangle w + 2w = -\frac{R(1+k^2)}{2Eh}(U+U) \tag{3.41}$$

Общее решение этого уравнения, очевидно, имеет вид

$$w = w_1 - \frac{R}{2Eh}[(1+ik)U + (1-ik)\overline{U}] \tag{3.42}$$

где w_1 — любое решение уравнения

$$\triangle w + 2w = 0 \tag{3.43}$$

Принимая во внимание (3.32), мы можем (3.42) записать в виде

$$w = w_1 - \frac{R}{2Eh} T \tag{3.44}$$

Уравнение (3.43), очевидно, имеет вид

$$\triangle w + 1(1+1) w = 0$$

Поэтому общее решение этого уравнения на основании формулы (2.23) будет иметь вид

$$w_1 = \Phi_1'(z) + \overline{\Phi_1'(z)} - 2\frac{\bar{z}\Phi_1(z) + z\overline{\Phi_1(z)}}{1+z\bar{z}} \tag{3.45}$$

где Φ_1 — произвольная аналитическая функция в D, которую можно подчинить условиям

$$\Phi_1(0) = 0, \qquad \operatorname{Im}[\Phi_1'(0)] = 0 \tag{3.46}$$

Из (3.34), (3.36) и (3.32) легко получим

$$T_1 - T_2 - 2iS + \frac{3R}{h^2}(G_1 - G_2 + 2iH) =$$

$$= \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \left[(1+z\bar{z})^2 \frac{\partial T}{\partial z} \right] + (1+z\bar{z})^2 \left[\psi(z) + \frac{3R}{h^2} \chi(z) \right] \tag{3.47}$$

Но согласно (3.44) из (3.40) имеем

$$T_1 - T_2 - 2iS + \frac{3R}{h^2}(G_1 - G_2 + 2iH) =$$

$$= -\frac{2Eh}{R(1+\sigma)}\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+z\bar z)^2\frac{\partial w_1}{\partial z}\right] + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+z\bar z)^2\frac{\partial T}{\partial z}\right] \tag{3.48}$$

Из (3.47) и (3.48) сразу вытекает

$$-\frac{2Eh}{R(1+\sigma)}\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+z\bar z)^2\frac{\partial w_1}{\partial z}\right] = (1+z\bar z)^2\left[\psi(z) + \frac{3R}{h^2}\chi(z)\right] \tag{3.49}$$

Но из (3.45) получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+z\bar z)^2\frac{\partial w_1}{\partial z}\right] = (1+z\bar z)^2\Phi_1'''(z) \tag{3.50}$$

Поэтому из (3.49) имеем

$$\Phi_1'''(z) = -\frac{R(1+\sigma)}{2Eh}\left[\psi(z) + \frac{3R}{h^2}\chi(z)\right] \tag{3.51}$$

Введем теперь новые функции $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$:

$$\Phi_0'''(z) = \chi(z), \qquad \Psi_0'''(z) = \psi(z) \tag{3.52}$$

которые, не ограничивая общности, можно подчинить условиям

$$\Phi_0(0) = \Phi_1'(0) = \Phi_1''(0) = \Psi_0(0) = \Psi_1'(0) = \Psi_1''(0) = 0 \tag{3.53}$$

Тогда из (3.51) в силу (3.46) и (3.52) будем иметь

$$\Phi_1(z) = -\frac{R(1+\sigma)}{2Eh}\left[\Psi_0(z) + \frac{3R}{h^2}\Phi_0(z)\right] + A_0 z + (A_1 + iA_2)z^2 \tag{3.54}$$

где A_0, A_1, A_2 — любые вещественные постоянные.

Подставляя (3.54) в (3.45), мы получим формулу, выражающую w_1 через аналитические функции Φ_0 и Ψ_0.

Перейдем теперь к определению u и v. Из (3.38) и (3.34) имеем

$$\frac{2Eh}{R(1+\sigma)}(1+z\bar z)(u+iv) = \Psi_1(z) + \int_0^{\bar z}(1+z\bar z_1)^2\,\overline{\psi(z_1)}\,d\bar z_1 + (1+z\bar z)^2\frac{\partial}{\partial \bar z}(U+\bar U) \tag{3.55}$$

где $\Psi_1(z)$ — аналитическая функция в D, которая подлежит определению.

