

СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЕРЕКАТЫВАНИЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Н. И. Глаголев

(Москва)

Если в относительном движении двух тел оси мгновенного вращения лежат на поверхности их соприкосновения, мы имеем чистое качение одного тела по другому. Деформации тел искажают чистое качение, переводя его в физическое или реальное качение, сопровождаемое скольжением.

Явление качения, трение качения или, более правильно, сопротивление перекатыванию мало изучены. Важнейшие исследования в этой области проведены Н. П. Петровым^[1] и О. Рейнольдсом^[2].

В последнее время изучением сопротивления перекатыванию тел (фрикционная передача) занимался Фромм^[3]. В его исследовании имеют место многочисленные допущения и некоторые из основных полученных им результатов физически противоречивы. В математическом исследовании Фромм ограничивается использованием результатов, полученных Герцем^[4].

Исследованием сопротивления перекатыванию твердых цилиндрических тел по упругому и неупругому основаниям занимался также А. Ю. Ишлинский^[5].

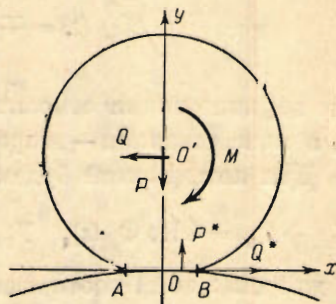
В настоящей статье рассматривается плоская задача о сопротивлении перекатыванию упругого цилиндрического тела по упругому основанию. В основу взята схема явления качения, предложенная О. Рейнольдсом, — предполагается, что сопротивление перекатыванию обусловлено трением скольжения вследствие относительного смещения частиц на поверхности соприкосновения. Для вывода основных уравнений задачи мы пользуемся методами, разработанными Г. В. Колосовым^[6] и Н. И. Мухелишвили^[7], а для их решения — методом Карлемана^[8], впервые примененным к задачам теории упругости Д. И. Шерманом^[9].

1. Постановка и уравнения задачи. Изучаемая схема двух тел при перекатывании в виде двух дисков и расположение осей координат представлены на фиг. 1. Будем предполагать, что длина линии контакта тел мала по сравнению с линейными размерами поперечного сечения тел, возвышения от шероховатости малы по сравнению с длиной линии контакта, тела претерпевают только упругие деформации и влиянием упругого последствия можно пренебречь.

В случае ведущего диска на него действуют активный момент M , стремящийся вращать диск вокруг оси, вертикальная сила P и горизонтальная сила Q , приложенные к оси, причем Q равна и по направлению противоположна реализуемой силе тяги Q^* , действующей на ободе и на-

правленной в сторону движения его оси, а также нормальная реакция основания $P^* = P$.

В случае ведомого диска на него действует вертикальная сила P , приложенная к оси вращения, горизонтальная сила Q , также приложенная к оси и направленная в сторону ее движения, и тормозящий момент M . Реакция основания, действующая на диск, представляется горизонтальной силой трения $Q^* = Q$, приложенной к ободу и направленной в сторону, обратную движению его оси, и нормальной реакцией $P^* = P$.

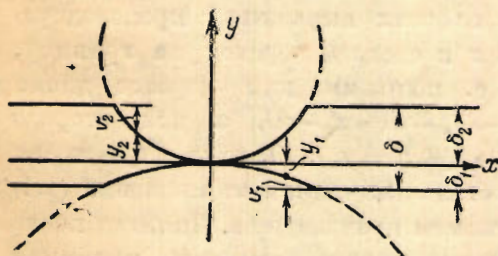


Фиг. 1

В случае ведущего колеса касательные напряжения (трение, препятствующее относительным смещениям его частиц) направлены в сторону движения оси. В случае ведомого колеса трение направлено в сторону, противоположную движению его оси.

Следуя Рейнольдсу, мы предполагаем, что на линии касания имеются два участка скольжения и один сцепления¹. Все процессы на линии контакта тел предполагаются непрерывными, а напряжения, смещения и деформации еще и конечными.

Следуя обычному в теории местного сжатия тел методу, примем, что диски как бы примыкают к двум полуплоскостям (фиг. 2).



Фиг. 2

Длину линии контакта (фиг. 3), т. е. отрезок $(-a, +b)$ оси x обозначим буквой c .

Для дальнейшего условимся напряжения, смещения, деформации, упругие постоянные и другие величины, относящиеся к первому диску, отмечать значком один, а относящиеся ко второму — значком два.

При взаимодействии упругих полуплоскостей примыкающие к ним малые круговые выступы деформируются.

Вследствие относительной малости длины линий контакта граничные условия для взаимодействующих тел могут быть заданы вдоль граничной прямой $y=0$.

Пусть на линии контакта $y=0$ ($-a \leq x = t_0 \leq b$) на первый диск действуют нормальные сжимающие напряжения $Y_{y1} = -P(x) = -P(t_0)$ и касательные напряжения $X_{y1} = T(x) = T(t_0)$, а вне этого участка контакта $Y_{y1} = 0$, $X_{y1} = 0$; на второй диск вдоль того же участка действуют нормальные сжимающие напряжения $Y_{y2} = -P(x) = -P(t_0)$ и касательные напряжения $X_{y2} = T(x) = T(t_0)$, а вне участка $Y_{y2} = 0$, $X_{y2} = 0$. Требуется определить выражения напряжений и смещений точек внутри тел.

¹ Случай одного участка скольжения и одного участка трения, как будет показано в разделе 3, осуществиться не может.

Следуя Мусхелишвили [7], воспользуемся функциями

$$\Phi_{1,2}(z) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^b \frac{P(t) + iT(t)}{t-z} dt \quad (1.1)$$

$$\Psi_{1,2}(z) = \mp \frac{1}{\pi} \int_{-a}^b \frac{T(t)}{t-z} dt \mp \frac{z}{2\pi i} \int_{-a}^b \frac{P(t) + iT(t)}{(t-z)^2} dt \quad (1.2)$$

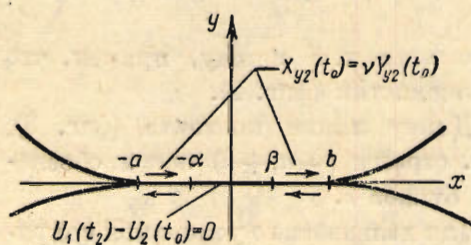
где верхние знаки относятся к первому диску, т. е. соответствуют индексу 1, а нижние знаки — второму диску, т. е. индексу 2.

