Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

О РЕШЕНИИ В ПОЛИНОМАХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

А. А. Курдюмов

(Ленинград)

1. Решение плоской задачи теории упругости анизотропного тела в напряжениях сводится к нахождению функции напряжения $\varphi(x, y)$ из дифференциального уравнения (см. например, С. Г. Лехницкий [1])

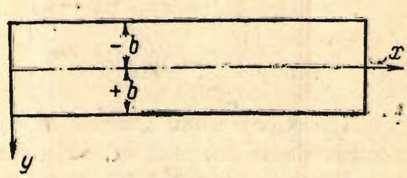
$$\beta_{22}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}-2\beta_{26}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^3\partial y}+(2\beta_{12}+\beta_{66})\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}-2\beta_{16}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x\partial y^3}+\beta_{11}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0 \qquad (1.1)$$

и соответствующих граничных условий. Компоненты напряжения X_x, Y_y и X_y связаны с функцией напряжения $\varphi(x, y)$ зависимостями

$$X_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad Y_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad X_y=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} \qquad (1,2)$$

Коэффициенты β_{ij} дифференциального уравнения (1.1) и упругие постоянные a_{ij}, входящие в выражение закона Гука:

$$\begin{aligned} e_{xx}&=a_{11}X_x+a_{12}Y_y+\ldots+a_{16}X_y\\ e_{yy}&=a_{21}X_x+a_{22}Y_y+\ldots+a_{26}X_y\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e_{xy}&=a_{61}X_x+a_{62}Y_y+\ldots+a_{66}X_y \end{aligned} \qquad (1.3)$$



Фиг. 1

(где $a_{ij}=a_{ji}$) в случае плоского напряженного состояния и в случае плоского деформированного состояния связаны соответственно соотношениями

$$\beta_{ij}=a_{ij}, \qquad \beta_{ij}=\frac{1}{a_{33}}(a_{ij}a_{33}-a_{i3}a_{3j}) \qquad (1.4)$$

Если оси x и y лежат в плоскостях упругой симметрии вещества, то $\beta_{26}=\beta_{16}=0$ и уравнение (1.1) приобретает вид

$$\beta_{22}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+(2\beta_{12}+\beta_{66})\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\beta_{11}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0 \qquad (1.5)$$

В случае изотропного вещества $\beta_{11}=\beta_{22}$, $2\beta_{12}+\beta_{66}=2\beta_{22}$.

2. Ограничимся рассмотрением плоской задачи для прямоугольной полосы (фиг. 1). Будем считать, что на кромках нам заданы напряжения в виде полиномов

$$Y_y=\sum_{k=0}^{k=n^\pm} p_i^{\pm}x^k, \qquad X_y=\sum_{k=0}^{k=m^\pm} r_k^{\pm}x^k. \qquad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем уславливаемся верхними индексами $+$ и $-$ отмечать величины, относящиеся соответственно к кромкам $y=+b$ и $y=-b$.

Решение интересующей нас задачи будем искать в виде ряда

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{k=N} f_k(y)\, x^k \tag{2.2}$$

где N равно большему из чисел $n^+ + 2$, $n^- + 2$, $m^+ + 1$, $m^- + 1$, а функции $f_k(y)$ подлежат определению; величина N выбирается из условия возможности удовлетворить условиям (2.1). Подставляя (2.2) в (2.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, найдем, что функции $f_k(y)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$k(k-1) f_k(\pm b) = p_{k-2}^{\pm}, \qquad k f_k'(\pm b) = -r_{k-1}^{\pm} \tag{2.3}$$

Так как $k-2 \geqslant 0$, то $k \geqslant 2$, т. е. при $k \geqslant 2$ каждая из функций $f_k(y)$ подчинена четырем граничным условиям, функция $f_1(y)$ подчинена двум граничным условиям, а функция $f_0(y)$ граничным условиям не подчинена.

Подставляя (2.2) в (1.1), делая приведение подобных членов и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях x, найдем, что функции $f_k(y)$ определяются системой дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{aligned}
\beta_{11} f_k^{\mathrm{IV}} &= 2\beta_{16}(k+1) f_{k+1}''' - (2\beta_{12}+\beta_{66})(k+2)(k+1) f_{k+2}'' + \\
&+ 2\beta_{26}(k+3)(k+2)(k+1) f_{k+3}' - \\
&- \beta_{22}(k+4)(k+3)(k+2)(k+1) f_{k+4} \qquad (0 \leqslant k \leqslant N-4) \\
\beta_{11} f_{N-3}^{\mathrm{IV}} &= 2\beta_{16}(N-2) f_{N-2}''' - (2\beta_{12}+\beta_{66})(N-1)(N-2) f_{N-1}'' + \\
&+ 2\beta_{26} N(N-1)(N-2) f_N' \\
\beta_{11} f_{N-2}^{\mathrm{IV}} &= 2\beta_{16}(N-1) f_{N-1}''' - (2\beta_{12}+\beta_{66}) N(N-1) f_N'' \\
\beta_{11} f_{N-1}^{\mathrm{IV}} &= 2\beta_{16} N f_N''' \qquad \beta_{11} f_N^{\mathrm{IV}} = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

При определении каждой из функций $f_k(y)$ системы (2.4) будут появляться четыре произвольных постоянных, определяемых при $k \geqslant 2$ из граничных условий (2.3), при определении же функций $f_0(y)$ и $f_1(y)$ остаются шесть произвольных постоянных, граничными условиями на кромках $y = \mathrm{const}$ не определяемых.

