Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А. И. Лурье

(Ленинград)

1. В этой работе рассматривается задача об устойчивости движения, определяемого системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= -\rho_k x_k + f(\sigma) \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \\ \dot{\sigma} &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n - f(\sigma) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Вопрос этот, представляющийся с математической точки зрения весьма частным, не лишен некоторого прикладного значения: к нему, как показывается ниже, приводит рассмотрение устойчивости систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом.

В уравнениях (1.1) в числе величин ρ_k, которые все различны, могут быть как положительные вещественные $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$, так и попарно сопряженные с положительной вещественной частью $\rho_{s+1}, \rho_{s+2}, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n$, переменные $\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_s$ и константы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ — вещественные, $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{n-1}, x_n, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n$ — комплексные и попарно сопряженные. Относительно характера функции $f(\sigma)$ достаточно предположить, что она представляет монотонно возрастающую функцию, переходящую от отрицательных значений при $\sigma < 0$ к положительным при $\sigma > 0$. Интеграл от функции $f(\sigma)$ в пределах от 0 до σ будет в таком случае положительной величиной, обращающейся в нуль только при $\sigma = 0$.

Отметим еще, что слово «устойчивость» ниже понимается в смысле «устойчивость в большом», т. е. речь идет об устойчивости движения, определяемого системой дифференциальных уравнений (1.1), при произвольных, а не лишь весьма малых, начальных отклонениях x_k^0, σ^0 от положения равновесия $x_k = 0$, $\sigma = 0$.

Важное значение в дальнейшем имеет квадратичная форма[1]

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{x_\alpha x_\beta}{\rho_\alpha + \rho_\beta} \tag{1.2}$$

---

[1] Эта квадратичная форма была построена в случае трех переменных для исследования одной задачи автоматического регулирования автором и В. Н. Постниковым.

Конечно, $F(x_1, \ldots, x_n)$ — вещественная форма. Докажем, что она знакоопределенная положительная. Мы можем написать

$$\frac{1}{\rho_\alpha + \rho_\beta} = \int_0^\infty \exp\left[-(\rho_\alpha + \rho_\beta)\lambda\right] d\lambda$$

поскольку $\operatorname{Re} \rho_\alpha > 0$ для любого α; выражение (1.2) поэтому преобразуется к виду (1.3)

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n x_\alpha \exp(-\rho_\alpha \lambda)\, x_\beta \exp(-\rho_\beta \lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty \Big(\sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \exp(-\rho_\alpha \lambda)\Big)^2 d\lambda$$

Под знаком интеграла стоит квадрат вещественного числа; значит функция $F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, причем равенство нулю возможно только для значений $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Предложение доказано [1].

Рассмотрим теперь функцию

$$V(\sigma, x_1, \ldots, x_n) = \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma + F(a_1 x_1, \ldots, a_n x_n) +$$

$$+ \frac{1}{2}(A_1 x_1^2 + \ldots + A_s x_s^2) + C_1 x_{s+1} x_{s+2} + \ldots + C_{n-s-1} x_{n-1} x_n \tag{1.4}$$

которая при положительных $A_1, \ldots, A_s$, $C_1, C_2, \ldots, C_{n-s-1}$, вещественных $a_1, \ldots, a_s$ и попарно сопряженных комплексных $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$, очевидно, является знакоопределенной положительной функцией параметров $\sigma, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Принимая V за функцию Ляпунова, относящуюся к системе дифференциальных уравнений (1.1), составим производную $\dot{V}$ этой функции по времени:

$$-\dot{V}(\sigma, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^s A_k \rho_k x_k^2 + \sum_{\beta=1,3,\ldots}^{n-s-1} C_\beta (\rho_{s+\beta} + \rho_{s+\beta+1}) x_{s+\beta} x_{s+\beta+1} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\rho_k a_i a_k}{\rho_i + \rho_k} x_i x_k + f^2(\sigma) - f(\sigma)\left\{\sum_{k=1}^s x_k \left[A_k + \beta_k + 2a_k \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\rho_i + \rho_k}\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=1}^{n-s} x_{s+\alpha}\left[C_\alpha + \beta_{\alpha+s} + 2a_{s+\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\rho_i + \rho_{s+\alpha}}\right]\right\}$$

причем под знаком последней суммы надо считать $C_1 = C_2, \ldots, C_{n-s-1} = C_{n-s}$.

Отметим далее, что

$$2\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\rho_k a_i a_k}{\rho_i + \rho_k} x_i x_k = \Big(\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big)^2$$

и, следовательно,

$$2\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\rho_k a_i a_k}{\rho_i + \rho_k} x_i x_k + f^2(\sigma) = \Big[\sum_{i=1}^n a_i x_i + f(\sigma)\Big]^2 - 2f(\sigma)\sum_{i=1}^n a_i x_i$$

---

[1] Это изящное доказательство дал Р. О. Кузьмин. Наше первоначальное доказательство было громоздким.