Для напряжений будем иметь соотношения Мусхелишвили

$$X_{xk} + Y_{yk} = 4 \operatorname{Re} \Phi_k(z), \quad Y_{yk} - X_{xk} + 2i X_{yk} = 2 [\bar{z} \Phi_k'(z) + \Psi_k(z)] \quad (k=1,2) \quad (1.3)$$

а для смещений соотношения

$$2\mu_k (u_k + iv_k) = \mp \frac{x_k + 1}{2\pi i} \int_{-a}^b [P(t) + iT(t)] \lg |t-z| dt \mp \mp \frac{x_k - 1}{2\pi} \int_{-a}^b [P(t) + iT(t)] \arg(t-z) dt \mp \frac{1}{2\pi i} \int \frac{[P(t) - iT(t)](t-z)}{t-z} dt \quad (1.4)$$



Фиг. 3

где

$$x_k = \frac{\lambda_k + 3\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \quad (k=1,2)$$

Возьмем от первых членов правой части этих выражений производную по x и сделаем переход на границу, т. е. положим для первого диска $z \rightarrow t_0 - i0 = x_0 - i0$, а для второго $z \rightarrow t_0 + i0 = x_0 + i0$, где t_0 — любая

точка на участке $-a \leq t_0 \leq b$ оси x ; в остальных членах соотношений (1.4) сделаем предельный переход и затем возьмем производную. Вычитая после этих преобразований из первого выражения второе, получим, принимая под интегралами их главные значения,

$$C \left\{ i \left[\frac{du_1(t_0)}{dt_0} - \frac{du_2(t_0)}{dt_0} \right] - \left[\frac{dv_1(t_0)}{dt_0} - \frac{dv_2(t_0)}{dt_0} \right] \right\} = \int_{-a}^b \frac{[P(t) + iT(t)]}{t-t_0} dt + iA [P(t_0) + iT(t_0)] \quad (1.5)$$

где приняты обозначения

$$A = \pi \left(\frac{x_1 - 1}{\mu_1} - \frac{x_2 - 1}{\mu_2} \right) / \left(\frac{x_1 + 1}{\mu_1} + \frac{x_2 + 1}{\mu_2} \right), \quad C = 4\pi / \left(\frac{x_1 + 1}{\mu_1} + \frac{x_2 + 1}{\mu_2} \right) \quad (1.6)$$

Если вдоль линии контакта заданы смещения, то соотношение (1.5) будет представлять сингулярное интегральное уравнение для определения неизвестных напряжений. Учет смятия тел дает выражение разности упругих вертикальных смещений точек, расположенных вдоль линии контакта. Из чертежа (фиг. 3) следует, что

$$v_1^*(t_0) + v_2^*(t_0) + y_1(t_0) + y_2(t_0) = \delta \quad (1.7)$$

Если круговые выступы тел сплющатся и граница тел в области их касания станет плоской, то упругие смещения тел с точностью до жесткого перемещения будут соответственно $-v_1^*(t_0) + \delta_1$ и $+v_2^*(t_0) - \delta_2$.

Однако возможно отступление от такого вида деформаций тел. Одно из тел может сохранить некоторую выпуклость, а другое получить вмятие. Так как контакт тел не должен нарушиться, то в выражения упругих вертикальных смещений тел может, следовательно, дополнительно войти еще некоторая функция $v(t_0)$, одна и та же для обоих тел, определяемая механическими свойствами тел, их габаритами и величиной действующих сил. Таким образом упругие вертикальные смещения точек тел с точностью до одного и того же жесткого смещения определяются выражениями

$$\begin{aligned} v_1(t_0) &= -v_1^*(t_0) + v(t_0) + \delta_1 \\ v_2(t_0) &= v_2^*(t_0) + v(t_0) - \delta_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для величин $y_1(t_0)$ и $y_2(t_0)$ можно приближенно принять

$$y_1(t_0) \approx \frac{t_0^2}{2R_1}, \quad y_2(t_0) \approx \frac{t_0^2}{2R_2} \quad (1.9)$$

где R_1 и R_2 радиусы дисков.

Это вытекает, например, из подобия указанных на фиг. 4 треугольников KLM и LMN .

Для разности упругих смещений получим

$$v_1(t_0) - v_2(t_0) = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \frac{t_0^2}{2}. \quad (1.10)$$

Пользуясь этим соотношением, уравнение (1.5) можно представить в виде

$$-\int_{-a}^b \frac{P(t) + iT(t)}{t - t_0} dt - Ai [P(t_0) + iT(t_0)] = Bt_0 + if(t_0) \quad (1.11)$$

где

$$B = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} C, \quad f(t_0) = C \left[\frac{du_2(t_0)}{dt_0} - \frac{du_1(t_0)}{dt} \right]$$

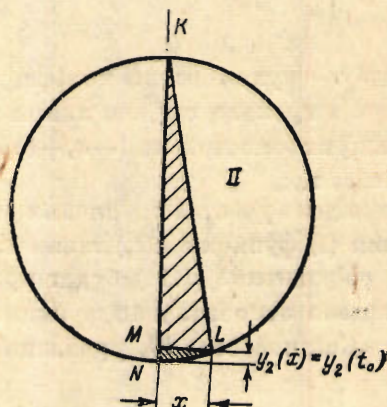
а A и C определяются формулами (1.6). Отсюда можно получить, отделяя действительную и мнимую части:

$$-\int_{-a}^b \frac{P(t)}{t - t_0} dt + AT(t_0) = Bt_0 \quad (1.12)$$

$$-\int_{-a}^b \frac{T(t) dt}{t - t_0} - AP(t_0) = C \left[\frac{du_2(t_0)}{dt_0} - \frac{du_1(t_0)}{dt} \right] \quad (1.13)$$

2. Определение сопротивления перекатыванию цилиндрических тел.

