Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

ЗАМЕТКИ

ИЗГИБ ТОНКОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

М. М. Фридман

(Саратов)

1. Тонкая бесконечная плита с отверстием изгибается усилиями, приложенными на краю отверстия и изгибающими и скручивающим моментами на бесконечности; перерезывающие силы на бесконечности равны нулю. Главный вектор усилий, приложенных на краю отверстия, равен нулю. Обозначим, как обычно, через D, E, ν—цилиндрическую жесткость плиты, модуль Юнга, коэффициент Пуассона. Примем среднюю плоскость плиты за плоскость xy; ось Z направим вертикально вниз. Начало координат располагаем внутри отверстия.

Прогиб плиты w, изгибающие и скручивающий моменты M_x, M_y, H_{xy}, перерезывающие силы N_x, N_y могут быть выражены через две функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$, голоморфные в области плиты [2]:

$$w=2\mathrm{Re}\,[\bar{z}\,\varphi(z)+\chi(z)] \tag{1.1}$$

$$M_y-M_x+2iH_{xy}=4(1-\nu)D\,[\bar{z}\,\varphi''(z)+\chi''(z)]$$
$$M_x+M_y=-8(1+\nu)D\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z),\qquad N_x-iN_y=-8D\,\varphi''(z) \tag{1.2}$$

Если вдоль края отверстия заданы изгибающий момент m и перерезывающая сила p (первая основная задача), то граничное условие для функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ представится в виде

$$\varphi'(z)-\frac{3+\nu}{1-\nu}\overline{\varphi'(z)}-e^{2i\alpha}\,[\bar{z}\,\varphi''(z)+\chi''(z)]=f_1+if_2+iC_1 \tag{1.3}$$

$$f_1+if_2=\frac{1}{2(1-\nu)D}\left(m-i\int_0^s p\,ds\right) \tag{1.4}$$

Здесь α—угол между осью x и нормалью к контуру отверстия, s—дуга контура отверстия, C_1—действительная постоянная.

Если на краю отверстия заданы прогиб и производная от прогиба по нормали (вторая основная задача), то, отвлекаясь от жестких перемещений, граничное условие можно записать в виде

$$\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}-e^{2i\alpha}\,[z\,\varphi''(z)+\chi''(z)]=g_1+ig_2 \tag{1.5}$$

$$g_1+ig_2=\frac{1}{2}\,e^{i\alpha}\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+i\,\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{1.6}$$

Пусть $z=\omega(\zeta)$ есть функция, отображающая взаимно однозначно и конформно область бесконечной плиты с отверстием на внешность окружности γ радиуса 1 плоскости комплексного переменного ζ таким образом, что бесконечно удаленные точки плоскостей z и ζ соответствуют друг другу.

Изгибающие и скручивающий моменты M_ρ, M_ϑ, $H_{\rho\vartheta}$, перерезывающие силы N_ρ, N_ϑ, отнесенные в плоскости z к криволинейной ортогональной системе координат, которая отображается в полярную систему координат ρ, ϑ плоскости ζ, будут равны

$$M_\vartheta-M_\rho+2iH_{\rho\vartheta}=\frac{4(1-\nu)D\zeta^2}{\rho^2\,\overline{\omega'(\zeta)}}\,[\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)]$$

$$M_\rho + M_\vartheta = -8(1+\nu) D \operatorname{Re} \Phi(\zeta), \qquad N_\rho - i N_\vartheta = -\frac{8D\zeta\Phi'(\zeta)}{\rho\,|\omega'(\zeta)|} \tag{1.7}$$

Функции $\Phi(\zeta) = \varphi'[\omega(\zeta)]$ и $\Psi(\zeta) = \chi''[\omega(\zeta)]$ голоморфны и однозначны вне окружности γ, включая $\zeta = \infty$, т. е. при $|\zeta| > 1$

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= B + iC + \Phi_0(\zeta), \qquad & \Phi_0(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k} \\ \Psi(\zeta) &= B' + iC' + \Psi_0(\zeta), \qquad & \Psi_0(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \zeta^{-k} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Положим $C = 0$. Постоянные B, B', C' определяют моменты на бесконечности [6]

$$M_x^\infty = -2D[2(1+\nu)B + (1-\nu)B']$$

$$M_y^\infty = -2D[2(1+\nu)B - (1-\nu)B'], \qquad H_{xy}^\infty = 2D(1-\nu)C' \tag{1.9}$$

Из условий однозначности перемещений следует, что $a_1 = \overline{a_1'}$ и $a_2' = \overline{a_2'}$.