Поэтому, если потребовать выполнения условий

$$A_k + \beta_k + 2a_k\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\rho_i + \rho_k}\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s) \tag{1.5}$$

$$C_\alpha + \beta_{s+\alpha} + 2a_{s+\alpha}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\rho_i + \rho_{s+\alpha}}\right) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-s)$$

то выражение для производной функции Ляпунова по времени будет

$$\dot V = -\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + f(\sigma)\right]^2 - \sum_{i=1}^{s} A_i \rho_i x_i^2 - \sum_{\alpha=1,3,\ldots}^{n-s-1} C_\alpha (\rho_{s+\alpha} + \rho_{s+\alpha+1}) x_{s+\alpha} x_{s+\alpha+1} \tag{1.6}$$

Поскольку производная $\dot V$ оказалась знакоопределенной отрицательной функцией, движение, описываемое системой дифференциальных уравнений (1.1), согласно известной теореме Ляпунова [1], устойчиво асимптотически. Здесь имеется «устойчивость в большем», так как выражения V и $\dot V$, составленные в конечном виде, сохраняют знакоопределенность при любых конечных значениях аргументов $\sigma, x_1, \ldots, x_n$. Таким образом доказана теорема: если при надлежащим образом выбранных $\frac{1}{2}(n+s)$ положительных числах $A_1, \ldots, A_s$, $C_1 = C_2, \ldots, C_{n-s-1} = C_{n-s}$ существуют s вещественных $a_1, \ldots, a_s$ и $\frac{1}{2}(n-s)$ пар комплексных сопряженных $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ решений системы n квадратных уравнений (1.5), в которых $\rho_1, \ldots, \rho_s$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — заданные вещественные постоянные (причем $\rho_k > 0$ для $k = 1, 2, \ldots, s$), а $\rho_{s+1}, \rho_{s+2}, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n$ — заданные комплексные попарно сопряженные постоянные (причем $\operatorname{Re}\rho_{s+\alpha} > 0$ при $\alpha = 1, 2, \ldots, n-s$), то движение, описываемое системой дифференциальных уравнений (1.1), асимптотически устойчиво «в большем» для любой монотонно возрастающей функции $f(\sigma)$, имеющей знак σ и обращающейся в нуль при $\sigma = 0$.

Отметим важное следствие из уравнений (1.5); разделив каждое из этих уравнений на ρ_k и сложив все уравнения, после простого преобразования найдем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\rho_k} + \sum_{\alpha=1}^{n-s} \frac{C_\alpha}{\rho_s + a} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\rho_k} + 1\right)^2 = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k} \tag{1.7}$$

Левая часть по условию положительна; поэтому, чтобы можно было удовлетворить требованиям теоремы, нужно, чтобы константы β_k были подчинены условию

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\rho_k} < 1 \tag{1.8}$$

Не будучи, конечно, достаточным, это условие в известном смысле принадлежит к числу необходимых условий устойчивости. Действительно, линейная функция $f(\sigma) = c\sigma$ (при $c > 0$) входит в рассматриваемый класс функций $f(\sigma)$; характеристическое уравнение получающейся линейной системы

$$\dot x_k = -\rho_k x_k + c\sigma, \qquad \dot\sigma = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k - c\sigma \tag{1.9}$$

имеет вид

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda+\rho_1 & 0\cdots 0 & -c \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots\ \ \lambda+\rho_n & -c \\ -\beta_1 & -\beta_2\cdots-\beta_n & \lambda+c \end{vmatrix}=0 \tag{1.10}$$

Его свободный член равен

$$D(0)=c\rho_1,\rho_2\ldots\rho_n\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{\rho_k}\right) \tag{1.11}$$

и условие (1.8) входит поэтому в число необходимых критериев устойчивости движения, описываемого системой дифференциальных уравнений (1.9), даваемых теоремой Гурвица.

Примечание 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k=-\rho_k x_k+f(\sigma) \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

$$\dot{x}_{n+1}=f(\sigma) \tag{1.12}$$

$$\dot{\sigma}=\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k-\beta_{n+1}x_{n+1}-f(\sigma)$$

где $\beta_{n+1}>0$. Функцию Ляпунова V_1 берем в виде

$$V_1=V+\frac{1}{2}\beta_{n+1}x^2{}_{n+1} \tag{1.13}$$

где V определено выше по формуле (1.4). Производная этой знакоопределенной положительной функции $n+2$ переменных $x_1,\ldots,x_n$, x_{n+1}, σ, составленная в силу дифференциальных уравнений (1.12), будет

$$\dot{V}_1=\dot{V} \tag{1.14}$$

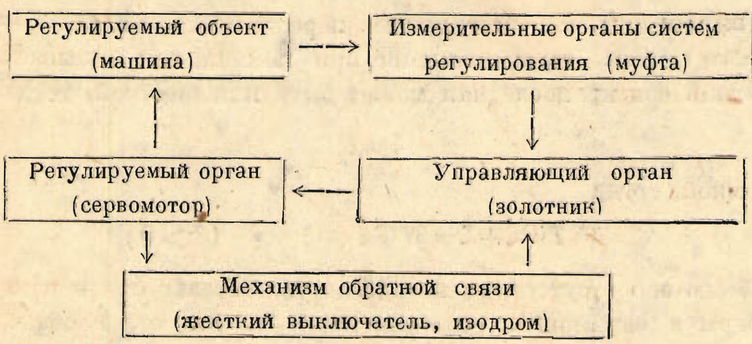
и, следовательно, будет отрицательной знакопостоянной, по терминологии Ляпунова, функцией указанных аргументов. Движение на основании теоремы Ляпунова устойчиво. Можно, обратившись к дифференциальным уравнениям (1.12), убедиться, что эта устойчивость — асимптотическая. Действительно, пусть интегральная кривая $\{x_1(t),\ldots,x_n(t),x_{n+1}(t),\sigma(t)\}$ при $t=t_0$ пересекает гиперповерхность $x_1=0,\ldots x_n=0$, $\sigma=0$, на которой $\dot{V}_1=0$; согласно последнему уравнению (1.12) $\dot{\sigma}(t_0)\neq 0$ и при $t>t_0$ функция $\sigma(t)$ будет отлична от нуля; значит, при $t>t_0$ отличными от нуля станут $f(\sigma)$ и $\dot{x}_k\,(k=1,2,\ldots,n)$, т. е. указанная интегральная кривая будет продолжать пересекать поверхности $V_1=\text{const}$ извне внутрь, приближаясь к началу координат пространства переменных $x_1,\ldots,x_n$, x_{n+1}, σ.