Положим, что на линии контакта ($-a \leq x = t_0 \leq b$) ведущего диска, движущегося слева направо (фиг. 3), с основанием имеются два участка скольжения ($-\alpha \leq t_0 \leq -\alpha$), ($\beta \leq t_0 \leq b$) и один участок сцепления ($-\alpha \leq t_0 \leq \beta$).



Фиг. 4

Вдоль всей линии контакта имеет место условие

$$v_1(t_0) - v_2(t_0) = \frac{t_0^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.1)$$

На участке сцепления разность горизонтальных смещений точек тел равна нулю

$$u_1(t_0) - u_2(t_0) = 0 \quad (2.2)$$

На участках скольжения, совокупность которых обозначим (s) , касательные напряжения (трение, препятствующее относительным смещениям частиц тела) пропорциональны нормальным

$$T(t_0) = -\nu P(t_0) \quad (2.3)$$

где ν — кулоновский коэффициент трения скольжения.

На границе тел вне линии контакта, т. е. в нашей постановке, на границах полуплоскостей не $(-a, +b)$, нормальные и тангенциальные усилия отсутствуют.

Вдоль участка сцепления $f(t_0) = 0$. Будем считать, что на участках скольжения (s) функция $f(t_0)$ также известна.

Уравнение (1.11) будет представлять собой сингулярное уравнение Карлемана относительно функции $P(t_0) + iT(t_0)$.

Как известно [3], уравнение Карлемана имеет вид

$$\psi(t_0) \varphi(t_0) - \lambda \int_{(s)} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = f(t_0) \quad (2.4)$$

где t и t_0 — вещественные переменные, $\psi(t_0)$ и $f(t_0)$ — заданные комплексные или действительные функции, λ — действительное положительное число, (s) совокупность n отрезков $a_i \leq t_0 \leq b_i$, причем $i = 1, 2, \dots, n$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) = & \frac{\psi(t_0) f(t_0)}{\psi^2(t_0) + \pi^2 \lambda^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{\psi^2(t_0) + \pi^2 \lambda^2}} e^{\omega(t_0)} \int_{(s)} \frac{f(t)}{\sqrt{\psi^2(t) + \pi^2 \lambda^2}} e^{-\omega(t)} \frac{dt}{t-t_0} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\psi^2(t_0) + \pi^2 \lambda^2}} e^{\omega(t_0)} \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{b_i - t_0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где K_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — произвольные, вообще говоря, комплексные постоянные, а величины

$$\omega(t_0) = \int_{(s)} \frac{\theta(t) dt}{t-t_0}, \quad \theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \lg \frac{\psi(t) + \lambda \pi i}{\psi(t) - \lambda \pi i} \quad (2.6)$$

причем можно принять, что вещественная часть $\theta(t)$ больше или равна нулю и меньше или равна единице.

Составляя решение уравнения (2.4) по формуле (2.5), получим

$$\begin{aligned} P(t_0) + iT(t_0) = & -\frac{Ai}{\pi^2 - A^2} [Bt_0 + i f(t_0)] + \frac{B}{\pi^2 - A^2} \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right)^0 J_1 + \\ & + \frac{i}{\pi^2 - A^2} \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right)^0 \int_{(s)} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^0 \frac{f(t)}{t-t_0} dt + \frac{(A_1 + iA_2)(b-t_0)^{0-1}}{(a+t_0)^1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где A_1 и A_2 — произвольные вещественные постоянные, а

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \lg \frac{\pi - A}{\pi + A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \lg \frac{\mu_2 + \mu_1 z_2}{\mu_1 + \mu_2 z_1} \quad (2.8)$$

$$J_1 = \int_{-a}^b \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-t_0} \quad (2.9)$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся соотношением

$$J_1 = \int_{-a}^b \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta dt + t_0 \int_{-a}^b \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-t_0} = J_2 + t_0 J_3 \quad (2.10)$$

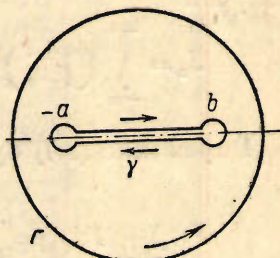
Для вычисления интегралов J_2 и J_3 рассмотрим сложный контур $\gamma + \Gamma$ в комплексной области (фиг. 5).

В области вне γ и заключенной в Γ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + \Gamma} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-z} = \left(\frac{a+z}{b-z} \right)^\theta \quad (2.11)$$

При интегрировании по окружности Γ положим $t = Re^{i\varphi}$, где R — радиус окружности, и будем стремиться t , а следовательно, и R к бесконечности, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{(-1)^\theta} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} id\varphi = \frac{1}{(-1)^\theta}$$



Фиг. 5

Следовательно, интеграл по контуру γ будет равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\rightarrow} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\leftarrow} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-z} = \\ &= -\frac{1}{(-1)^\theta} + \left(\frac{a+z}{b-z} \right)^\theta \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем стрелки \rightarrow и \leftarrow означают интегрирование соответственно по верхнему и нижнему краям разреза (фиг. 5) от $-a$ до $+b$.

Воспользуемся соотношением на сторонах разреза γ

$$(b-t)^{-\theta} = e^{-\theta \lg(b-t)} = e^{-\theta [\lg(b-t) + 2\pi i]} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\rightarrow} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-z} = \frac{e^{-2\pi i\theta} - 1}{2\pi i} \int_{\leftarrow} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-z} = -\frac{1}{(-1)^\theta} + \left(\frac{a+z}{b-z} \right)^\theta$$

или

$$\int_{\leftarrow} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-z} = \frac{2\pi i}{e^{-2\pi i\theta} - 1} \left[-\frac{1}{(-1)^\theta} + \left(\frac{a+z}{b-z} \right)^\theta \right]$$

Сделав предельный переход, т. е. положив $z \rightarrow t_0 - i0$, где t_0 — любая точка на участке $-a \leq t_0 \leq b$, получим

$$-\pi i \left(\frac{a+t_0}{b-t_0} \right)^\theta + \int_{-a}^{+b} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^\theta \frac{dt}{t-t_0} = \frac{2\pi i}{e^{-2\pi i\theta} - 1} \left[-\frac{1}{(-1)^\theta} + \left(\frac{a+t_0}{b-t_0} \right)^\theta \right]$$

