

ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ ВАЛОВ ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА

В. В. Соболевский

(Москва)

Принимаем цилиндрическую систему координат r, θ и z . Пусть ось z совпадает с осью стержня; по концам он ограничен плоскостями $z=0$ и $z=l$, где l — длина стержня.

Будем считать, что сечение $z=0$ закреплено, а закручивающая пара действует в сечении $z=l$. В рассматриваемой задаче

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad (1)$$

и напряженное состояние определяется компонентами напряжений $\tau_{z\theta}$ и $\tau_{r\theta}$ (фиг. 1).

Дифференциальные уравнения равновесия сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2)$$

Условия идеальной пластичности Мизеса и Сен-Венана имеют одинаковый вид

$$\tau_{z\theta}^2 + \tau_{r\theta}^2 = k^2 \quad (3)$$

Боковая поверхность стержня свободна от напряжений, поэтому вектор касательного напряжения в каждой точке контура меридионального сечения должен быть направлен по касательной. Отсюда следует условие

$$\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_{z\theta}} = \frac{dr}{dz} \quad (4)$$

вдоль контура меридионального сечения.

Ниже применяются безразмерные величины

$$\rho = r/a, \quad \zeta = z/a$$

где a — какая-нибудь характерная длина.

Займемся исследованием уравнений пластичности.

Обозначим через φ угол наклона касательного напряжения к оси z (фиг. 1). Тогда

$$\tau_{z\theta} = \chi k \cos \varphi, \quad \tau_{r\theta} = \chi k \sin \varphi \quad (\chi = \pm 1) \quad (5)$$

Два варианта знаков χ соответствуют двум возможным направлениям закручивания сечения $z=l$ по отношению к закрепленному сечению $z=0$.

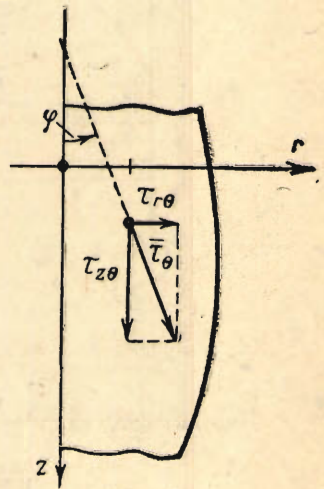
Функция φ принимается за новое переменное.

Уравнение (3) удовлетворяется тождественно, а уравнение (2) дает

$$\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{2 \sin \varphi}{\rho} = 0 \quad (6)$$

Таким образом для определения компонент касательного напряжения имеем дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальные уравнения характеристик

$$\frac{d\zeta}{\sin \varphi} = \frac{d\rho}{-\cos \varphi} = \frac{\rho d\varphi}{2 \sin \varphi}$$



Фиг. 1

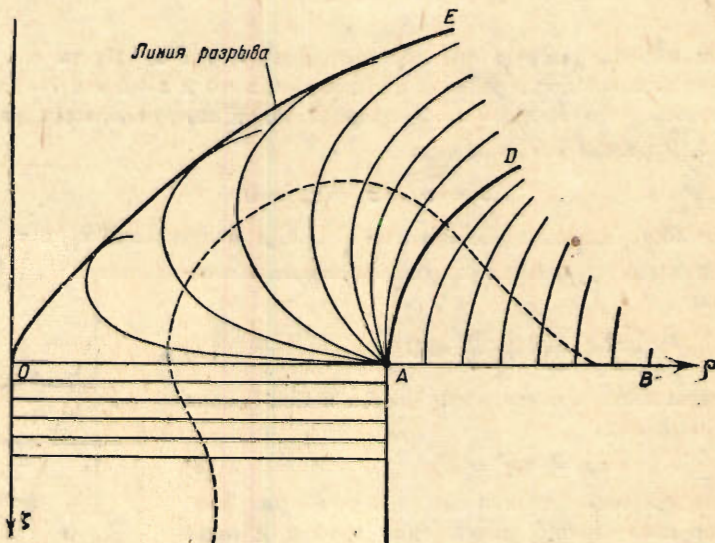
имеют две интегрируемые комбинации и решение уравнения (6) может быть получено в квадратурах.

