

К ТЕОРИИ КРЫЛА В СТРУЕ С КРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

И. А. Паничкин

(Москва)

Известно, для того чтобы аэродинамические характеристики крыла, полученные при испытании в аэродинамической трубе, соответствовали условиям неограниченного потока, необходимо, кроме прочих трубных поправок, вводить и поправку на влияние границ струи [1,2]. Эти поправки обычно определяются по формулам

$$\Delta\alpha = \frac{\pi\Delta\alpha^\circ}{180} = \delta_\alpha \frac{S}{F} C_y^2, \quad \Delta C_{xi} = \delta_q \frac{S}{F} C_y^2$$

где δ_α — поправочный коэффициент для угла атаки; δ_q — поправочный коэффициент для лобового сопротивления, S — площадь крыла, F — площадь поперечного сечения струи, C_y — коэффициент подъемной силы крыла в струе.

Коэффициенты δ_α и δ_q зависят от типа аэродинамической трубы (будет ли труба с открытой рабочей частью или закрытой), от геометрических размеров поперечного сечения струи в рабочей части и от распределения циркуляции по размаху крыла.

Для получения численных значений этих коэффициентов, распределение циркуляции по размаху крыла обычно принимается либо постоянным, либо эллиптическим, что не соответствует действительному распределению циркуляции в струе.

Если подходить строго к этому вопросу, то мы должны сначала найти распределение циркуляции по размаху крыла, которое имеет место в струе, а затем уже вычислять значения поправочных коэффициентов.

Такой строгий подход может и не иметь большого значения для уточнения величин поправочных коэффициентов, но вопрос нахождения циркуляции непосредственно в струе сам по себе представляет интерес.

Следует отметить, что в теории вместо действительной аэродинамической трубы обычно рассматривают цилиндрическую струю неограниченной длины, причем либо закрытую, либо открытую, в зависимости от типа трубы.

1. Рассмотрим крыло с размахом $l=2s$ и удлинением $\lambda=2s/b$, где b — хорда в струе с круглым поперечным сечением радиуса R .

Для этого крыла имеем

$$\Gamma(x) = \frac{4}{2} a_0 b V [\alpha_0 + \Delta\alpha_0(x) + \Delta\alpha(x)] \quad (|x| \leq s < R) \quad (1.1)$$

где $\Gamma(x)$ — циркуляция в какой-либо точке x размаха крыла, V — скорость основного потока, α_0 — геометрический угол атаки.

Индуктивные углы скоса потока на крыле от вихрей самого крыла и от влияния границ струи соответственно будут

$$\Delta\alpha_0(x) = \frac{1}{4\pi V} \int_{-s}^{+s} \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt, \quad \Delta\alpha(x) = \pm \frac{1}{4\pi V} \int_{-s}^{+s} \frac{t\Gamma'(t)}{R^2-xt} dt \quad (1.2)$$

где знак плюс соответствует открытой струе, а знак минус — закрытой.

Подставляя $\Delta\alpha_0(x)$, $\Delta\alpha(x)$ из формулы (1.2) в (1.1), получим интегродифференциальное уравнение Прандтля

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} a_0 bV \left[\alpha_0 + \frac{1}{4\pi V} \int_{-s}^{+s} \Gamma'(t) \left(\frac{1}{t-x} \pm \frac{t}{R^2-xt} \right) dt \right] \quad (1.3)$$

Вводя в уравнение (1.3) новые переменные $u = t/s$, $\xi = x/s$ и обозначая

$$\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)/4\pi s a_0 V, \quad \tilde{\Gamma}(\xi) = G^*(\xi)$$

будем иметь

$$\mu G^*(\xi) = 1 + \int_{-1}^{+1} \frac{dG^*(u)}{du} \left(\frac{1}{u-\xi} \pm \frac{\sigma^2 u}{1-\sigma^2 \xi u} \right) du \quad (1.4)$$

или, полагая $\xi = -\cos \varphi$, $u = -\cos \psi$, $G^*(\xi) = G(\varphi)$, получим

$$\mu G(\varphi) + \int_0^\pi \frac{dG(\psi)}{d\psi} \left(\frac{1}{\cos \psi - \cos \varphi} \pm \frac{\sigma^2 \cos \psi}{1 - \sigma^2 \cos \varphi \cos \psi} \right) d\psi = 1 \quad (1.5)$$

где $\sigma = s/R$ — относительный размах крыла и $\mu = 4\pi\lambda/a_0 \approx 2\lambda$.