или

$$J_3 = \int_{-a}^{+b} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^{\theta} \frac{dt}{t-t_0} = -\pi \left(\frac{a+t_0}{b-t_0} \right)^{\theta} \operatorname{ctg} \pi\theta + \frac{\pi}{\sin \pi\theta} \quad (2.12)$$

Аналогично проводится вычисление интеграла

$$J_2 = \int_{-a}^{+b} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^{\theta} dt = \frac{\pi(a+b)\theta}{\sin \pi\theta}$$

Заметив, что согласно (2.8)

$$\sin \pi\theta = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 - A^2}}, \quad \operatorname{ctg} \pi\theta = -\frac{Ai}{\pi}$$

получим

$$J_3 = \int_{-a}^{+b} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^{\theta} \frac{idt}{t-t_0} = \sqrt{\pi^2 - A^2} [\theta(a+b) + t_0] + Ai t_0 \left(\frac{a+t_0}{b-t_0} \right)^{\theta} \quad (2.13)$$

Выражение (2.7) будет иметь вид

$$P(t_0) + iT(t_0) = \frac{A}{\pi^2 - A^2} f(t_0) + \frac{B}{\sqrt{\pi^2 - A^2}} \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right)^{\theta} [\theta(a+b) + t_0] + \\ + \frac{i}{\pi^2 - A^2} \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right)^{\theta} \int_{(s)} \left(\frac{a+t}{b-t} \right)^{\theta} \frac{f(t) dt}{t-t_0} + \frac{(A_1 + iA_2)(b-t_0)^{\theta-1}}{(a+t_0)^{\theta}} \quad (2.14)$$

Удовлетворяя условию $T(t_0) = -\nu P(t_0)$ вдоль (s), получим уравнение для определения $f(t_0)$.

Мы рассмотрим случай, когда материалы перекачиваемых тел одинаковы, т. е.

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 = \mu_2, \quad \theta = \frac{1}{2}$$

В этом случае выражение (2.14) принимает вид

$$P(t_0) + iT(t_0) = \frac{B}{\pi} \sqrt{\frac{b-t_0}{a+t_0}} \left[\frac{a+b}{2} + t_0 \right] + \\ + \frac{i}{\pi^2} \sqrt{\frac{b-t_0}{a+t_0}} \int_{(s)} \sqrt{\frac{a+t}{b-t}} \frac{f(t) dt}{t-t_0} + \frac{A_1 + iA_2}{\sqrt{(a+t_0)(b-t_0)}} \quad (2.15)$$

Пользуясь условием $T(t_0) = -\nu P(t_0)$ вдоль (s), для определения $f(t_0)$ получаем уравнение

$$-\int_{(s)} \frac{\Omega(t) dt}{t-t_0} = B\nu\pi \left[\frac{a+b}{2} + t_0 \right] + \frac{(A_1\nu + A_2)\pi^2}{b-t_0} \quad (2.16)$$

где

$$\Omega(t) = \sqrt{\frac{a+t}{b-t}} f(t) \quad (2.17)$$

 a, t_0 — любая точка на (s).

Решая его, найдем

$$\Omega(t_0) = \sqrt{\frac{(a+t_0)(b-t_0)}{(a+t_0)(-\beta+t_0)}} \left\{ \frac{B\gamma}{\pi} J_4 + (A_1\gamma + A_2) J_5 + \frac{A_3 + A_4 t_0}{(a+t_0)(b-t_0)} \right\} \quad (2.18)$$

где

$$J_4 = \int_{(s)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \left(\frac{a+b}{2} + t \right) \frac{dt}{t-t_0}$$

$$J_5 = \int_{(s)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \frac{dt}{(b-t)(t-t_0)} \quad (2.19)$$

а A_3 и A_4 — произвольные вещественные постоянные. Второй интеграл J_5 , входящий в выражение $\Omega(t_0)$, будет расходящимся, так как в знаменатель подинтегрального выражения входит $(b-t)^{3/2}$. Поэтому следует положить

$$A_1\gamma + A_2 = 0$$

Для вычисления интеграла J_4 разобьем его на два:

$$J_4 = \int_{(s)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} dt + \left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right) \int_{(s)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \frac{dt}{t-t_0} = J_6 + \left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right) J_7 \quad (2.20)$$

Рассмотрим сложный контур $\Gamma + \gamma$, изображенный на фиг. 6, состоящий из окружности Γ и двух контуров, обходящих разрезы $(-a, -\alpha)$ и $(+\beta, b)$ и обозначенных γ .

В области, заключенной вне γ и внутри Γ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+\gamma} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \frac{dt}{t-z} = \sqrt{\frac{(a+z)(-\beta+z)}{(a+z)(b-z)}}$$

Вспользуемся подстановкой $t = Re^{i\varphi}$ и будем стремиться t , а следовательно, и R к бесконечности, тогда получим

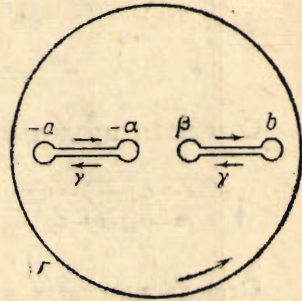
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\varphi = -i$$

Предыдущее равенство дает

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \frac{dt}{t-z} = i + \sqrt{\frac{(a+z)(-\beta+z)}{(a+z)(b-z)}}$$

Интеграл по контуру γ можно представить в виде суммы интегралов соответственно по верхнему и нижнему краям разрезов.

Вместо того чтобы интегрировать по верхнему краю, будем интегрировать по нижнему, заметив при этом, что при переходе с верхнего края разреза на нижний радикал, входящий в подинтегральную функцию, меняет знак.



Фиг. 6.