Примечание 2. Случай «зоны застоя»: пусть $f(\sigma)=0$ пока $|\sigma|\leqslant\varepsilon$, причем $f(\sigma)<0$ при $\sigma<-\varepsilon$ и $f(\sigma)>0$ при $\sigma>\varepsilon$. Отрезок оси σ, т. е. область значений аргументов $x_1=0,\ldots,x_{n+1}=0$, $|\sigma|\leqslant\varepsilon$, назовем зоной застоя. Вне этой зоны построенная выше функция V_1 положительная, знакоопределенная функция аргументов $x_1,\ldots,x_{n+1}$, σ, а ее производная — знакопостоянная — отрицательная. В пространстве этих переменных поверхности $V_1 = \text{const}$ суть замкнутые поверхности, охватывающие указанный отрезок оси σ; любая интегральная кривая пересекает эти поверхности извне внутрь (в сторону меньших V_1), стремясь при $t \to \infty$ к некоторому положению в зоне застоя. В этом расширенном смысле движение можно назвать асимптотически устойчивым.

Примечание 3. Если $f(\sigma)$ представляет собой аналитическую функцию, разложение которой в ряд Маклорена имеет форму $f(\sigma) = c\sigma^{2k+1} + \ldots$ $(c > 0, k = 1, 2, \ldots,)$, то к исследованию устойчивости «в малом» движения, определяемого системой дифференциальных уравнений (1.1), применим классический метод Ляпунова, относящийся к случаю одного нулевого корня характеристического уравнения.

Движение асимптотически устойчиво при единственном условии (1.8).

2. Не переходя пока к частным примерам, покажем, что к системе дифференциальных уравнений вида (1.1) или (1.12) действительно приводит рассмотрение широкого круга задач о движении в регулируемых системах с одним регулирующим органом[1]. Схема такой системы может быть представлена так[3]:



3. Параметры, характеризующие возмущенное движение регулируемого объекта, обозначим $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$; в классическом примере регулирования угловой скорости ω имеем один регулируемый параметр $\varphi = (\omega - \omega_0) / \omega_{cp}$; в случае самолета при рассмотрении его продольной устойчивости таких параметров три: угол атаки, угол тангажа, скорость центра тяжести, и т. д. При наличии одного органа, регулирующего приток энергии или вещества в регулируемый объект, линеаризированные уравнения возмущенного движения последнего могут быть написаны в виде

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha} \eta_\alpha + n_k \xi \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.1}$$

где ξ — параметр, определяющий положение регулирующего органа—заслонки, приводимой в движение сервомотором в первом примере, руля глубины — во втором и т. д. Параметры $\eta_1, \ldots, \eta_m$ — все или некоторые из них, а также их производные $\dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_m$ могут быть измерены при помощи тех или

[1] Приводимая ниже постановка задачи дана Г. Н. Никольским.

иных приспособлений (центробежный регулятор в первом примере, гироскоп автомата Сперри, измеряющий угол тангажа, во втором примере и т. д.); через ε_s обозначим показания измерителей. Их связь с параметрами, определяющими движение регулируемого объекта, дается формулами вида

$$T_s^{(r)2}\ddot{\varepsilon}_s + T_s^{(k)}\dot{\varepsilon}_s + \delta_s\varepsilon_s = \alpha_s\dot{\eta}_s + \beta_s\eta_s \tag{3.2}$$

где постоянные $T^{(r)}$, $T^{(k)}$, δ характеризуют инертные свойства, силы трения и позиционные силы в измерительном приборе; если измеряется параметр, $\alpha_s = 0$; при измерении только его производной $\beta_s = 0$. Показания всех измерителей суммируются и передаются управляющему органу, открывающему доступ энергии в сервомотор, — это или стрелка, замыкающая контакт цепи электрического тока, или золотник, открывающий окна, через которые подается масло или сжатый воздух под поршень сервомотора и т. д. Перемещение управляющего органа обозначим буквой σ; имеем

$$\sigma = \sum_{s=1}^{m} i_s\varepsilon_s - \zeta \tag{3.3}$$

В этом выражении i_s — постоянные передаточные числа, ζ — смещение управляющего органа, осуществляемое при помощи так называемого механизма обратной связи; последняя может быть или жесткой, тогда

$$\zeta = \xi \tag{3.4}$$

или изодромной, тогда

$$T^{(i)}\dot{\zeta} + \zeta = \beta T^{(i)}\dot{\xi} + i\xi \qquad (\beta > 0) \tag{3.5}$$

Если обеспечено отсутствие заметной нечувствительности в измерительных органах, игры в шарнирных сочленениях и т. п., то, вообще говоря, в небольшом диапазоне измерения регулируемых параметров составленные линейные уравнения описывают с приемлемой точностью вышеуказанные процессы. Этого нельзя сказать про последнее уравнение, которое должно быть присоединено к системе, — уравнение сервомотора, выражающее связь ξ и σ:

$$\dot{\xi} = f(\sigma) \tag{3.6}$$

которое лишь в специальном случае так называемого сервомотора переменной скорости может быть линеаризировано $\left(f = \frac{1}{T^{(s)}}\sigma\right)$ в пределах лишь весьма малых отклонений управляющего органа.

Для распространенного класса сервомоторов «постоянной скорости» $f(\sigma) = \frac{1}{T}\operatorname{sgn}\sigma$ при $\sigma \neq 0$ и $f(\sigma) = 0$ при $\sigma = 0$; здесь о линеаризации уравнения (3.6) вовсе нельзя говорить.