Решение уравнения (1.5) будем искать в виде

$$G(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \sin(2n+1)\varphi \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.5) и интегрируя, после преобразований получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n \sin(2n+1)\varphi \sin \varphi \pm \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n \tau_n q_n(\varphi) \sin \varphi = \sin \varphi - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n \tau_n \sin(2n+1)\varphi \quad (1.7)$$

где $\tilde{G}_n = \mu G_n$, $\tau_n = \pi(2n+1)/\mu$ и

$$q_n(\varphi) = \sum_{k=n}^{\infty} I_{nk} \sigma^{4k} \cos^{2k} \varphi, \quad I_{nk} = \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1} (k-n)! (k+n+1)!} \quad (k \geq n) \quad (1.8)$$

Функциональные члены первого ряда левой части равенства (1.7), определенные в интервале $(0, \pi)$, нечетным образом продолжим на интервал $(-\pi, 0)$ и в интервале $(-\pi, \pi)$ разложим их в ряды Фурье.

Для n -го члена ряда имеем [3]

$$f_n(\varphi) = \sin(2n+1)\varphi \sin \varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{n\nu} \sin(2\nu+1)\varphi \quad (1.9)$$

$$C_{n\nu} = C_{n\nu} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{4(n+\nu+1)^2-1} - \frac{1}{4(n-\nu)^2-1} \right] \quad (n, \nu=0, 1, 2, \dots)$$

Поэтому первый ряд в левой части тождества (1.7) можно записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n f_n(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu}^* \sin(2\nu+1)\varphi, \quad A^* = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n\nu} \tilde{G}_n \quad (\nu=0, 1, 2, \dots) \quad (1.10)$$

На основании формулы (1.8) второй ряд в левой части тождества (1.7)

$$g(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n \tau_n g_n(\varphi) \sin \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{G}_k^* \cos^{2k} \varphi \sin \varphi, \quad \tilde{G}_k^* = \sigma^{4k} \sum_{n=0}^k \tilde{G}_n I_{nk} \tau_n \quad (1.11)$$

или, принимая во внимание, что

$$\cos^{2k} \varphi = \frac{1}{2^{2k-1}} \sum_{\nu=0}^k \binom{2k}{\nu} E\left(\frac{\nu}{k}\right) \cos 2(k-\nu)\varphi$$

$$\binom{2k}{\nu} = \frac{(2k)!}{\nu!(2k-\nu)!}, \quad E\left(\frac{\nu}{k}\right) = \begin{cases} 1 & (\nu \leq k-1) \\ 1/2 & (\nu = k) \end{cases}$$

получим,

$$g(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}^* \sin(2\nu+1)\varphi, \quad B_{\nu}^* = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n \tau_n g_{n\nu}$$

$$g_{n\nu} = \sum_{k=\max\{n, \nu\}}^{\infty} I_{nk} I_{\nu k}^* \sigma^{4k}, \quad I_{\nu k}^* = \frac{2\nu+1}{2k+1} I_{\nu k} \quad (1.12)$$

Подставляя выражения (1.10) и (1.11) в тождество (1.7), получим систему уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{n\nu} \pm 2\sigma \tau_n g_{n\nu}) \tilde{G}_n + \tau_{\nu} \tilde{G}_{\nu} = \begin{cases} 1 & (\nu=0) \\ 0 & (\nu=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1.13)$$

Знак плюс здесь соответствует открытой струе, а знак минус — закрытой.

Для крыла с относительным размахом $\sigma = 0,8$ и удлинением $\lambda = 8$, в открытой и закрытой струе, была вычислена по размаху крыла безразмерная циркуляция

$$\Gamma = \frac{(\Gamma x)}{4\pi s a_0 V} = G(\varphi) = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n \sin(2n+1)\varphi$$

Для сравнения те же самые вычисления были проделаны и для крыла в условиях неограниченного потока ($\sigma = 0$).