Согласно (3.52) и (3.53) будем иметь

$$\int_0^{\bar z}(1+z\bar z_1)^2\,\overline{\psi(z_1)}\,d\bar z_1 = (1+z\bar z)^2\,\overline{\Psi_0''(z)} - 2z(1+z\bar z)\,\overline{\Psi_0'(z)} + 2z^2\,\overline{\Psi_0(z)} \tag{3.56}$$

В силу (3.56) из (3.55) получим

$$\frac{2Eh}{R(1+\sigma)}\frac{u+iv}{1+z\bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z}(U+\bar U) + \frac{(1+z\bar z)^2\,\overline{\Psi_0''(z)} - 2z(1+z\bar z)\,\overline{\Psi_0'(z)} + 2z^2\,\overline{\Psi_0(z)} + \Psi_1(z)}{(1+z\bar z)^2} \tag{3.57}$$

Отсюда в силу (3.27) и (3.32) имеем

$$\frac{2Eh}{R(1+\sigma)}(1+z\bar z)^2\left\{\frac{\partial}{\partial z}\frac{u+iv}{1+z\bar z} + \frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{u-iv}{1+z\bar z}\right\} =$$

$$= -2T + \Psi_2'(z) + \overline{\Psi_2'(z)} - 2\frac{\bar z\Psi_2(z) + z\,\overline{\Psi_2(z)}}{1+z\bar z} \tag{3.58}$$

где

$$\Psi_2(z) = \Psi_1(z) - 2\Psi_0(z) \tag{3.59}$$

Из (3.37) имеем

$$(1 + z\bar{z})^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \frac{u + iv}{1 + z\bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{u - iv}{1 + z\bar{z}} \right\} = \frac{R(1 - \sigma)}{Eh} T + 4w \tag{3.60}$$

Принимая теперь во внимание (3.44), из (3.58) и (3.60) получим

$$\frac{8Eh}{R(1 + \sigma)} w_1 = \Psi_2'(z) + \overline{\Psi_2'(z)} - 2 \frac{\bar{z}\Psi_2(z) + z\overline{\Psi_2(z)}}{1 + z\bar{z}} \tag{3.61}$$

Отсюда в силу (3.45) получим

$$\Phi_2'(z) + \overline{\Phi_2'(z)} - 2 \frac{\bar{z}\Phi_2(z) + z\overline{\Phi_2(z)}}{1 + z\bar{z}} \equiv 0 \tag{3.62}$$

где

$$\Phi_2(z) = \frac{8Eh}{R(1 + \sigma)} \Phi_1(z) - \Psi_2(z) \tag{3.63}$$

Из (3.62) непосредственно вытекает, что

$$\Phi_2(z) = B_1 + iB_2 + iB_0 z + (B_1 - iB_2) z^2 \tag{3.64}$$

где B_0, B_1, B_2 — любые вещественные постоянные. В силу (3.64), (3.59) и (3.54) из (3.63) имеем

$$\Psi_1(z) = -2\Psi_0(z) - \frac{12R}{h^2} \Phi_0(z) - B_1 - iB_2 +$$

$$+ \left(\frac{8Eh}{R(1 + \sigma)} A_0 - iB_0 \right) z + \left[\frac{8Eh}{R(1 + \sigma)} A_1 - B_1 + i \left(\frac{8Eh}{R(1 + \sigma)} A_2 + B_2 \right) \right] z^2 \tag{3.65}$$

Из (3.57) имеем

$$u + iv = \frac{R(1 + \sigma)}{2Eh} (1 + z\bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (U + \bar{U}) +$$

$$+ \frac{R(1 + \sigma)}{2Eh(1 + z\bar{z})} \left[(1 + z\bar{z})^2 \overline{\Psi_0''(z)} - 2z(1 + z\bar{z}) \overline{\Psi_0'(z)} + 2z^2 \overline{\Psi_0(z)} - 2\Psi_0(z) \right] -$$

$$- \frac{6R^2(1 + \sigma)}{Eh^3(1 + z\bar{z})} \Phi_0(z) + u_0 + iv_0 \tag{3.66}$$