Часто применяют сервомоторы, в которых обратный ход обеспечивается пружиной, сжимаемой при ходе вперед; здесь $f(\sigma) = c_1\sigma$ при $\sigma > 0$ и $f(\sigma) = c_2\sigma$ при $\sigma < 0$. Поведение функции $f(\sigma)$ для широкого класса сервомоторов, как показывают опыты В. А. Котельникова [4], может быть примерно описано соотношениями $f(\sigma) = 0$, пока $|\sigma| < \varepsilon$, $f(\sigma) = c\sigma$ при $\varepsilon < |\sigma| < \sigma_0$ и

$f(\sigma) = f_0 \operatorname{sgn} \sigma$ при $|\sigma| > \sigma_0$. Таким образом, нельзя признать лишенной прикладного значения попытку, которая делается в этой работе, сформулировать критерии устойчивости линейной регулируемой системы при «произвольном» (точнее, при описанном в п. 1) законе зависимости (3.6). Речь идет о таком выборе параметров системы, который гарантировал бы устойчивость процесса регулирования, каковы бы ни были не вполне ясные процессы, могущие иметь место в наиболее капризном органе регулирования — сервомоторе. Можно также сказать, что получающиеся критерии устойчивости гарантируют устойчивость при наихудшем для данной системы выборе сервомотора.

4. Покажем теперь, что система (3.1) — (3.6) приводится к виду (1.1) или (1.12). Рассмотрим случай идеальных измерителей, лишенных масс и сил трения, и случай жесткого выключения. Уравнения принимают вид

$$\begin{gathered}\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\,\eta_\alpha + n_k\,\xi \qquad (k=1,2,\ldots,m)\\ \sigma = \sum_{\alpha=1}^{m} j_\alpha\,\eta_\alpha - \xi, \qquad \dot{\xi} = f(\sigma)\end{gathered} \tag{4.1}$$

От переменных η_α переходим к новым «каноническим» переменным x_s, которые определяются так: положим

$$x_s = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^{(s)}\,\eta_\alpha + a_s\,\xi \tag{4.2}$$

тогда

$$\dot{x}_s = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^{(s)}\,\dot{\eta}_\alpha + a_s\,f(\sigma) \tag{4.3}$$

или в силу (4.1)

$$\dot{x}_s = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^{(s)}\Big(\sum_{\beta=1}^{m} b_{\alpha\beta}\,\eta_\beta + n_\alpha\,\xi\Big) + a_s\,f(\sigma) \tag{4.4}$$

Эти соотношения приводятся к виду

$$\dot{x}_s = \lambda_s x_s + f(\sigma) \tag{4.5}$$

если определить постоянные $c_\alpha^{(s)}$ так, чтобы

$$\lambda_s c_\beta^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{\alpha\beta}\,c_\alpha^{(s)}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^{(s)}\,n_\alpha = \lambda_s \qquad \begin{pmatrix}\beta = 1, 2, \ldots, m\\ s = 1, 2, \ldots, m\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Таким образом числа $\lambda_s = -\rho_s$ определяются, как характеристические числа матрицы $b_{\alpha\beta}$, т. е. корни уравнения $|b_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\lambda| = 0$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера ($\delta_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$ и $\delta_{\alpha\alpha} = 1$). Для каждого из этих корней (предполагаем, что все корни различны) соответствующая строка коэффициентов $c_\alpha^{(s)}$ определена с точностью до множителя C_s, определяемого так, чтобы константы a_s обращались в 1 согласно последнему условию (4.6).

Из второго соотношения (4.1) теперь находим

$$\dot{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{m} j_\alpha \dot{\eta}_\alpha - f(\sigma) \tag{4.7}$$

Согласно (4.3) и (4.5) значения производных $\dot{\eta}_\alpha$ определяются из системы линейных уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^{(s)} \dot{\eta}_\alpha = \lambda_s x_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.8}$$

определитель которой отличен от нуля, поскольку все характеристические числа матрицы $\| b_{\alpha\beta} \|$ различны [5]. Уравнение (4.7) приводится поэтому к виду

$$\dot{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu x_\nu - f(\sigma) \tag{4.9}$$

Итак, получена система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma), \qquad \dot{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu x_\nu - f(\sigma) \tag{4.10}$$

имеющая вид (1.1). В случае изодромной обратной связи полагаем

$$x_{m+1} = \frac{\zeta - i\xi}{\beta - i} \tag{4.11}$$

после чего в случае идеальных измерителей система уравнений (3.1), (3.3), (3.5), (3.6) примет вид ($k = 1, 2, \ldots, m$)

$$\begin{gathered}
\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha} \eta_\alpha + n_k \xi, \qquad \dot{x}_{m+1} = -\rho_{m+1} x_{m+1} + f(\sigma) \\
\sigma = \sum_{\alpha=1}^{m} j_\alpha \eta_\alpha - (\beta - i) x_{m+1} - i\xi, \qquad \dot{\xi} = f(\sigma)
\end{gathered} \tag{4.12}$$

где обозначено $\rho_{m+1} = \dfrac{1}{T^{(i)}}$. Эта система отличается от (4.1) только наличием множителя i перед ξ в выражении σ; $(m+1)$-ое уравнение системы (4.12) уже имеет требуемый вид. Поэтому при помощи той же подстановки (4.5) получим

$$\begin{gathered}
\dot{x}_k = -\rho_k x_k + f(\sigma) \qquad (k = 1, 2 \ldots, m+1) \\
\dot{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{m+1} \beta_\nu x_\nu - \beta f(\sigma)
\end{gathered} \tag{4.13}$$

Наличие положительного множителя β при $f(\sigma)$, которое отличает (4.13) от стандартного вида (4.10), конечно, несущественно, можно избавиться от этого множителя, заменяя σ / β другой буквой.