Если заметить, что функция напряжения $\varphi(x, y)$ интересует нас с точностью до линейного слагаемого, а первые два члена выражения (2.2) могут быть написаны в виде

$$\begin{aligned}
&a_0 + b_0 y + c_0 y^2 + d_0 y^3 + \frac{2\beta_{16}}{\beta_{11}}\left[a_1 y + \frac{1}{2} b_1 y^2 + \frac{1}{3} c_1 y^3 + \frac{1}{4} d_1 y^4\right] + \\
&+ [a_1 + b_1 y + c_1 y^2 + d_1 y^3 + \psi_1(y)]\, x + \psi_0(y)
\end{aligned}$$

где $\psi_0(y)$ и $\psi_1(y)$—вполне определенные функции, определяемые при последовательном интегрирования системы (2.4) и использовании граничных условий (2.3), то, очевидно, не умаляя общности решения, можно положить $a_0 = b_0 = a_1 = 0$, остальные же пять постоянных c_0, d_0, b_1, c_1, d_1 будут связаны двумя условиями

$$f_1'(+b) = r_0^+, \qquad f_1'(-b) = r_0^-$$

так, что три из них можно считать произвольными.

Этими тремя произвольными постоянными можно всегда распорядиться таким образом, чтобы сделать главный вектор и главный момент усилий, приложенных к одной из кромок $x = \mathrm{const}$, равными любым наперед заданным величинам.

Если оси x и y параллельны плоскостям упругой симметрии вещества, то $\beta_{26} = \beta_{16} = 0$ и система (2.1), как легко видеть, упрощается так, что в ней функции с четными и не-четными индексами разделяются. Если дополнительно положить $\beta_{11}=\beta_{22}$, $2\beta_{12}+\beta_{66}=2\beta_{22}$, то легко написать систему уравнений (2.4) для изотропного вещества.

Опубликованные до сих пор в литературе [2, 3] решения плоской задачи теории упругости изотропного тела в полиномах были получены путем наложения бигармонических полиномов, что, конечно, не дает возможности решать прямым ходом задачу при заданном распределении напряжений на кромках $y=\mathrm{const}$; изложенный в настоящей статье общий метод эту возможность даст. Подобным же образом производится и выделение алгебраической части интеграла дифференциального уравнения изгиба пластины, удовлетворяющей граничным условиям на двух параллельных кромках.

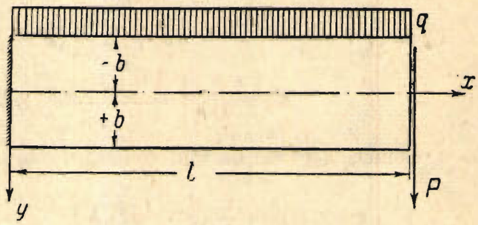
3. В качестве примера рассмотрим изгиб консоли, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой на конце (фиг. 2). Граничные условия задачи

при $y=-b$

$$Y_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-q, \qquad X_y=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0$$

при $y=+b$ (3.1)

$$Y_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0, \qquad X_y=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0$$



Фиг. 2

и, кроме того, при $x=l$ должно быть

$$\int_{-b}^{+b} X_x\,dy=\int_{-b}^{+b}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,dy=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{-b}^{+b}=0$$

$$\int_{-b}^{+b} X_y\,dy=-\int_{-b}^{+b}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\,dy=\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{-b}^{+b}=P \tag{3.2}$$

$$\int_{-b}^{+b} yX_x\,dy=\int_{-b}^{+b} y\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,dy=\left(y\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{-b}^{+b}-\int_{-b}^{+b}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy=\left(y\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varphi\right)_{-b}^{+b}=0$$

Функцию напряжения ищем в виде

$$\varphi(x,\ y)=f_0(y)+x\,f_1(y)+x^2f_2(y) \tag{3.3}$$

где функции $f_k(y)$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$f_0^{\mathrm{IV}}(y)=2\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}f_1'''-2\,\frac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{\beta_{11}}\,f_2'', \qquad f_1^{\mathrm{IV}}(y)=4\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\,f_2'',\ f_2^{\mathrm{IV}}(y)=0 \tag{3.4}$$

и граничным условиям

$$2f_2(-b)=-q, \qquad f_2(b)=0, \qquad f_2'(\pm b)=0, \qquad f_1'(\pm b)=0 \tag{3.5}$$