Направление интегрирования по нижнему краю изменим на обратное. В результате получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \frac{dt}{t-z} = -\frac{1}{\pi i} \int_{(s)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \frac{dt}{t-z} =$$

$$= i + \sqrt{\frac{(a+z)(-\beta+z)}{(a+z)(b-z)}} \quad (2.21)$$

Совершая предельный переход при $z \rightarrow t_0 - i0$ на (s) , получим

$$\sqrt{\frac{(a+t_0)(-\beta+t_0)}{(a+t_0)(b-t_0)}} - \frac{1}{\pi i} \int_{(s)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \frac{dt}{t-t_0} = + \sqrt{\frac{(a+t_0)(-\beta+t_0)}{(a+t_0)(b-t_0)}}$$

Отсюда для значений t_0 на (s) получаем значение второго интеграла J_7 в выражении (2.20)

$$J_7 = \int_{(s)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \frac{dt}{t-t_0} = \pi \quad (2.22)$$

Для определения первого интеграла J_6 в выражении (2.20) воспользуемся равенством

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+\gamma} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} dt = 0 \quad (2.23)$$

вполне очевидным, так как подынтегральная функция не имеет особых точек внутри Γ и вне γ .

Произведем интегрирование вдоль контура Γ , разлагая подынтегральную функцию. Получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(1 + \frac{a}{2t} + \dots\right) \left(1 - \frac{\beta}{2t} + \dots\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{a}{2t} + \dots\right) \left(1 + \frac{b}{2t} + \dots\right) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(1 + \frac{a+b-a-\beta}{2t} + \dots\right) dt$$

Сделав подстановку $t = Re^{i\varphi}$ и положив радиус окружности $R \rightarrow \infty$, найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} dt = -\frac{i}{2\pi} \frac{a+b-a-\beta}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{i(a+b-a-\beta)}{2}$$

Пользуясь этим, из (2.23) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} dt = -\frac{1}{\pi i} \int_{(s_1)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} dt = \frac{i(a+b-a-\beta)}{2}$$

Следовательно,

$$J_6 = \int_{(s_1)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} dt = \frac{\pi(a+b-a-\beta)}{2} \quad (2.24)$$

Подставим найденные значения интегралов (2.21) и (2.24) в выражение (2.18) для $\Omega(t_0)$ и, используя соотношение (2.17), связывающее $f(t_0)$ и $\Omega(t_0)$, найдем

$$f(t_0) = \sqrt{\frac{\alpha+t_0}{-\beta+t_0}} \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right) \left\{ B\nu \left(a+b - \frac{\alpha+\beta}{2} + t_0 \right) + \frac{A_3 + A_4 t_0}{(a+t_0)(b-t_0)} \right\} \quad (2.25)$$

Напомним, что перед корнем для участков $-a \leq t_0 \leq -\alpha$ и $\beta \leq t_0 \leq b$, надо брать разные знаки. Условия

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(-\alpha - \varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\beta + \varepsilon) = 0$$

дают уравнения

$$A_3 - A_4 \alpha = 0, \quad B\nu \left(a+b + \frac{\beta-\alpha}{2} \right) + \frac{A_4}{b-\beta} = 0$$

из которых определяются постоянные

$$A_3 = -B\nu \alpha \left(a+b + \frac{\beta-\alpha}{2} \right), \quad A_4 = -B\nu (b-\beta) \left(a+b + \frac{\beta-\alpha}{2} \right)$$

Подставляя значения постоянных в (2.25), получим

$$f(t_0) = -\frac{B\nu \sqrt{(a+t_0)(-\beta+t_0)}}{a+t_0} \left(a+t_0 + \frac{\beta-\alpha}{2} \right)$$

Выражение (2.15) после подстановки $f(t_0)$ примет вид

$$P(t_0) + iT(t_0) = \frac{B}{\pi} \sqrt{\frac{b-t_0}{a+t_0}} \left\{ \frac{a+b}{2} + t_0 - \frac{i\nu}{\pi} \int_{(s)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} t - \right. \\ \left. - \frac{i\nu}{\pi} \left(a+t_0 + \frac{\beta-\alpha}{2} \right) \int_{(s)} \sqrt{\frac{(a+t)(-\beta+t)}{(a+t)(b-t)}} \frac{dt}{t-t_0} \right\} + \frac{A_1(1-i\nu)}{\sqrt{(a+t_0)(b-t_0)}} \quad (2.26)$$

Вычисляя значения интегралов получим:
на участках скольжения

$$P(t_0) + iT(t_0) = \frac{B}{\pi} \sqrt{\frac{b-t_0}{a+t_0}} \left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right) (1-i\nu) + \frac{A_1(1-i\nu)}{\sqrt{(a+t_0)(b-t_0)}} \quad (2.27)$$

на участке сцепления

$$P(t_0) + iT(t_0) = \frac{B}{\pi} \left\{ \sqrt{\frac{b-t_0}{a+t_0}} \left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right) (1-i\nu) + \right. \\ \left. + i\nu \left(a + \frac{\beta-\alpha}{2} + t_0 \frac{\sqrt{(a+t_0)(\beta-t_0)}}{a+t_0} \right) \right\} + \frac{A_1(1-i\nu)}{\sqrt{(a+t_0)(b-t_0)}} \quad (2.28)$$

Выражения для напряжений на линии контакта (2.27) и для деформаций (2.26) обращаются в бесконечность при $t_0 = -a$ и $t_0 = b$. Поэтому следует положить

$$A_1 = 0, \quad b = a, \quad \beta = \alpha. \quad (2.29)$$

Окончательно находим:

на участках скольжения $-a \leq t_0 \leq -\alpha$, $\alpha \leq t_0 \leq a$

$$P(t_0) = \frac{B}{\pi} \sqrt{a^2 - t_0^2}, \quad T(t_0) = -\frac{B\nu}{\pi} \sqrt{a^2 - t_0^2} \quad (2.30)$$

на участке сцепления $-\alpha \leq t_0 \leq \alpha$

$$P(t_0) = \frac{B}{\pi} \sqrt{a^2 - t_0^2}, \quad T(t_0) = -\frac{B\nu}{\pi} \sqrt{a^2 - t_0^2} + \frac{B\nu}{\pi} \sqrt{\alpha^2 - t_0^2} \quad (2.31)$$

Для определения значений a , α и реализуемой силы тяги Q мы имеем три условия равновесия сил, приложенных к ведущему диску. Заметив, что

$$\frac{B\nu}{\pi} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - t_0^2} dt_0 = \frac{B\nu a^2}{2} = \nu P, \quad \frac{B\nu}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - t_0^2} dt_0 = \frac{B\nu \alpha^2}{2}$$

получим

$$\frac{Ba^2}{2} - P = 0, \quad \nu P - \frac{\nu Ba^2}{2} - Q = 0, \quad \frac{B\nu}{2} (a^2 - \alpha^2) R_2 - M = 0$$

Откуда

$$a = \sqrt{\frac{2P}{B}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2P}{B} - \frac{2M}{\nu B R_2}}, \quad Q = \frac{M}{R_2} = \frac{B\nu(a^2 - \alpha^2)}{2} \quad (2.32)$$

Эти выражения показывают, что при установившемся упругом качении диска длина линии контакта не зависит от величины воспринимаемого им момента и определяется точно так же, как в задаче о статическом давлении диска (без учета сил трения). Напомним, что B определяется формулой (1.11).