Надо в заключение отметить, что случай неидеальных измерителей не представляет ничего нового, так как система уравнений (3.1) — (3.2) всегда может быть записана в виде системы уравнений первого порядка

$$\dot{y}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} e_{k\alpha} y_\alpha + r_k \xi \tag{4.14}$$

и все дальнейшие рассуждения сохраняют силу.

Существенным ограничением общности наших выводов является требование отрицательности вещественных частей всех корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ характеристического уравнения, что для идеальных измерителей соответствует требованию отсутствия неустойчивости подлежащего регулированию объекта. Это является следствием самой постановки задачи, которая, как отмечено выше, состоит в разыскании критериев устойчивости при любом сервомоторе, в том числе наихудшем для данной системы.

Интересно отметить, что форма (1.6) выражения для производной $\dot{V}$ не исключает возможности исследования устойчивости, если окажется, что $\operatorname{Re} \rho_k < 0$ (т. е. $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$) для некоторого k. Действительно, взяв соответствующее A_k (или C_k) также отрицательным, получаем и в этом случае знакоопределенную прозводную, и вопрос об устойчивости должен решаться по знаку функции V. Изучение относящихся сюда трудных вещей не входит в рамки этой работы.

5. Простейшим примером может служить задача об устойчивости движения, описываемого системой дифференциальных уравнений

$$m\frac{dv}{dt} + kv = Q, \qquad \frac{dz}{dt} = v, \qquad \frac{dQ}{dt} = -q_1 f_*(\sigma_1), \qquad \sigma_1 = av + bz + cQ \tag{5.1}$$

рассмотренная ранее автором и В. Н. Постниковым [6].

Вводим новые переменные

$$x_1 = \frac{ck^3}{aqm} v - \frac{ck^2}{aqm} Q, \qquad x_2 = -\frac{ck^2}{aqm} Q$$
$$\sigma = \frac{k^2}{aqm}\sigma_1 = \frac{k^2}{qm} v + \frac{k^2 b}{aqm} z + \frac{ck^2}{amq} Q \tag{5.2}$$

и новую независимую переменную $\tau = kt/m$. Обозначая $\frac{ck}{a} f_*(\sigma_1)$ через $f(\sigma)$, получаем

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -x_1 + f(\sigma), \qquad \frac{dx_2}{d\tau} = f(\sigma), \qquad \frac{d\sigma}{d\tau} = (\alpha - \beta) x_1 - \alpha x_2 - f(\sigma) \tag{5.3}$$

причем для краткости письма принято $\alpha = \frac{bm}{ck^2}$, $\beta = \frac{a}{ck}$. Согласно (1.4) и (1.13) функцию Ляпунова берем в форме

$$V_1 = \frac{\alpha}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} a_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2} A x_1^2 + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma \tag{5.4}$$

Ее производная, составленная на основании уравнений движения (5.3), будет

$$\frac{dV_1}{d\tau} = -[a_1 x_1 + f(\sigma)]^2 - A x_1^2 \tag{5.5}$$

если потребовать выполнения условия

$$(a_1+1)^2+A=1-\alpha+\beta \tag{5.6}$$

которое может быть удовлетворено, если

$$\alpha<1+\beta \tag{5.7}$$

При соблюдении этого условия движение асимптотически устойчиво согласно п. 1 (примечание 1).

В случае линейной системы, когда $f(\sigma)=c\sigma$, соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\lambda^3+(1+c)\,\lambda^2+\lambda c\,(1+\beta)+c\alpha=0$$

и, согласно теореме Гурвица, необходимое и достаточное условие устойчивости имеет вид

$$\alpha<(1+c)\,(1+\beta) \tag{5.8}$$

Отсюда следует, что условие (5.7) является в известном смысле необходимым, а не только достаточным условием устойчивости; действительно, если бы (5.7) не соблюдалось, то можно было бы выбрать достаточно малое $c=c_0$, чтобы не соблюдалось и условие (5.8), т. е. в классе функций $f(\sigma)$ содержалась бы такая линейная функция $c_0\sigma$, для которой имели бы неустойчивое движение. Как сказано выше, соблюдение условия (5.7) гарантирует устойчивость при любом сервомоторе, в частности в настоящем примере при сервомоторе со сколь угодно большим «временем сервомотора» T_s (эта величина обратно пропорциональна c).

6. В качестве второго примера рассмотрим классическую задачу о непрямом регулировании при наличии жесткого выключателя, когда скорость поршня сервомотора $\dot\xi$ является функцией $f(\sigma)$ степени открытия золотника σ, удовлетворяющей условиям п. 1, а в остальном произвольной. Уравнения машины, регулятора, золотника и сервомотора соответственно будут

$$T_a\dot\varphi+\xi=0,\qquad T_r^2\ddot\eta+T_k\dot\eta+\delta\eta-\varphi=0,\qquad \sigma=\eta-\xi,\quad \dot\xi=f(\sigma) \tag{6.1}$$

«Канонические» переменные здесь будут

$$x_1=\xi,\quad x_2=T_a\rho_2\,(\varphi-\delta\eta)-\frac{\delta T_a\rho_2}{\rho_3}\,\dot\eta+\xi,\quad x_3=T_a\rho_3\,(\varphi-\delta\eta)-\frac{\delta T_a\rho_3}{\rho_2}\,\dot\eta+\xi \tag{6.2}$$

где постоянные ρ_2 и ρ_3 определяются как корни квадратного уравнения

$$\rho^2-\frac{T_k}{T_r^2}\,\rho+\frac{\delta}{T_r^2}=0 \tag{6.3}$$

Система дифференциальных уравнений (6.1) приводится к виду (1.1)

$$\dot x_1=f(\sigma),\quad \dot x_2=-\rho_2x_2+f(\sigma),\quad \dot x_3=-\rho_3x_3+f(\sigma)$$

$$\dot\sigma=\frac{\rho_3}{\delta T_a(\rho_3-\rho_2)}\,x_2+\frac{\rho_2}{\delta T_a(\rho_2-\rho_3)}\,x_3-\frac{x_1}{\delta T_a\rho_2\rho_3}-f(\sigma) \tag{6.4}$$