где

$$u_0 + iv_0 = \frac{R(1 + \sigma)}{2Eh(1 + z\bar{z})} \left\{ -B_1 - iB_2 + \left(\frac{8Eh}{R(1 + \sigma)} A_0 - iB_0 \right) z + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{8Eh}{R(1 + \sigma)} (A_1 + iA_2) - B_1 + iB_2 \right] z^2 \right\} \tag{3.67}$$

Согласно (3.42), (3.45) и (3.54) имеем также

$$w = -\frac{R}{2Eh} \left[(1 + ik) U + (1 - ik) \bar{U} \right] -$$

$$- \frac{R(1 + \sigma)}{2Eh} \left[\Psi_0'(z) + \overline{\Psi_0'(z)} - 2 \frac{\bar{z}\Psi_0(z) + z\overline{\Psi_0(z)}}{1 + z\bar{z}} \right] -$$

$$- \frac{3R^2(1 + \sigma)}{2Eh^3} \left[\Phi_0'(z) + \overline{\Phi_0'(z)} - 2 \frac{\bar{z}\Phi_0(z) + z\overline{\Phi_0(z)}}{1 + z\bar{z}} \right] + w_0 \tag{3.68}$$

где

$$w_0 = 2A_0 \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} + 2 \frac{(A_1 + iA_2)\bar{z} + (A_1 - iA_2) z}{1 + z\bar{z}} \tag{3.69}$$

Легко проверяется при помощи формул (3.37) — (3.40), что смещениям u_0, v_0, w_0, определенным формулами (3.67) и (3.69), соответствуют усилия и моменты, равные нулю тождественно. Нетрудно видеть, что эти смещения соответствуют произвольному жесткому перемещению сферы в пространстве.

Формулы (3.66) и (3.68) дают нам искомое общее выражение компонентов смещений точек тонкой сферической оболочки при помощи функций U, Φ_0 и Ψ_0, причем U — любое регулярное решение уравнения (3.27), а Φ_0 и Ψ_0 — произвольные аналитические функции, удовлетворяющие условиям (3.53). Кроме того, Φ_0''' и Ψ_0''' — однозначные функции в D. Ясно, что Φ_0 и Ψ_0 будут также однозначными в D, если последняя односвязна.

Вообще же в случае многосвязной области D эти функции будут, очевидно, многозначными. Выясним характер многозначности этих функций.

8°. Предположим, что D — область конечной связанности (оболочка с отверстиями). Обозначая границу D через C, будем считать, что контур $C=C_0+C_1+\ldots+C_m$, где $C_0, C_1, \ldots, C_m$ — простые замкнутые кривые, не имеющие общих точек, причем C_0 содержит внутри себя все остальные.

Так как по условию Φ_0''' и Ψ_0''' — однозначные аналитические функции в D, то нетрудно видеть, что

$$\Phi_0(z)=\Phi^*(z)+\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k+\beta_k z+\gamma_k z^2)\lg(z-a_k) \tag{3.70}$$

$$\Psi_0(z)=\Psi^*(z)+\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k'+\beta_k'+\gamma_k' z^2)\lg(z-a_k) \tag{3.71}$$

где $a_1, \ldots, a_m$ — фиксированные точки внутри $C_1, \ldots, C_m$ соответственно; α_k, β_k, γ_k, α_k', β_k', γ_k' $(k=1, \ldots, m)$ — некоторые комплексные постоянные, а Φ^*, Ψ^* — голоморфные функции в D.