Граничные условия (1.3) и (1.5) при отображении преобразуются в условия на окружности γ, т. е. так как $\rho = 1$, то при $z = e^{i\vartheta} = \sigma$ примут вид

$$\Phi(\sigma) - \frac{3+\nu}{1-\nu}\overline{\Phi}(\bar\sigma) - \frac{\sigma^2}{\overline{\omega'}(\bar\sigma)}[\overline{\omega}(\bar\sigma)\Phi'(\sigma) + \omega'(\sigma)\Psi(\sigma)] = f_1 + if_2 + iC_1 \tag{1.10}$$

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi}(\bar\sigma) - \frac{\sigma^2}{\overline{\omega'}(\bar\sigma)}[\overline{\omega}(\bar\sigma)\Phi'(\sigma) + \omega'(\sigma)\Psi(\sigma)] = g_1 + ig_2 \tag{1.11}$$

2. Функция [5,4,7]

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-n}) \tag{2.1}$$

при $n = 1, 2, 3, \ldots$ отображает область бесконечной плиты соответственно с эллиптическим, правильным криволинейным треугольным, четырехугольным и т. д. отверстием на внешность окружности γ плоскости ζ. Здесь $R > 0$ и $-1 < mn < +1$; если $mn^2 = \pm 1$, то отверстие представляет собой правильный почти прямолинейный многоугольник с закругленными углами, — кривизна в серединах сторон равна нулю; радиус кривизны в вершинах равен $R(n-1)^2/(2n^2)$.

Подставив в граничное условие (1.10) первой основной задачи и в условие комплексно сопряженное с ним значение отображающей функции (2.1), умножим первое и второе из полученных соотношений соответственно на

$$\frac{1}{2\pi i}(1 - mn\sigma^{n+1})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}, \qquad \frac{1}{2\pi i}(1 - mn\sigma^{-n-1})\frac{d\sigma}{\sigma-\varphi} \; (|\zeta| > 1)$$

и проинтегрируем вдоль γ против часовой стрелки [3]. Получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\Phi_0(\sigma) - \frac{3+\nu}{1-\nu}\overline{\Phi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right](1 - mn\sigma^{n+1})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Phi'_0(\sigma)(\sigma + m\sigma^{n+2})\frac{\sigma d}{\sigma-\zeta} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Psi_0(\sigma)(\sigma^2 - mn\sigma^{-n+1})\frac{d\sigma}{\sigma-\xi} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (f_1^\circ + f_2^\circ)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{C_1}{2\pi}\int_\gamma (1 - mn\sigma^{n+1})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$\frac{1}{2\pi t}\int_\gamma \left[\Phi_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{3+\nu}{1-\nu}\Phi_0(\sigma)\right](1 - mn\sigma^{-n-1})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \tag{2.2}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \overline{\Phi}_0'\left(\frac{1}{\sigma}\right)(\sigma^{-1} + m\sigma^{-n-2})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \overline{\Psi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)(\sigma^{-2} - mn\sigma^{n-1})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} =$$

$$
= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (f_1{}^\circ - i f_2{}^\circ) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{C_1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} (1 - mn\sigma^{-n-1}) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}
$$

$$
f_1{}^\circ + i f_2{}^\circ = (f_1 + i f_2)(1 - mn\sigma^{n+1}) + 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} B (1 - mn\sigma^{n+1}) + \\ + (B' + iC')(\sigma^2 - mn\sigma^{-n+1}) \qquad (2.3)
$$

В результате вычисления интегралов, входящих в (2.2), найдем

$$
\frac{3+\nu}{1-\nu} (\zeta^{n+1} - mn) \Phi_0(\zeta) = \zeta^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f_1{}^\circ - i f_2{}^\circ}{\sigma - \zeta} d\sigma - \bar{a}_1{}' \zeta^n - \sum_{k=1}^{n} m(n-k) \bar{a}_k \zeta^k - imnC_1
$$

$$
\frac{\zeta^{n+1} - mn}{\zeta^{n+1}} \Psi_0(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f_1{}^\circ + i f_2{}^\circ}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1 - mn\zeta^{n+1}}{\zeta^2} \Phi_0(\zeta) - \frac{1 + m\zeta^{n+1}}{\zeta} \Phi_0{}'(\zeta) + \\ + \sum_{k=1}^{n} m(n-k) a_k \zeta^{n-k-1} + \frac{a_1{}'}{\zeta} + \frac{a_2{}' - m a_{n+1}}{\zeta^2} \qquad (2.4)
$$