Согласно (1.13) нужно взять функцию Ляпунова в форме

$$V_1 = \frac{x_1^2}{2\delta T_a \rho_2 \rho_3} + \frac{a_2^2 x_2^2}{2\rho_2^2} + \frac{2a_2 a_3}{\rho_2+\rho_3} x_2 x_3 + \frac{a_3^2 x_3^2}{2\rho_3^2} + \frac{1}{2}(A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2) + C_1 x_2 x_3 \quad (6.5)$$

причем надо положить $C_1 = 0$, если ρ_2 и ρ_3 — вещественные, и $A_2 = A_3 = 0$, если ρ_2 и ρ_3 — комплексные; эти случаи имеют место соответственно для значений параметра

$$\xi = \frac{\delta T_r^2}{T_k^2} < \frac{1}{4}, \qquad \text{или} \qquad \xi > \frac{1}{4} \quad (6.6)$$

Если мы удовлетворим уравнениям (1.5), то производная $\dot V_1$ функции Ляпунова по времени для первого случая

$$-\dot V_1 = [a_2 x_2 + a_3 x_3 + f(\sigma)]^2 + A_2 \rho_2 x_2^2 + A_3 \rho_3 x_3^2 \quad (6.7)$$

во втором случае

$$-\dot V_1 = [a_2 x_2 + a_3 x_3 + f(\sigma)]^2 + C_1(\rho_2 + \rho_3) x_2 x_3 \quad (6.8)$$

Уравнения (1.5) здесь для первого случая

$$\begin{aligned} A_2 + 2a_2\left(1 + \frac{a_3}{\rho_2+\rho_3}\right) + \frac{a_2^2}{\rho_2} &= \frac{\rho_3}{\delta T_a(\rho_3 - \rho_2)} \\ A_3 + 2a_3\left(1 + \frac{a_2}{\rho_2+\rho_3}\right) + \frac{a_3^2}{\rho_3} &= \frac{\rho_2}{\delta T_a(\rho_2 - \rho_3)} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Во втором случае A_2 и A_3 нужно заменить на C_1. Полагаем в первом случае

$$A_2 = A_3, \qquad z_2 = \frac{a_2}{\rho_2} + 1, \qquad z_3 = \frac{a_3}{\rho_3} + 1$$

Система уравнений (6.9) может быть заменена системой

$$A + (z_2 + z_3 - 1)^2 = 1 - \chi, \qquad \rho_2 z_2^2 - \rho_3 z_3^2 = \frac{1}{\delta T_a}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\xi}} + \frac{\sqrt{1-4\xi}}{\chi\xi}\right) \quad (6.10)$$

где введены обозначения

$$A = \frac{\rho_2+\rho_3}{\rho_2\rho_3} A_2, \qquad \chi = \frac{T_k}{\delta^2 T_a} \quad (6.11)$$

Ясно, что условие

$$\chi < 1 \quad (6.12)$$

является необходимым условием наличия вещественных решений z_2, z_3 этой системы при $A > 0$. Легко убедиться, что при соблюдении условия (6.12) гипербола, представляемая вторым уравнением (6.10), имеет вещественные пересечения с параллельными прямыми, определяемые первым уравнением (6.10). Поэтому, пока $\xi < \frac{1}{4}$, условие (6.12) гарантирует асимптотическую устойчивость рассматриваемого движения «в большом».

Обратимся ко второму случаю. Полагаем

$$\lambda + i\mu = \frac{a_2}{\rho_2} + 1, \qquad s + i\sigma = \rho_2, \qquad \frac{\rho_2+\rho_3}{\rho_2\rho_3} C_1 = C$$

Соответствующие уравнения преобразуются к виду

$$(2\lambda - 1)^2 = 1 - \chi - C, \qquad \lambda^2 - \mu^2 + \frac{2\lambda\mu}{\sqrt{4\xi - 1}} = 1 - \frac{\chi\xi}{4\xi - 1} \quad (6.13)$$

Исследование показывает, что, пока $\xi < \frac{1}{2}$, условие (6.12) обеспечивает наличие вещественных относительно λ и μ решений системы (6.15) при $C > 0$; если же $\xi > \frac{1}{2}$, то для существования таких решений при $C > 0$ необходимо соблюдение неравенства

$$\chi < \frac{4\xi - 1}{4\xi^2} \tag{6.14}$$

При $\xi = \frac{1}{2}$ правая часть этого неравенства равна 1, она уменьшается при возрастании ξ и при весьма большом ξ приближенно равна $^1/\xi$; итак, при $\xi \to \infty$ имеем приближенно

$$\chi\xi < 1 \qquad \text{или} \qquad \delta T_a T_k > T_r^2 \tag{6.15}$$

Это — известный критерий устойчивости Вышнеградского.