Условия (3.2) при подстановке в них выражения (3.3) и использовании (3.5) могут быть приведены к виду

$$\begin{gathered} f_0(+b)-f_0(-b)=0, \qquad f_1(+b)-f_1(-b)+P+ql=0 \\ b\,[f_0'(+b)+f_0'(-b)]-f_0(b)+f_0(-b)+Pl+\frac{1}{2}\,ql^2=0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Интегрируя систему (3.4) и подчиняя функции $f_k(y)$ условиям (3.5), найдем

$$f_2(y)=\frac{q}{8}\left(-2+3\frac{y}{b}-\frac{y^2}{b^2}\right), \qquad f_1(y)=q\,b\,\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\left(-3D_1\frac{y}{b}+\frac{1}{4}\frac{y^2}{b^2}+D_1\frac{y^3}{b^3}-\frac{1}{8}\frac{y^4}{b^4}\right)$$

$$f_0(y)=2qb\left(\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\right)^2\left(-\frac{3}{2}D_1\frac{y^2}{b^2}+\frac{1}{12}\frac{y^3}{b^3}+\frac{1}{4}D_1\frac{y^4}{b^4}-\frac{1}{40}\frac{y^5}{b^5}\right)-$$
$$-\frac{1}{4}qb^2\frac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{\beta_{11}}\left(-\frac{y^2}{b^2}+\frac{1}{2}\frac{y^3}{b^3}-\frac{1}{20}\frac{y^5}{b^5}\right)+c_0y^2+d_0y^3$$

Подставляя полученные выражения для функций $f_k(y)$ в условия (3.6), получим систему уравнений для определения постоянных D_1, c_0 и d_0:

$$-8qb\left(\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\right)^2D_1+4c_0b+\frac{2\beta_{12}+\beta_{22}}{\beta_{11}}qb=0,\qquad -4qb\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}D_1+P+ql=0$$
$$4d_0b^3+\frac{4}{15}\left(\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\right)^2-\frac{2}{5}\frac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{\beta_{11}}qb^2+Pl+\frac{1}{2}ql^2=0$$

Отсюда

$$c_0=\frac{1}{4b}\left[-\frac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{\beta_{11}}qb+2\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}(P+ql)\right],\qquad D_1qb\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}=\frac{1}{4}(P+ql)$$
$$d_0=\frac{1}{4b^2}\left[\frac{2}{5}\frac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{\beta_{11}}qb^2-\frac{4}{15}\left(\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\right)^2qb^2-Pl-\frac{1}{2}ql^2\right]$$

Общее выражение для функции напряжения будет

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}(P+ql)b\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\frac{y^2}{b^2}+\left[\frac{1}{1}\left(\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\right)^2qb^2-\frac{1}{40}\frac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{\beta_{11}}qb^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\left(P+\frac{1}{2}ql\right)l\right]\frac{y^3}{b^3}+\frac{1}{8}(P+ql)\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\frac{y^4}{b^4}+\frac{1}{20}qb^2\left[\frac{1}{4}\frac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{\beta_{11}}-\left(\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\right)^2\right]\frac{y^5}{b^5}+$$
$$+x\left[-\frac{3}{4}(P+ql)\frac{y}{b}+\frac{1}{4}qb\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\frac{y^2}{b^2}+\frac{1}{4}(P+ql)\frac{y^3}{b^3}-\frac{1}{8}qb\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\frac{y^4}{b^4}\right]+$$
$$+x^2\left[-2+3\frac{y}{b}-\frac{y^3}{b^3}\right]\tag{3.7}$$

На этом решение задачи может считаться законченным, так как определение напряжений по формулам (1.2) затруднений не представляет. Определив перемещения, соответствующие функции напряжения (3.7), можно между прочим выяснить влияние сдвигов на стрелку прогиба.

Положив $P=-ql$ в выражении (3.7), получим функцию напряжения для изгиба свободно опертой полосы длиной $2l$, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, интенсивностью q. Для изотропного тела (при $q=0$) получим

$$\varphi(x,y)=-\frac{1}{4}P(l-x)\frac{y^3}{b^3}-\frac{3}{4}Px\frac{y}{b}$$

что приводит к известному решению об изгибе консоли, нагруженной на конце сосредоточенной силой.

Поступила в редакцию
30 IX 1944.

A. A. KURDUMOV.—SOLUTION BY POLYNOMIALS OF THE PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR RECTANGULAR ANISOTROPIC PLATES

The author seeks the solution of equation (1.1) in the form of a polynomial (2.2), satifying the boundary conditions (2.1). The problem is reduced to a system of differential equations of the 4th order (2.4), the boundary conditions having the form (2.3).

As an illustration, the case of a cantilever is considered, under the action of a uniformly distributed load, and a concentrated force at the end.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Прикладная математика и механика. 1936. Т. III. Вып. 1.
2. Mesnager A. Comptes rendus. 1901. T. 132 [P. 1475].
3. Timpe A. Zeitschr. f. Math. Physik. 1905. Bd. 52 [S. 343].