Длина участка сцепления изменяется от $2a$ при $M=0$ до нуля при максимальном значении момента.

Сила тяги Q изменяется от нуля при $M=0$ до $Q=\nu P$ при максимальном значении момента.

Под максимальным значением момента понимается наибольшее его значение, соответствующее началу боксования:

$$M = \nu P R_2$$

Задача о сопротивлении установившемуся качению ведомого диска решается аналогичным образом.

3. Невозможность схемы контакта, состоящей из одного участка скольжения и одного участка сцепления. Положим, что на линии контакта расположен один участок скольжения $-a \leq t_0 \leq \beta$ и к нему примыкает участок сцепления $\beta \leq t_0 \leq b$. Тогда из уравнения (1.11) получим

$$P(t_0) + iT(t_0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{b-t_0}{a+t_0}} \left\{ B \left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right) + \frac{i}{\pi} \int_{-a}^{\beta} \sqrt{\frac{a+t}{b-t}} \frac{f(t) dt}{t-t_0} \right\} + \frac{A_5 + iA_6}{\sqrt{(a+t_0)(b-t_0)}} \quad (3.1)$$

где A_5 и A_6 — произвольные вещественные постоянные.

Удовлетворяя условию $T(t_0) = -\nu P(t_0)$ на участке скольжения $-a \leq t_0 \leq \beta$, для определения $f(t_0)$ получим уравнение

$$-\int_{-a}^{\beta} \frac{\Omega(t) dt}{t-t_0} = B\nu\pi \left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right) + \frac{(A_5\nu + A_6)\pi^2}{b-t_0} \quad (3.2)$$

где Ω определяются выражением (2.17). Составляя решение уравнения (3.2) согласно (2.5), найдем

$$\Omega(t_0) = \sqrt{\frac{\beta-t_0}{a+t_0}} \left\{ \frac{B\nu}{\pi} J_8 + (A_5\nu + A_6) J_9 \right\} + \frac{A_7}{\sqrt{(\beta-t_0)(a+t_0)}} \quad (3.3)$$

где

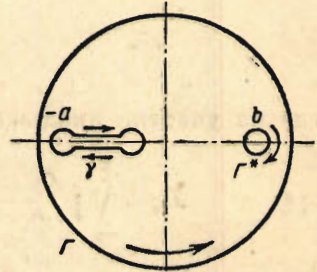
$$J_8 = \int_{-a}^{\beta} \sqrt{\frac{a+t}{\beta-t}} \left(\frac{a+b}{2} + t \right) \frac{dt}{t-t_0}, \quad J_9 = \int_{-a}^{\beta} \sqrt{\frac{a+t}{\beta-t}} \frac{dt}{(b-t)(t-t_0)} \quad (3.4)$$

а A_7 — произвольная вещественная постоянная.

Для вычисления J_9 рассмотрим область $\gamma + \Gamma^* + \Gamma$, изображенную на фиг. 7.

Для любой точки z , находящейся вне γ и Γ^* и внутри Γ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + \Gamma^* + \Gamma} \sqrt{\frac{a+t}{\beta-t}} \frac{dt}{(b-t)(t-z)} = \frac{1}{b-z} \sqrt{\frac{a+z}{\beta-z}}$$



Фиг. 7

При интегрировании по бесконечно малой окружности Γ^* в выражении $\sqrt{(a+t)/(\beta-t)}/(t-z)$

можно положить $t=b$. Заметив, что $(\sqrt{\gamma-t})_{t \rightarrow b} = -i\sqrt{b-\gamma}$, и положив $b-t = re^{i\varphi}$, найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \sqrt{\frac{a+t}{\beta-t}} \frac{dt}{(b-t)(t-z)} = \frac{1}{2\pi i (b-z)} \sqrt{\frac{a+b}{b-\beta}} \int_0^{-2\pi} d\varphi = \frac{1}{b-z} \sqrt{\frac{a+b}{b-\beta}}$$

Интеграл по окружности Γ , радиус которой стремится к бесконечности, равен нулю.

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sqrt{\frac{a+t}{\beta-t}} \frac{dt}{(b-t)(t-z)} &= -\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{\beta} \sqrt{\frac{a+t}{\beta-t}} \frac{dt}{(b-t)(t-z)} = \\ &= \frac{1}{b-z} \left(-i \sqrt{\frac{a+b}{b-\beta}} + \sqrt{\frac{a+z}{\beta-z}} \right) \end{aligned}$$

где интегрирование от $-a$ до β ведется по нижнему краю разреза γ .