Эти формулы показывают также, что касательные к характеристикам наклонены к оси x под углом $\varphi + \pi/2$. Отсюда непосредственно следует, что характеристики ортогональны траекториям касательного напряжения (линиям, касательные к которым в каждой точке имеют направление вектора τ_0).

Интеграл уравнения (6) имеет вид¹

$$\zeta - \frac{\rho}{2} \sqrt{|\sin \varphi|} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{|\sin \varphi|}} = \Phi(\rho \sqrt{|\sin \varphi|}) \quad (7)$$

где Φ — произвольная функция.



Фиг. 2

Характеристиками являются линии:

$$\rho \sqrt{|\sin \varphi|} = \text{const.}$$

Отметим свойства построенного решения. Интеграл (7), для которого выражение²

$$T \equiv \pm \frac{\sqrt{|\sin \varphi|}}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{|\sin \varphi|}} + \Phi'(\rho \sqrt{|\sin \varphi|})$$

не обращается тождественно в нуль, определяет решение уравнений (6),

Линией разрыва называются линии, на которых производные от φ по x , y , а вместе с тем и производные от компонент $\tau_{x\theta}$, $\tau_{r\theta}$ по координатам обращаются в бесконечность.

Для того чтобы некоторая линия была линией разрыва, необходимо и достаточно, чтобы вдоль нее

¹ Входящий в дальнейшие формулы интеграл путем замены переменного $|\sin \varphi| = \cos^2 \xi$ может быть выражен через эллиптический интеграл первого рода. Имеем

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{|\sin \varphi|}} = \pm 2 \int \frac{d\xi}{\sqrt{2 - \sin^2 \xi}}$$

² Знак плюс перед радикалом соответствует значению $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, а знак минус — значению $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$.

$$T \equiv \pm \frac{\sqrt{|\sin \varphi|}}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{|\sin \varphi|}} + \Phi'(\rho \sqrt{|\sin \varphi|}) = 0 \quad (8)$$

Огибающая характеристик $\rho \sqrt{|\sin \varphi|} = \text{const}$ есть линия разрыва.

Линии разрыва ограничивают области максимально возможного распространения пластического состояния. За этой линией образование пластического состояния невозможно: материал остается упругим. Не следует, однако, линию разрыва смешивать с границей между упругой и пластической зонами.

Контурное условие (4) может быть в силу (5) переписано в виде

$$\frac{d\rho}{d\zeta} = \text{tg } \varphi \quad (9)$$

Отсюда ясно, что вдоль контура меридионального сечения φ является углом между положительными направлениями оси z и касательной к контуру.

Отметим, что функцию φ достаточно определить с точностью до числа, кратного 2π , так как добавление этого числа к φ не изменяет компонент напряжения.

Полученные выше уравнения и контурные условия дают возможность определить распределение напряжений в пластических зонах меридионального сечения и построить характеристики. Для этого достаточно определить произвольную функцию Φ , входящую в интеграл (7), из контурного условия (9). Проиллюстрируем это на двух примерах.

В качестве первого примера рассмотрим распределение напряжений в пластической зоне около входящего угла меридионального сечения ступенчатого вала (фиг. 2).

В цилиндрическом участке $\varphi = 0$ вала характеристиками служат прямые, перпендикулярные оси z . В окрестности ступеньки следует различать области $OADE$ и ABD , изображенные на фиг. 2.

В области $OADE$ интеграл (7) приводит к уравнению

$$\zeta = \frac{\rho}{2} \sqrt{-\sin \varphi} \int_A^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{-\sin t}} \quad (10)$$

($A = \arcsin(\rho^2 \sin \varphi)$)

так как произвольная функция Φ имеет вид

$$\Phi(u) = -\frac{u}{2} \int^{-\arcsin u^2} \frac{dt}{\sqrt{-\sin t}}$$

В области ABD интеграл (7) дает

$$\zeta = \frac{\rho}{2} \sqrt{-\sin \varphi} \int_{-\pi/2}^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{-\sin t}} \quad (11)$$