Резюмируем: в плоскости параметров $\xi\chi$ строим кривую

$$\Psi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \xi < \frac{1}{2} \\ \dfrac{4\xi - 1}{4\xi^2} & \text{при} \quad \xi > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{6.16}$$

Устойчивые движения соответствуют области, ограниченной этой кривой и осью абсцисс. Применяемый метод дает, конечно, достаточные лишь условия устойчивости; поэтому нельзя утверждать, что при любом сервомоторе вне указанной области значений параметров движения будут неустойчивы; однако можно показать, что можно найти такой сервомотор, что значениям параметров вне указанной области будет соответствовать неустойчивое движение; в этом смысле полученный критерий является не только достаточным, но и необходимым. Для этого, как и в п. 5, рассмотрим случай сервомотора $f(\sigma) = \sigma / T_s$. Применение критерия Гурвица к получающемуся характеристическому уравнению линейной системы приводит здесь к неравенству

$$\chi < \frac{1}{\xi}\Phi(c, \xi) \qquad \Phi(c, \xi) = 1 - \frac{1}{1 + c\xi} + \frac{\xi}{(1 + c\xi)^2} \tag{6.17}$$

где введено обозначение $c = T_k / \delta T_s$. Расширенным условием устойчивости линейной системы назовем необходимое и достаточное условие устойчивости ее при любом c. Очевидно, что это расширенное условие записывается так:

$$\chi < \frac{1}{\xi}\Phi_{\min}(\xi) \tag{6.18}$$

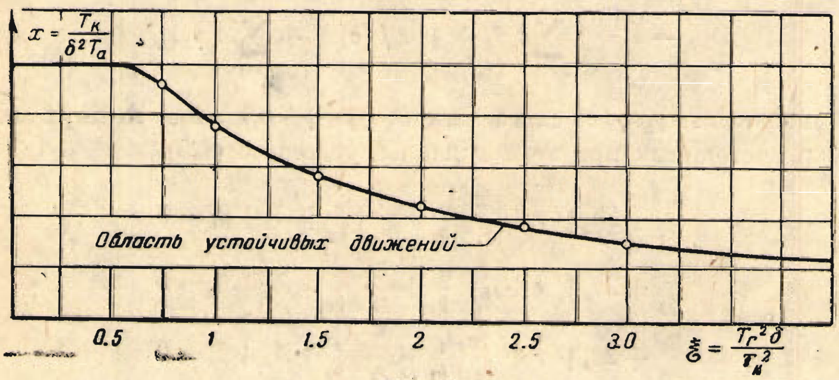
где $\Phi_{\min}(\xi)$ обозначает наименьшее значение $\Phi(c, \xi)$, рассматриваемой как функция c. Но производная $\partial\Phi / \partial c$ обращается в нуль при $c = 2 - 1/\xi$, т. е. при $\xi < \frac{1}{2}$ функция $\Phi(c, \xi)$ монотонно изменяется при $c > 0$, увеличиваясь от значения ξ при $c = 0$ до 1 при $c = \infty$ (что соответствует критерию Вышнеградского). Итак, при $\xi < \frac{1}{2}$ имеем $\Phi_{\min}(\xi) = \xi$ и, значит, условие $\chi < 1$ служит расширенным условием устойчивости; при несоблюдении этого условия при $c = 0$ имели бы неустойчивость. Если же $\xi > \frac{1}{2}$, то

$$\Phi_{\min}(\xi) = 1 - \frac{1}{4\xi}$$

и расширенное условие устойчивости будет иметь вид (6.15). Если это условие не соблюдено, то, взяв $c = 2 - 1/\xi$, получили бы линейную неустойчивую систему. Итак, соблюдение расширенных условий устойчивости линейной системы гарантирует устойчивость «в большем» при «произвольном» законе зависимости скорости поршня от степени открытия золотника. Если поэтому представляется возможным выбрать параметры T_a, T_k, T_r, δ в области, указанной на фиг. 1, то можно иметь уверенность, что система будет устойчиво работать, как бы ни был выбран сервомотор — в этом заключается тот практический вывод, который можно сделать из исследования данного случая.

7. Наметим теперь ход решения задачи, рассмотренной в предшествующем пункте, но при учете «саморегулирования» машины. Уравнения (6.2) и (6.4) сохраняются; вместо (6.1) и (6.3) напишем

$$T_a\dot{\varphi}+Z\varphi+\xi=0, \qquad \sigma=\eta-r\xi \tag{7.1}$$



Фиг. 1

В (7.1) член $Z\varphi$ учитывает явление саморегулирования; во втором уравнении введен для удобства письма коэффициент r, который равен 1, если имеется жесткий выключатель, и равен нулю при отсутствии обратной связи. Вводим канонические переменные

$$\begin{aligned} x_1 &= Z\varphi+\xi \\ x_2 &= \rho_2 T_a\varphi+\delta T_a(\rho_1-\rho_2)\eta+\frac{\delta T_a}{\rho_3}(\rho_1-\rho_2)\dot{\eta}+\xi \\ x_3 &= \rho_3 T_a\varphi+\delta T_a(\rho_1-\rho_3)\eta+\frac{\delta T_a}{\rho_2}(\rho_1-\rho_3)\dot{\eta}+\xi \end{aligned} \tag{7.2}$$

разыскиваемые по методу, указанному в п. 4; здесь $\rho_1=Z/T_a$, а ρ_2 и ρ_3 определяются уравнением (6.6) Эти переменные определяются дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_k=-\rho_k x_k+f(\sigma) \qquad (k=1, 2, 3) \tag{7.3}$$

Дифференциальное уравнение для σ будет

$$\dot{\sigma}=\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\beta_3 x_3-rf(\sigma) \tag{7.4}$$

где через β_k обозначены величины

$$\beta_1=c(\rho_2-\rho_3), \quad \beta_2=c(\rho_3-\rho_1), \quad \beta_3=c(\rho_1-\rho_2) \qquad \left(c=\frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)(\rho_3-\rho_1)\,\delta Z}\right)$$

Заметим, что эти величины удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=1}^{3} \beta_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{3} \beta_k \rho_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{3} \frac{\beta_k}{\rho_k} = -\frac{1}{\delta Z} \tag{7.5}$$

Функция Ляпунова согласно (1.4) берется в форме

$$V = F(a_1 x_1,\ a_2 x_2,\ a_3 x_3) + \int_0^{\sigma} f(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{2}(A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2) \tag{7.6}$$

причем в случае комплексных значений ρ_2 и ρ_3 два последних слагаемых заменяем на $C_1 x_2 x_3$. Производная $\dot{V}$ функции Ляпунова, составленная в силу уравнений движения (7.3) — (7.4), будет

$$-\dot{V} = \left[\sum_{k=1}^{3} a_k x_k + \sqrt{r}\, f(\sigma)\right]^2 + \sum_{k=1}^{3} A_k \rho_k x_k^2 \tag{7.7}$$

а при комплексных ρ_2, ρ_3 со слагаемым $C_1(\rho_2 + \rho_3) x_2 x_3$, вместо двух последних.