Пологая $z \rightarrow t_0$ на $-a \leq t_0 \leq \beta$, имеем

$$J_9 = \int_{-a}^{\beta} \sqrt{\frac{a+t}{\beta-t}} \frac{dt}{(b-t)(t-t_0)} = -\frac{\pi}{b-t_0} \sqrt{\frac{a+b}{b-\beta}} \quad (3.5)$$

Интеграл J_8 для $-a \leq t_0 \leq \beta$ вычисляется аналогичным путем и будет

$$J_8 = \int_{-a}^{\beta} \sqrt{\frac{a+t}{\beta-t}} \left(\frac{a+b}{2} + t \right) \frac{dt}{t-t_0} = \pi \left(a+t_0 + \frac{b+\beta}{2} \right) \quad (3.6)$$

Подставляя найденные значения J_8 и J_9 в выражение (3.3) для $\Omega(t_0)$ и воспользовавшись (2.17), найдем

$$f(t_0) = \frac{Bv \sqrt{(b-t_0)(\beta-t_0)}}{a+t_0} \left(a+t_0 + \frac{b+\beta}{2} \right) - \frac{(A_5v + A_6)\pi}{a+t_0} \sqrt{\frac{(a+b)(\beta-t_0)}{(b-\beta)(b-t_0)}} + \frac{A_7}{a+t_0} \sqrt{\frac{b-t_0}{\beta-t_0}} \quad (3.7)$$

Удовлетворяя условиям $f(\beta) = 0$ и $f(-a) \neq \infty$, получим

$$A_7 = 0, \quad A_5v + A_6 = \frac{Bv}{2\pi} (b + \gamma) \sqrt{(a+b)(b-\beta)} \quad (3.8)$$

Выражения (3.1) для напряжений принимают вид

$$P(t_0) + iT(t_0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{b-t_0}{a+t_0}} \left\{ B \left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right) + \frac{iBv}{\pi} J_{10} - i(A_5v + A_6) \sqrt{\frac{a+b}{b-\beta}} J_{11} \right\} + \frac{A_5 + iA_6}{\sqrt{(a+t_0)(b-t_0)}}$$

где на участке скольжения $-a \leq t_0 \leq \beta$

$$J_{10} = \int_{-a}^{\beta} \sqrt{\frac{\beta-t}{a+t}} \left(a+t + \frac{b+\beta}{2} \right) \frac{dt}{t-t_0} = -\pi \left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right)$$

$$J_{11} = \int_{-a}^{\beta} \sqrt{\frac{\beta-t}{a+t}} \frac{dt}{(b-t)(t-t_0)} = \frac{\pi}{b-t_0} \sqrt{\frac{b-\beta}{a+b}}$$

а на участке сцепления $\beta \leq t_0 \leq b$

$$J_{10} = \int_{-a}^{\beta} \sqrt{\frac{\beta-t}{a+t}} \left(a+t + \frac{b+\beta}{2} \right) \frac{dt}{t-t_0} = -\pi \left[\left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right) + \left(a+t_0 + \frac{b+\beta}{2} \right) \sqrt{\frac{t_0-\beta}{t_0+a}} \right]$$

$$J_{11} = \int_{-a}^{\beta} \sqrt{\frac{\beta-t}{a+t}} \frac{dt}{(b-t)(t-t_0)} = \frac{\pi}{b-t_0} \left[\sqrt{\frac{b-\beta}{a+b}} + \sqrt{\frac{t_0-\beta}{t_0+a}} \right]$$

В результате:

на участке скольжения

$$P(t_0) + iT(t_0) = \left\{ \frac{B}{\pi} \sqrt{\frac{b-t_0}{a+t_0}} \left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right) + \frac{A_5}{\sqrt{(a+t_0)(b-t_0)}} \right\} (1 - vi) \quad (3.10)$$

на участке сцепления

$$P(t_0) + iT(t_0) = \left\{ \frac{B}{\pi} \sqrt{\frac{b-t_0}{a+t_0}} \left(\frac{a+b}{2} + t_0 \right) + \frac{A_5}{\sqrt{(a+t_0)(b-t_0)}} \right\} (1 - v) + i \left\{ \frac{Bv \sqrt{(b-t_0)(t_0-\beta)}}{\pi(a+t_0)} \left(a+t_0 + \frac{b+\beta}{2} \right) - \frac{A_5v + A_6}{a+t_0} \sqrt{\frac{a+b}{b-\beta}} \sqrt{\frac{t_0-\beta}{b-t_0}} \right\}$$

Удовлетворяя условиям конечности напряжения на линии контакта, имеем

$$A_5 = -\frac{B}{2\pi} (b^2 - a^2), \quad A_6 = 0, \quad 2A_5v + A_6 = 0 \quad (3.12)$$

Принимая во внимание полученное ранее условие (3.8), получим

$$a+b=0 \text{ или } b-a=0, \quad b+\beta=0 \text{ или } b-\beta=0 \quad (3.13)$$

Случай $b+a=0$ исключается, так как это означает, что длина линии контакта тел равна нулю, значит $a=b$.

Последние равенства (3.13) дают $b=\pm\beta$. Это означает, что вдоль всей линии контакта должно иметь место либо сцепление, либо скольжение.

Не приводя выкладок, укажем, что, предполагая участок сцепления при $-a \leq t_0 \leq \beta$, а скольжения при $\beta \leq t_0 \leq b$, при условии конечности напряжений, смещений и деформаций на линии контакта, получим, что $a=\pm\beta$, т. е. вдоль всей линии контакта имеет место либо сцепление, либо скольжение.

Таким образом схема одного участка сцепления и одного участка скольжения осуществиться не может.

4. Сопротивление перекатыванию при скольжении вдоль всей линии контакта¹. Вдоль всей линии контакта имеем $T(t_0) = -\nu P(t_0)$.

Положим для определенности, что материал ведущего диска является более мягким, чем основания, т. е. в уравнении (1.12) величина $A \leq 0$.

Решая уравнение (1.12), получим

$$P(t_0) = \frac{B}{A^2\nu^2 + \pi^2} \left\{ A\nu t_0 + \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right)^{\theta} \int_{-a}^b \left(\frac{a+s}{b-s} \right)^{\theta} \frac{s ds}{s-t_0} \right\} + \frac{K}{b-t_0} \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right) \quad (4.1)$$

где K — произвольная вещественная постоянная,

$$\theta = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\pi}{|A|\nu} \quad (4.2)$$

Интеграл, входящий в (4.1), вычисляется по формуле (2.13), причем θ определяется согласно (4.2) и, следовательно,

$$P(t_0) = \frac{B}{\sqrt{A^2\nu^2 + \pi^2}} \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right)^{\theta} [(a+b)\theta + t_0] + \frac{K}{b-t_0} \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right)^{\theta} \quad (4.3)$$

Полученное выражение $P(t_0)$ обращается в бесконечность при $t_0 = -a$ и $t_0 = b$. Чтобы $P(t_0)$ не обращалось в бесконечность при $t_0 = -a$ и $t_0 = b$, необходимо

$$K=0, \quad [(a+b)\theta + t_0]_{t_0=-a} = 0 \quad (4.4)$$

откуда

$$(a+b)\theta - a = 0 \quad (4.5)$$

Следовательно,

$$P(t_0) = \frac{B}{\sqrt{A^2\nu^2 + \pi^2}} (b-t_0)^{\theta} (a+t_0)^{1-\theta} \quad (4.6)$$

¹ Такой именно случай и принимается в современной, так называемой технической теории качения. В нашей постановке этот случай является предельным и соответствует состоянию, предшествующему боксованию.