Неизвестные коэффициенты равны

$$
a_1 = \bar{a}_1{}' = \frac{1-\nu}{4} A_1, \qquad a_k = (1-\nu) \frac{(3+\nu) A_k - (1-\nu) m (k-1) \bar{A}_{n-k+1}}{(3+\nu)^2 - (1-\nu)^2 m^2 (k-1)(n-k)}
$$

$$
(k = 2, \ldots, n-1;\ n \geqslant 3)
$$

$$
a_2{}' - m a_{n+1} = A - iC_1, \qquad 2iC_1 = \frac{(3+\nu)(A - \bar{A}) + (1-\nu) m (A_{n+1} - \bar{A}_{n+1})}{3 + \nu + (1-\nu) m^2 n} \qquad (2.5)
$$

$$
A = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (f_1{}^\circ + i f_2{}^\circ) \frac{d\sigma}{\sigma}, \qquad A_k = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (f_1{}^\circ - i f_2{}^\circ) \sigma^{k-1} d\sigma \qquad (k = 1, 2, \ldots)
$$

Вторая основная задача решается тождественно

$$
(\zeta^{n+1} - mn) \Phi_0(\zeta) = -\zeta^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g_1{}^\circ - i g_2{}^\circ}{\sigma - \zeta} d\sigma + a_1{}' \zeta^n + \sum_{k=1}^{n} m(n-k) \bar{a}_k \zeta^k
$$

$$
\frac{\zeta^{n+1} - mn}{\zeta^{n+1}} \Psi_0(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g_1{}^\circ + i g_2{}^\circ}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1 - mn\zeta^{n+1}}{\zeta^2} \Phi_0(\zeta) - \frac{1 + m\zeta^{n+1}}{\zeta} \Phi_0{}'(\zeta) + \\ + \sum_{k=1}^{n} m(n-k) a_k \zeta^{n-k-1} + \frac{a_1{}'}{\zeta} + \frac{a_2{}' - m a_{n+1}}{\zeta^2} \qquad (2.6)
$$

$$
g_1{}^\circ + i g_2{}^\circ = (g_1 + i g_2)(1 - mn\sigma^{n+1}) - 2B(1 - mn\sigma^{n+1}) + (B' + iC')(\sigma^2 - mn\sigma^{-n+1}) \qquad (2.7)
$$

$$
a_1 = \bar{a}_1{}' = \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x{}^* + i M_y{}^*}{8RD}, \qquad a_2{}' - m a_{n+1} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (g_1{}^\circ + i g_2{}^\circ) \frac{d\sigma}{\sigma}
$$

$$
a_k = -\frac{B_k + m(k-1) \bar{B}_{-k+1n}}{1 - m^2 (k-1)(n-k)} \qquad (k = 2, \ldots, n-1;\ n \geqslant 3) \qquad (2.8)
$$

$$
B_k = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (g_1{}^\circ - i g_2{}^\circ) \sigma^{k-1} d\sigma \qquad (k = 1, 2, \ldots)
$$

Здесь (M_x^*, M_y^*) главный момент усилий, приложенных вдоль края отверстия, который предполагается заданным.

3. Выпишем значения функций $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ и значения изгибающих моментов M_ρ, M_ϑ на краю отверстия при одностороннем изгибе плиты моментами $M_{x'}^\infty = M$, $M_{y'}^\infty = 0$, $H_{x'y'}^\infty = 0$ на бесконечности, когда на краю отверстия либо изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю (плита ослаблена отверстием), либо прогиб и производная от прогиба по нормали равны нулю (плита с впаянной жесткой шайбой). Ось Ox' ортогональна Oy' и составляет с осью Ox угол α.