Кроме того, ясно, что каковы бы ни были постоянные α_k, β_k, γ_k, α_k', β_k', γ_k', функции Φ_0 и Ψ_0, определенные формулами (3.70) и (3.71), где Φ^*, Ψ^* — любые однозначные аналитические функции в D, будут иметь производные третьего порядка, однозначные в D. Подставляя выражения (3.70) и (3.71) в (3.66) и (3.68), в силу однозначности u, v, w получим

$$\begin{aligned}
&\beta_k'-\bar\beta_k'+\frac{3R}{h^2}(\beta_k-\bar\beta_k)=0, \qquad && \gamma_k'+\alpha_k'+\frac{6R}{h^2}\alpha_k=0\\
&\alpha_k'+\bar\gamma_k'+\frac{3R}{h^2}(\alpha_k+\bar\gamma_k)=0, && \beta_k'-\beta_k'+\frac{6R}{h^2}\beta_k=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, m)\\
& && \bar\gamma_k'+\alpha_k'+\frac{6R}{h^2}\bar\gamma_k=0
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Общее решение системы уравнений (3.72) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\alpha_k=K_k+iL_k, \qquad \beta_k=iM_k, \qquad \gamma_k=K_k-iL_k\\
\alpha_k'=K_k'+iL_k', \qquad \beta_k'=M_k'-i\frac{3R}{h^2}M_k \qquad (k=1, 2, \ldots, m)\\
\gamma_k'=-K_k'-\frac{3R}{h^2}K_k+i\left(L_k'+\frac{3R}{h^2}L_k\right)
\end{gathered} \tag{3.73}$$

где K_k, K_k', L_k, L_k', M_k, M_k' — произвольные вещественные постоянные.

Подставляя (3.73) в (3.70) и (3.71), получим

$$\Phi_0(z) = \Phi^*(z) + \sum_{k=1}^{m} \left[K_k + iL_k + iM_k z + (K_k - iL_k) z^2 \right] \lg(z - a_k) \tag{3.74}$$

$$\Psi_0(z) = \Psi^*(z) + \sum_{k=1}^{m} \left\{ K_k' + iL_k' + \left(M_k' - i\frac{3R}{h^2} M_k \right) z + \right.$$

$$\left. + \left[-K_k' - \frac{3R}{h^2} K_k + i\left(L_k' + \frac{3R}{h^2} L_k \right) \right] z^2 \right\} \lg(z - a_k) \tag{3.75}$$

где K_k, L_k, M_k, K_k', L_k', M_k' — любые вещественные постоянные, Φ^*, Ψ^* — произвольные однозначные аналитические функции в области D.

Таким образом функциям Φ_0 и Ψ_0, определенным формулами (3.74) и (3.75), соответствуют однозначные смещения u, v, w в D.

9°. Функция U, входящая в формулы (3.31), (3.32), (3.34), (3.36), (3.66) и (3.68), как мы видели выше, является однозначным решением уравнения

$$\triangle U + (1 + ik) U = 0, \qquad \text{где} \quad k^2 = \left(1 + \frac{3R^2}{h^2} \right) (1 - \sigma^2) - 1 \tag{3.76}$$

Как было показано в § 2, общее решение этого уравнения можно представить при помощи аналитических функций одной комплексной переменной. Для этой цели мы можем воспользоваться любой из формул (2.12) и (2.23), которые можно записать также в виде (2.30), (2.31), (2.32) и (2.33).

Остановимся для определенности на формуле (2.12). Тогда всякое решение уравнения (3.76) можно представить в виде

$$U = a_0 P_n(\omega_0) + \int_0^z \Phi(t) P_n(\omega_t)\, dt + \int_0^{\bar z} \overline{\Psi(t)} P_n(\bar\omega_t)\, dt \tag{3.77}$$

где Φ, Ψ — произвольные аналитические функции в D, n — корень уравнения

$$n(n+1) = 1 + ik, \tag{3.78}$$

причем будем иметь в виду тот корень, для которого выполнено условие

$$\operatorname{Re}(n+1) > 0, \tag{3.79}$$

$$\omega_0 = \frac{1 - z\bar z}{1 + z\bar z}, \qquad \omega_t = \frac{1 - z\bar z + 2\bar z t}{1 + z\bar z}, \qquad \bar\omega_t = \frac{1 - z\bar z + 2z\bar t}{1 + z\bar z} \tag{3.80}$$