В принятой схеме сила тяги

$$Q = \nu P^* = \nu \int_{-a}^b P(t_0) dt_0 \quad (4.7)$$

Для определения неизвестных a , b и M , кроме уравнения (4.5), мы располагаем еще двумя уравнениями

$$\int_{-a}^b P(t_0) dt_0 - P^* = 0, \quad \int_{-a}^b P(t_0) t_0 dt_0 + M - QR_2 = 0 \quad (4.8)$$

Пользуясь теми же методами интегрирования, что и в предыдущем, найдем

$$\begin{aligned} \int_{-a}^b \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right)^{\theta} t_0 dt &= -\frac{\pi^{\theta}}{\sin \pi \theta} \left[ab\theta + \frac{1}{2} \theta(\theta-1) b^2 + \frac{1}{2} (\theta+1) a^2 \right] \\ \int_{-a}^b \left(\frac{b-t_0}{a+t_0} \right)^{\theta} t_0^2 dt_0 &= \frac{\pi}{\sin \pi \theta} \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{3} (\theta+1) (\theta+2) a^3 + \theta(\theta+1) ba^2 + \right. \\ &\quad \left. + \theta(\theta-1) ab^2 + \frac{1}{3} (\theta-1) (\theta-2) b^3 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Уравнения (4.8) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{P}{B} &= (a+b)^2 \theta^2 - \theta \left[ab\theta + \frac{1}{2} (\theta-1) b^2 + \frac{1}{2} (\theta+1) a^2 \right] \\ \frac{-QR_2 + M}{B} &= \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{3} (\theta+1) (\theta+2) a^3 + \theta(\theta+1) ba^2 + \theta(\theta-1) ab^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} (\theta-1) (\theta-2) b^3 \right] - (a+b) \theta^2 \left[ab\theta + \frac{1}{2} (\theta-1) b^2 + \frac{1}{2} (\theta+1) a^2 \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Заметив из уравнения (4.5), что $b = a(1-\theta)/\theta$, и подставив в первое из уравнений (4.10), получим

$$\frac{a^2(1-\theta)}{2\theta} = \frac{P}{B}$$

Следовательно,

$$a = \sqrt{\frac{2P\theta}{B(1-\theta)}}, \quad b = \sqrt{\frac{2P(1-\theta)}{B\theta}} \quad (4.11)$$

Второе из уравнений (4.10) после преобразований примет вид

$$\frac{-QR_2 + M}{B} = \frac{a^3(1-\theta)(1-2\theta)}{3\theta^2} \quad \text{или} \quad QR_2 - M - Pr = 0 \quad (4.12)$$

где величина

$$r = \frac{2(1-2\theta)}{3\theta} a \quad (4.13)$$

называется плечом трения качения; отсюда

$$M = QR_2 + Pr \quad (4.14)$$

Для реально встречающихся сочетаний тел — перекатываемых и являющихся основанием — величина θ мало отличается от $1/2$.

Если ведущий диск является более жестким, чем основание ($A \geq 0$), нормальные напряжения, действующие на линии контакта, будут выражаться так:

$$P(t_0) = \frac{B}{\sqrt{A^2 v^2 + \pi^2}} (a + t_0)^{\theta'} (b - t_0)^{1-\theta'}$$

где

$$b = \sqrt{\frac{2P\theta'}{B(1-\theta')}} , \quad a = \sqrt{\frac{2P(1-\theta')}{B\theta'}} , \quad \theta' = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{Av}$$

Плечо трения качения r определяется по формуле (4.13), но откладывается в данном случае слева от оси y , проходящей через центр диска, если считать, что его ось движется вправо; причем

$$M = QR_2 - Pr$$

Следовательно, при условиях технической теории качения находим, что ведущий диск, более жесткий, чем основание, реализует данную силу тяги ($Q = \nu P$) меньшим моментом, чем при прочих равных условиях диск, менее жесткий.

Поступила в редакцию
14 XI 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

N. I. GLAGOLEV.—RESISTANCE OF CYLINDRICAL BODIES IN ROLLING

The work considers the plane problem of rolling of elastic cylindrical bodies over an elastic foundation. The author considers the line of contact between two rolling discs (fig. 1). This line is assumed to consist of one range of adhesion and two ranges of sliding. The author employs the method of Kolosov, as developed by Muskhelishvili, to set up the basic equation (1.11). The equation is solved by the method of Karleman in § 2.

§ 3 sets forth the impossibility of the existence of a range of adhesion and but one range of sliding. In § 4 the author applies the method of solution to the case of a single range of sliding along the entire line of contact.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Н. П. Сопротивление поезда на железной дороге, 1889.
2. Reynolds O. On Rolling-Friction. Phil. Thans. Roy. Soc. London. MDCCCLXXVI. V. 466. [P. 1].
3. Fromm H. Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbaren Scheiben. ZAMM. 1927. B. 7. H. 1; Fromm H. Zulässige Belastung von Reibungsgetrieben mit zylindrischen oder kegeligen Rädern. VDI. 1929. B. 73. Nr. 27, 29.
4. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. Gesammelte Werke, Leipzig. 1895. Bd. 1.
5. Ишлинский А. Ю. Трение качения. Прикладная математика и механика, 1938. Т. II. Вып. 2.
6. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. ОНТИ. 1935.
7. Мусхелишвили. Н. И. Некоторые задачи теории упругости. Изд. АН. СССР. 1935.
8. Carleman T. Sur la résolution de certaines équations intégrales. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1922. B. 16. Nr. 26.
9. Шерман Д. И. Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями. Труды Сейсмологического института Академии Наук СССР. 1938. № 88.