Плита ослаблена эллиптическим отверстием

$$\Phi(\zeta) = -\frac{M}{4D}\left\{\frac{1}{2(1+\nu)} + \left[\frac{m-\cos 2\alpha}{3+\nu} - i\,\frac{(1-m^2)\sin 2\alpha}{3+\nu+m^2(1-\nu)}\right]\frac{1}{\zeta^2-m}\right\} \tag{3.1}$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{M}{4D}\left\{\frac{e^{-2i\alpha}}{1-\nu} - \left[\frac{1}{3+\nu}\left(\frac{4}{1-\nu} - \frac{\cos 2\alpha}{m}\right) - i\,\frac{1-\nu+m^2(3+\nu)}{3+\nu+m^2(1-\nu)}\,\frac{\sin 2\alpha}{(1-\nu)\,m}\right]\frac{1}{\zeta^2} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{m-\cos 2\alpha}{3+\nu} - i\,\frac{(1-m^2)\sin 2\alpha}{3+\nu+m^2(1-\nu)}\right]\frac{(1+m^2)(\zeta^2+m)}{m(\zeta^2-m)^2}\right\}\frac{\zeta^2}{\zeta^2-m}$$

$$M_\rho = 0$$

$$M_\vartheta = M - \frac{2(1+\nu)M}{1-2m\cos 2\vartheta+m^2}\left[\frac{m-\cos 2\alpha}{3+\nu}(m-2\cos\vartheta) + \frac{(1-m^2)\sin 2\alpha}{3+\nu+m^2(1-\nu)}\sin 2\vartheta\right] \tag{3.2}$$

Плита с впаянной жесткой эллиптической шайбой

$$\Phi(\zeta) = -\frac{M}{4D}\left[\frac{1}{2(1+\nu)} + \left(\frac{m}{1+\nu} + \frac{e^{2i\alpha}}{1-\nu}\right)\frac{1}{\zeta^2-m}\right] \tag{3.3}$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{M}{4D}\left[\frac{e^{-2i\alpha}}{1-\nu} - \frac{e^{2i\alpha}}{(1-\nu)\,m}\,\frac{1}{\zeta^2} + \left(\frac{m}{1+\nu} + \frac{e^{2i\alpha}}{1-\nu}\right)\frac{(1+m^2)(\zeta^2+m)}{m(\zeta^2-m)^2}\right]\frac{\zeta^2}{\zeta^2-m}$$

$$M_\rho = \frac{M}{1+\nu} - \frac{2M}{1-2m\cos 2\vartheta+m^2}\left[\left(\frac{m}{1+\nu} + \frac{\cos 2\alpha}{1-\nu}\right)(m-\cos 2\vartheta) - \frac{\sin 2\alpha}{1-\nu}\sin 2\vartheta\right]$$

$$M_\vartheta = \nu M_\rho \tag{3.4}$$

Плита ослаблена криволинейным треугольным отверстием

$$\Phi(\zeta) = -\frac{M}{4D}\left[\frac{1}{2(1+\nu)} + \left(\frac{2m}{3+\nu} - \frac{e^{2i\alpha}}{3+\nu}\zeta\right)\frac{1}{\zeta^3-2m}\right] \tag{3.5}$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{M}{4D}\left[\frac{e^{-2i\alpha}}{1-\nu} - \frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)}\,\frac{1}{\zeta^2} + \left(\frac{\zeta^3+4m}{3+\nu} - \frac{3e^{2i\alpha}\zeta}{3+\nu}\right)\frac{\zeta(1+2m^2)}{(\zeta^3-2m)^2}\right]\frac{\zeta^3}{\zeta^3-2m}$$

$$M_\rho = 0$$

$$M_\vartheta = \frac{2M}{3+\nu} + \frac{2(1+\nu)M}{1-4m\cos 3\vartheta+4m^2}\left[\frac{1-4m^2}{2(3+\nu)} + \frac{2m}{3+\nu}\cos(\vartheta+2\alpha) - \frac{1}{3+\nu}\cos 2(\vartheta-\alpha)\right] \tag{3.6}$$

Плита с впаянной жесткой треугольной шайбой

$$\Phi(\zeta) = -\frac{M}{4D}\left[\frac{1}{2(1+\nu)} + \left(\frac{2m}{1+\nu} + \frac{e^{2i\alpha}}{1-\nu}\zeta\right)\frac{1}{\zeta^3-2m}\right] \tag{3.7}$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{M}{4D}\left[\frac{e^{-2i\alpha}}{1-\nu} + \left(\frac{\zeta^3+4m}{1+\nu} + \frac{3e^{2i\alpha}\zeta}{1-\nu}\right)\frac{\zeta(1+2m^2)}{(\zeta^3-2m)^2}\right]\frac{\zeta^3}{\zeta^3-2m}$$

$$M_\rho = \frac{2M}{1-4m\cos 3\vartheta+4m^2}\left[\frac{1-4m^2}{2(1+\nu)} - \frac{2m}{1-\nu}\cos(\vartheta+2\alpha) + \frac{1}{1-\nu}\cos 2(\vartheta-\alpha)\right]$$