Из (3.77) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -2a_0 \frac{\bar z}{(1 + z\bar z)^2} P_n'(\omega_0) + \frac{2}{(1 + z\bar z)^2} \int_0^{\bar z} \overline{\Psi(t)} P_n'(\bar\omega_t)(\bar t - \bar z)\, d\bar t +$$

$$+ \Phi(z) - \frac{2\bar z}{(1 + z\bar z)^2} \int_0^z \Phi(t) P_n'(\omega_t)(1 + \bar z t)\, dt, \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \bar z} = -2a_0 \frac{z}{(1 + z\bar z)^2} P_n'(\omega_0) + \frac{2}{(1 + z\bar z)^2} \int_0^z \Phi(t) P_n'(\omega_t)(t - z)\, dt +$$

$$+ \overline{\Psi(z)} - \frac{2z}{(1 + z\bar z)^2} \int_0^{\bar z} \overline{\Psi(t)} P_n'(\bar\omega_t)(1 + z\bar t)\, dt \tag{3.82}$$

Переходя к сопряженным выражениям, из (3.81) и (3.82) получим

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = -2\bar{a}_0 \frac{z}{(1+z\bar{z})^2} P_{\bar{n}}'(\bar{\omega}_0) + \frac{2}{(1+z\bar{z})^2} \int_0^z \Psi(t) P_{\bar{n}}'(\omega_t)(t-z)\,dt +$$

$$+ \overline{\Phi(z)} - \frac{2z}{(1+z\bar{z})^2} \int_0^{\bar{z}} \overline{\Phi(t)} P_{\bar{n}}'(\bar{\omega}_t)(1+z\bar{t})\,d\bar{t} \tag{3.83}$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} = -2\bar{a}_0 \frac{\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} P_n'(\bar{\omega}_0) + \frac{2}{(1+z\bar{z})^2} \int_0^{\bar{z}} \overline{\Phi(t)} P_n'(\bar{\omega}_t)(\bar{t}-\bar{z})\,d\bar{t} +$$

$$+ \Psi(z) - \frac{2\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} \int_0^z \Psi(t) P_{\bar{n}}'(\omega_t)(1+\bar{z}t)\,dt \tag{3.84}$$

Из (3.82) и (3.84) имеем (3.85)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+z\bar{z})^2 \frac{\partial U}{\partial z}\right] = 4a_0 \frac{\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2} P_n''(\omega_0) + \frac{4}{(1+z\bar{z})^2} \int_0^{\bar{z}} \overline{\Psi(t)} P_n''(\bar{\omega}_t)(\bar{t}-\bar{z})^2\,d\bar{t} +$$

$$+ (1+z\bar{z})^2 \Phi'(z) + (1-ik)\bar{z}(1+z\bar{z})\Phi(z) + \frac{4\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2} \int_0^z \Phi(t) P_n''(\omega_t)(1+\bar{z}t)^2\,dt$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+z\bar{z})^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}\right] = 4\bar{a}_0 \frac{z^2}{(1+z\bar{z})^2} P_n(\omega_0) + \frac{4}{(1+z\bar{z})^2} \int_0^{\bar{z}} \overline{\Phi(t)} P_{\bar{n}}''(\bar{\omega}_t)(\bar{t}-\bar{z})^2\,d\bar{t} +$$

$$+ (1+z\bar{z})^2 \Psi'(z) + (1+ik)\bar{z}(1+z\bar{z})\Psi(z) + \frac{4\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2} \int_0^z \Psi(t) P_{\bar{n}}''(\omega_t)(1+\bar{z}t)^2\,dt \tag{3.86}$$

На основании формул (3.31), (3.32), (3.34), (3.36), (3.81) и (3.82), (3.83), (3.85), (3.86) можно дать общее выражение для усилий и моментов при помощи аналитических функций одной комплексной переменной.