так как из контурного условия $\varphi = -\pi/2$ при $\zeta = 0$ следует, что произвольная функция Φ будет

$$\Phi(u) = -\frac{u}{2} \int^{-\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{-\sin t}}$$

Характеристиками в этих областях служат кривые

$$\rho \sqrt{-\sin \varphi} = \text{const}$$

Линия разрыва OE является огибающей характеристик. Ее уравнение следует из уравнения (8) в виде

$$\frac{\sqrt{-\sin \varphi}}{\cos \varphi} - \frac{1}{2} \int_A^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{-\sin t}} = \frac{\rho \sqrt{-\sin \varphi}}{\sqrt{1 - \rho^4 \sin^2 \varphi}} \quad (12)$$

На фиг. 3 нанесены система характеристик и линия разрыва в меридиональном



Фиг. 3

сечении ступенчатого вала, координаты которых вычислены по приведенным выше формулам.

В качестве второго примера рассмотрим распределение напряжений в пластической зоне меридионального сечения конического вала с углом конусности 2γ (фиг. 3)

Интеграл (7) дает

$$\zeta = \rho \sqrt{\sin \varphi} \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sqrt{\sin \gamma}} + \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{\sin t}} \right) \quad (13)$$

так как из контурного условия $\varphi = \gamma$ вдоль образующей следует, что

$$\Psi(u) = u \left[\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sqrt{\sin \gamma}} - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{\sin t}} \right]$$

Компоненты касательного напряжения выражаются формулами (5), причем φ определена как функция ρ / ζ уравнением (13) везде в пластической зоне, за исключением окрестности верхнего торцового сечения.

На прямых $\rho / \zeta = \text{const}$, проходящих через вершину конуса 0, функция φ , а следовательно, и компоненты $\tau_{z\theta}$, $\tau_{r\theta}$ постоянны.

Характеристиками являются линии $\rho \sqrt{\sin \varphi} = \text{const}$.

Построенное решение существует лишь до линии разрыва. Из формул (8) и (13) следует, что линией разрыва служит прямая $\rho = -\zeta \operatorname{ctg} \varphi_*$, проходящая через вершину конуса 0, где φ_* — есть решение уравнения

$$\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sqrt{\sin \gamma}} + \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\varphi_*} \frac{dt}{\sqrt{\sin t}} + \frac{\sqrt{\sin \varphi_*}}{\cos \varphi_*} = 0 \quad (14)$$

На фиг. 3 изображена система характеристик, а также их огибающая — прямая разрыва $\rho = 0.12 \zeta$ в меридиональном сечении конического вала, у которого $\gamma = 15^\circ$. Координаты этих линий вычислены по найденным выше формулам.

Построенные выше решения имеют механический смысл лишь в тех частях изображенных на фиг. 2 и 3 областей, которые при заданном крутящем моменте находятся в пластическом состоянии. Точные границы распространения пластических зон могут быть найдены лишь при рассмотрении соответствующих удруго-пластических задач. Возможные расположения таких границ намечены на фиг. 2 и 3 пунктиром.

Поступила в редакцию
12 III 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

W. W. SOKOLOVSKY.—PLASTIC TORSION OF A SHAFT OF CIRCULAR CROSS SECTION AND VARIABLE DIAMETER

Plastic equilibrium in torsion of circular cross section is described by equations (2) and (3) and boundary conditions (4). By introducing the new variable through formula (5), equations (2) and (3) are reduced to equations (6), having the integral (7), while the boundary condition takes the form (9). The characteristics of equation (6) are orthogonal trajectories of tangential stresses.

Investigation of stressed states in the plastic zone of the meridional section of the shaft consists in finding the arbitrary function Φ of integral (7). This function may be determined by means of the boundary condition (9).

As examples the author considers distribution of stresses and characteristics in plastic zones of the meridional cross section of a step shaft (Fig. 2) and a conical shaft (Fig. 3). The solutions constructed are valid in those parts of the domains (given in figures 2 and 3) which for the given torque are in a plastic state. The precise boundary contours of the plastic zones may be defined only by examining the corresponding elasto-plastic problems. The possible location of these boundaries is outlined by the broken lines in figures 2 and 3.