Выбор постоянных при этом подчинен условиям (1.5)

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1^2}{\rho_1} + 2a_1\sqrt{r} + \frac{2a_1 a_2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{2a_1 a_3}{\rho_1 + \rho_3} + A_1 + \beta_1 = 0\\
&\frac{a_2^2}{\rho_2} + 2a_2\sqrt{r} + \frac{2a_2 a_1}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{2a_2 a_3}{\rho_2 + \rho_3} + A_2 + \beta_2 = 0\\
&\frac{a_3^2}{\rho_3} + 2a_3\sqrt{r} + \frac{2a_3 a_1}{\rho_3 + \rho_1} + \frac{2a_3 a_2}{\rho_3 + \rho_2} + A_3 + \beta_3 = 0
\end{aligned} \tag{7.8}$$

с соответствующей заменой в случае комплексных ρ_2, ρ_3.

Рассмотрим сначала случай отсутствия выключателя, т. е. $r = 0$. Складывая уравнения (7.8) и воспользовавшись первым соотношением (7.5), получим

$$2F(a_1, a_2, a_3) + \sum_{k=1}^{3} A_k = 0 \tag{7.9}$$

и, поскольку F — положительная знакоопределенная форма, нельзя удовлетворить этому соотношению при положительных A_1, A_2, A_3. В рассматриваемом примере не существует функций Ляпунова типа (1.4), решающей задачу об устойчивости при любом $f(\sigma)$.

При наличии выключателя ($r = 1$) для решения уравнений (7.8) воспользуемся всеми тремя соотношениями (7.5). Получим три уравнения[1]:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{a_k}{\rho_k} + 1\right)^2 + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{\rho_k} = 1 + \frac{1}{\delta Z}\\
&\left(\sum_{k=1}^{3} a_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{3} A_k \rho_k + 2\sum_{k=1}^{3} a_k \rho_k = 0
\end{aligned} \tag{7.10}$$

[1] Напомним, что в случае комплексных ρ_2, ρ_3 коэффициенты A_2, A_3 соответственно заменяются на C_1.

$$2F(a_1, a_2, a_3) + \sum_{k=1}^{3} A_k + 2\sum_{k=1}^{3} a_k = 0$$

Полагаем

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{a_k}{\rho_k} = -b_1, \qquad \sum_{k=1}^{3} a_k = -b_2, \qquad \sum_{k=1}^{3} a_k \rho_k = -b_3 \tag{7.11}$$

Определитель этой системы — определитель Вандермонда—при различных ρ_1, ρ_2, ρ_3 отличен от нуля, так что новые неизвестные b_k можно выразить через старые; из (7.11) видно, что все числа b_k — вещественны. Система (7.10) получает вид

$$(1-b_1)^2 = 1 + \frac{1}{\delta Z} - \varepsilon_1, \quad b_2^2 - 2b_3 = -\varepsilon_2, \quad \Phi(b_1, b_2, b_3) - b_2 = -\varepsilon_3 \tag{7.12}$$

где через $\Phi(b_1, b_2, b_3)$ обозначена знакоопределенная положительная форма, получающаяся из $F(a_1, a_2, a_3)$ при указанной выше замене переменных; ε_1, ε_2, ε_3 — произвольные положительные числа, которые могут быть сделаны сколь угодно малыми (при проведении вычисления, указанного ниже, их можно считать нулями). Из последнего уравнения (7.12) следует, что b_2 положительно; подставляя в $\Phi(b_1, b_2, b_3)$ численное значение b_1 и выражая при помощи второго соотношения (7.12) b_3 через b_2, получим уравнение четвертой степени

$$\Phi\left(b_1, b_2, \frac{b_2^2}{2}\right) = b_2 \tag{7.13}$$

которое должно иметь хотя бы один положительный корень, если система устойчива при принятых для вычисления значениях параметров ρ_1, ρ_2, ρ_3, δZ.

Поступила в редакцию
12 VII 1945

Институт механики
Академии Наук СССР

A. I. LOURIE. — STABILITY OF ONE TYPE OF SYSTEMS UNDER CONTROL

The paper deals with the problem of stability of motion described by the system of differential equations (1.1), for large initial disturbances x_k^0 and σ^0 from the position of equilibrium $x_k = 0$ and $\sigma = 0$.

The problem of stability of an automatically regulated system with one control is reduced to this equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. 1935. ОНТИ [Стр. 57—65].
2. Малкин И. Г. Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях. Прикладная математика и механика. 1942. VI [Стр. 438].
3. Лоссиевский В. Л. Автоматические регуляторы. Гос. из-во оборонной промышленности. М. 1944 [Стр. 23].
4. Котельников В. А. Продольная устойчивость самолета с автопилотом типа АВП 12. Труды Института летных исследований. 1941. № 2 [Стр. 9—12].
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. ГОНТИ. 1939. Т. 3 [Стр. 94—96].
6. Лурье А. И. и Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII [Стр. 246—248].