Выпишем эти выражения:

$$N_1 + iN_2 = -\frac{2z}{(1+z\bar{z})^2}\left[a_0 P_n'(\omega_0) + \bar{a}_0 P_{\bar{n}}'(\omega_0)\right] +$$

$$+ \frac{2}{(1+z\bar{z})^2} \int_0^z \left[\Phi(t) P_n'(\omega_t) + \Psi(t) P_{\bar{n}}'(\bar{\omega}_t)\right](t-z)\,dt +$$

$$+ \overline{\Phi(z)} + \Psi(z) - \frac{2z}{(1+z\bar{z})^2} \int_0^{\bar{z}} \left[\overline{\Phi(t)} P_{\bar{n}}'(\bar{\omega}_t) + \overline{\Psi(t)} P_n'(\bar{w}_t)\right](1+z\bar{t})\,d\bar{t} \tag{3.87}$$

$$T = T_1 + T_2 = a_0(1+ik)P_n(\omega_0) + \bar{a}_0(1-ik)P_{\bar{n}}(\omega_0) +$$

$$+ \int_0^z \left[(1+ik)\Phi(t)P_n(\omega_t) + (1-ik)\Psi(t)P_{\bar{n}}(\omega_t)\right]dt +$$

$$+ \int_0^{\bar{z}} \left[(1-ik)\overline{\Phi(t)} P_{\bar{n}}(\bar{\omega}_t) + (1+ik)\overline{\Psi(t)} P_n(\bar{\omega}_t)\right]dt \tag{3.88}$$

$$G=G_1+G_2=R(1+\sigma)\left[a_0\frac{1+ik}{\sigma+ik}P_n(\omega_0)+\bar{a}_0\frac{1-ik}{\sigma-ik}P_{\bar{n}}(\omega_0)\right]+$$
$$+R(1+\sigma)\int_0^z\left[\frac{1+ik}{\sigma+ik}\Phi(t)P_n(\omega_t)+\frac{1-ik}{\sigma-ik}\Psi(t)P_{\bar{n}}(\omega_t)\right]dt+$$
$$+R(1+\sigma)\int_0^{\bar{z}}\left[\frac{1-ik}{\sigma-ik}\overline{\Phi(t)}P_n(\bar{\omega}_t)+\frac{1+ik}{\sigma+ik}\overline{\Psi(t)}P_n(\bar{\omega}_t)\right]d\bar{t} \qquad (3.89)$$

$$T_1-T_2-2iS=(1+z\bar{z})^2\Psi_0'''(z)+\frac{4\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2}[a_0P_n''(\omega_0)+\bar{a}_0P_{\bar{n}}(\omega_0)]+$$
$$+(1+z\bar{z})^2[\Phi'(z)+\Psi'(z)]+\bar{z}(1+z\bar{z})[(1-ik)\Phi(z)+(1+ik)\Psi(z)]+$$
$$+\frac{4\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2}\int_0^z[\Phi(t)P_n''(\omega_t)+\Psi(t)P_{\bar{n}}''(\omega_t)](1+\bar{z}t)^2dt+$$
$$+\frac{4}{(1+z\bar{z})^2}\int_0^{\bar{z}}[\overline{\Phi(t)}P_{\bar{n}}''(\bar{\omega}_t)+\overline{\Psi(t)}P_n''(\bar{\omega}_t)](\bar{t}-\bar{z})^2d\bar{t} \qquad (3.90)$$

$$G_1-G_2+2iH=(1+\bar{z}z)^2\Phi_0'''(z)+\frac{4R(\sigma-1)\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2}\left[\frac{a_0}{\sigma+ik}P_n''(\omega_0)+\frac{\bar{a}_0}{\sigma-ik}P_{\bar{n}}''(\omega_0)\right]+$$
$$+R(\sigma-1)(1+z\bar{z})^2\left[\frac{\Phi'(z)}{\sigma+ik}+\frac{\Psi'(z)}{\sigma-ik}\right]+$$
$$+R(\sigma-1)\bar{z}(1+z\bar{z})\left[\frac{1-ik}{\sigma+ik}\Phi(z)+\frac{1+ik}{\sigma-ik}\Psi(z)\right]+$$
$$+\frac{4R(\sigma-1)\bar{z}^2}{(1+z\bar{z})^2}\int_0^z\left[\frac{\Phi(t)}{\sigma+ik}P_n''(\omega_t)+\frac{\Psi(t)}{\sigma-ik}P_{\bar{n}}''(\omega_t)\right](1+\bar{z}t)^2dt+$$
$$+\frac{4R(\sigma-1)}{(1+z\bar{z})^2}\int_0^{\bar{z}}\left[\frac{\overline{\Phi(t)}}{\sigma-ik}P_{\bar{n}}''(\bar{\omega}_t)+\frac{\overline{\Psi(t)}}{\sigma+ik}P_n''(\bar{\omega}_t)\right](\bar{t}-\bar{z})^2d\bar{t} \qquad (3.91)$$

Аналогично можно получить из формул (3.66) и (3.68) общее выражение для компонентов смещений u, v, w. Эти выражения здесь не приводятся.