$$M_\vartheta = \nu M_\rho \tag{3.8}$$

Плита ослаблена криволинейным четыреугольным отверстием

$$\Phi(\zeta)=-\frac{M}{4D}\left\{\frac{1}{2(1+\nu)}+\left[\frac{3m}{3+\nu}-\frac{(3+\nu)e^{2i\alpha}-m(1-\nu)e^{-2i\alpha}}{(3+\nu)^2-m^2(1-\nu)^2}\zeta^2\right]\frac{1}{\zeta^4-3m}\right\}$$

$$\Psi(\zeta)=-\frac{M}{4D}\left\{\frac{e^{-2i\alpha}}{1-\nu}-\frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)}\frac{1}{\zeta^2}+\left[\frac{\zeta^2(\zeta^4+9m)}{3+\nu}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-3\frac{(3+\nu)e^{2i\alpha}-m(1-\nu)e^{-2i\alpha}}{(3+\nu)^2-m^2(1-\nu)^2}(\zeta^4+m)\right]\frac{1+3m^2}{(\zeta^4-3m)^2}\right\}\frac{\zeta^4}{\zeta^4-3m} \tag{3.9}$$

$$M_\rho=0$$

$$M_\vartheta=\frac{2M}{3+\nu}+\frac{2(1+\nu)M}{1-6m\cos 4\vartheta+9m^2}\left[\frac{1-9m^2}{2(3+\nu)}-\frac{(1-3m)\cos 2\alpha}{3+\nu+m(1-\nu)}\cos 2\vartheta-\right.$$
$$\left.-\frac{(1+3m)\sin 2\alpha}{3+\nu-m(1-\nu)}\sin 2\vartheta\right] \tag{3.10}$$

Плита с впаянной жесткой четыреугольной шайбой

$$\Phi(\zeta)=-\frac{M}{4D}\left\{\frac{1}{2(1+\nu)}+\left[\frac{3m}{1+\nu}+\frac{e^{2i\alpha}+me^{-2i\alpha}}{(1-\nu)(1-m^2)}\zeta^2\right]\frac{1}{\zeta^4-3m}\right\}$$

$$\Psi(\zeta)=-\frac{M}{4D}\left\{\frac{e^{-2i\alpha}}{1-\nu}+\left[\frac{\zeta^2(\zeta^4+9m)}{1+\nu}+3\frac{e^{2i\alpha}+me^{-2i\alpha}}{(1-\nu)(1-m^2)}(\zeta^4+m)\right]\frac{1+3m^2}{(\zeta^4-3m)^2}\right\}\frac{\zeta^4}{\zeta^4-3m} \tag{3.11}$$

$$M_\rho=\frac{2M}{1-6m\cos 4\vartheta+9m^2}\left[\frac{1-9m^2}{2(1+\nu)}+\frac{(1-3m)\cos 2\alpha}{(1-\nu)(1-m)}\cos 2\vartheta+\frac{(1+3m)\sin 2\alpha}{(1-\nu)(1+m)}\sin 2\vartheta\right]$$
$$M_\vartheta=\nu M_\rho \tag{3.12}$$

Поступила в редакцию
19 I 1944

M. M. FRIEDMAN.—BENDING OF A THIN ISOTROPIC PLATE HAVING AN APERTURE

By employing the method of the functions of the complex variable, the author investigates the bending of a thin isotropic infinite plate having either an elliptic, triangular or rectangular aperture.

The problem is solved for cases when the forces and moments on the contour of the aperture are given (first problem), and when displacements of the middle surface of the plate at the contour and normal derivatives of these displacements are given (second problem).

ЛИТЕРАТУРА

1. Goodier J. N. Philosophical Magazine and Journal of Science. 1936. Vol. 22.n° 145.
2. Лехницкий С. Г. Прикладная математика и механика. 1938. Т. II. В. 2. [Стр. 181—210].
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. 1935. [Стр. 228—246].
4. Нейман М. И. Труды ЦАГИ. 1937. Вып. 313.
5. Соколов Н. А. Бюллетень НТК УВМС РККА. 1930. В. IV. [Стр. 39—71].
6. Фридман М. М. Прикладная математика и механика. 1941. Т. V. В. I. [Стр. 90—100].
7. Шапиро Г. С. Известия АН СССР. ОТН. 1941. № 5. [Стр. 105—109].