Таким образом мы получили формулы, выражающие в явном виде усилия, моменты и компоненты смещения тонкой сферической оболочки при помощи четырех произвольных аналитических функций Φ_0, Ψ_0, Φ, Ψ. Эти функции будут однозначными, если область, занимаемая оболочкой, является односвязной. Если же область, занимаемая оболочкой, многосвязна, то функции Φ_0, Ψ_0, Φ, Ψ будут вообще многозначными. Характер многозначности функций Φ_0 и Ψ_0 мы уже выяснили выше [формулы (3.74), (3.75)]; функции Φ_0''' и Ψ_0''' являются однозначными. Что же касается функций Φ и Ψ, то их многозначность имеет более сложную структуру (см. нашу статью [5]).

Формулы (3.87) — (3.91) могут иметь много применений. Во-первых, при их помощи можно решать различные конкретные граничные задачи тонкой сферической оболочки; например, разлагая в ряд Тейлора функции Φ_0, Ψ_0, Φ, Ψ, мы получим из формул (3.87) — (3.91) удобные выражения для решения граничных задач в случае сферического сегмента.

Во-вторых, при помощи формул (3.88)—(3.91), а также аналогичных формул для смещений мы можем свести граничные задачи оболочки для любой области к определенным линейным граничным задачам теории функций комплексного переменного; применяя существующие методы (Н. И. Мусхелишвили, Д. И. Шерман, И. Н. Векуа и др.), эти граничные задачи мы можем свести к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма.

Поступила в редакцию
14 VI 1945

Тбилисский математический
институт АН Грузинской ССР

I. N. VECOUA.—INTEGRATION OF EQUATIONS OF A SPHERICAL SHELL

The paper presents the general expression for all solutions of the equation

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+n(n+1)U=0 \tag{1}$$

where θ and φ are geographical coordinates of a point. This expression for $U=U(\theta,\varphi)$ may be given in the form (2)

$$U=a_0P_n(\cos\theta)+\int_0^z\Phi(t)P_n(\cos\theta+te^{-i\varphi}\sin\theta)\,dt+\int_0^{\bar z}\overline{\Psi(t)}P_n(\cos\theta+\bar{t}e^{i\varphi}\sin\theta)\,d\bar{t}$$

where P_n is a Legendre function, a_0 is an arbitrary constant, Φ and Ψ are arbitrary analytic functions of the complex variable

$$z=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}$$

in the neighbourhood of the point $z=0$.

The paper gives a number of applications of formula (2), the most important being the application to the theory of thin spherical shells.

A. L. Goldenweiser [1] has evolved the formula for the stresses, moments and components of displacements of thin spherical shells by means of two analytic functions and the solution of one equation in the form (1). Substituting the general expression (2) for this solution, the author derives the general expression for the stresses, moments and components of displacement, containing four arbitrary analytic functions of the complex variable z.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII. № 6.
2. Векуа И. Н. Общее представление решений дифференциального уравнения сферических функций. Доклады АН СССР. Т. 49, № 5 (1945).
3. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII. № 2.
4. Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа, Ч. II. ГТТИ. 1934.
5. Elias Vecoua. Allgemeine Darstellung der Lösungen elliptischen Differentialgleichungen in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet. Сообщения Груз. филиала АН СССР. 1940. Т. I. № 5.
6. Гольденвейзер А. Л. О применимости общих теорем теории упругости к тонким оболочкам. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII, Вып. 1.
7. Векуа И. Н. О метагармонических функциях. Труды Тбилисского математического института. 1943. Т. XII.