Результаты вычисления приведены в табл. 1; по данным этой таблицы на фиг. 1 построены кривые распределения безразмерных циркуляций в неограниченном потоке (кривая 1), в открытой струе (кривая 2), в закрытой струе (кривая 3) и для сравнения приведено эллиптическое распределение циркуляции по размаху крыла (кривая 4).

Таблица 1

x/s	Открытая струя Γ	Неограниченная струя Γ	Закрытая струя Γ	Эллиптическое распределение Γ
0	0.818	0.864	0.916	0.880
0.35	0.802	0.853	0.910	0.918
0.65	0.729	0.785	0.851	0.745
0.87	0.572	0.637	0.703	0.483
0.95	0.431	0.476	0.528	0.318
1	0	0	0	0

Из табл. 1 и фиг. 1 следует, что открытая струя дает уменьшение циркуляции, а закрытая — увеличение по сравнению с циркуляцией этого же крыла в условиях неограниченного потока. Эллиптическое распределение циркуляции значительно отличается от того распределения циркуляции, которое имеет место в струе. Найдем теперь поправочные коэффициенты.

2. Индуктивный угол скоса потока на крыле от влияния границ струи

$$\Delta\alpha(x) = \Delta\alpha^*(\varphi) = \pm \alpha_0 \sigma^2 \int_0^\pi \frac{G'(\psi) \cos \psi d\psi}{1 - \sigma^2 \cos \varphi \cos \psi} = \mp \frac{\alpha_0 \pi \sigma^2}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \tilde{G}_n q_n(\varphi) \quad (2.1)$$

Геометрический угол атаки α_0 в формуле (2.1) выразим через коэффициент C_y .

Подъемная сила крыла в струе

$$P = \frac{1}{2} C_y \rho S V^2 = 4\pi \rho s^2 \alpha_0 V^2 \int_0^\pi G(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 2\pi^2 \rho s^2 \alpha_0 V^2 G_0$$

Откуда находим

$$\alpha_0 = 2C_y / \pi^2 \tilde{G}_0$$

$$\tilde{G}_n = \mu G_n, \quad \mu \approx 2\lambda \quad (2.2)$$

Теперь $\Delta\alpha^*(\varphi)$ представим в виде

$$\Delta\alpha^*(\varphi) = \delta_\alpha^*(\varphi) S C_y / F \quad (2.3)$$

где C_y — коэффициент подъемной силы всего крыла в потоке.

Подставляя $\Delta\alpha^*(\varphi)$ из (2.1), α_0 из (2.2) в (2.3), получим поправочный коэффициент для угла атаки в каком-нибудь сечении крыла

$$\delta_\alpha^*(\varphi) = \pm \frac{1}{4\tilde{G}_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \tilde{G}_n q_n(\varphi) \quad (2.4)$$

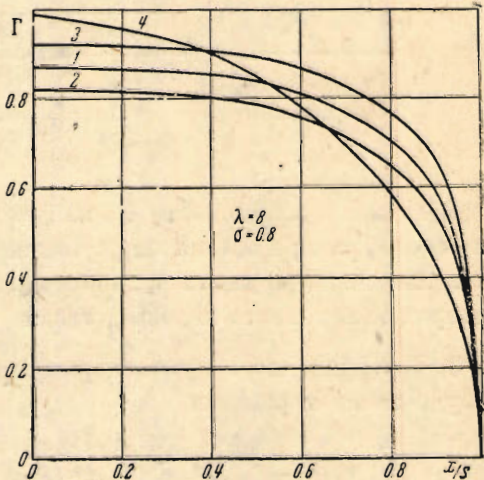
Средняя величина индуктивного угла скоса потока от влияния границ струи

$$\Delta\alpha = \delta_\alpha \frac{S}{F} C_y = \frac{1}{2} \int_0^\pi \Delta\alpha^*(\varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (2.5)$$

Заменяя $\Delta\alpha^*(\varphi)$ его значением из (2.3) и интегрируем, получим

$$\delta_\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\pi \delta_\alpha^*(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \mp \frac{1}{4\tilde{G}_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\nu} I_{n\nu}^* \tilde{G}_n \right) \sigma^{4\nu} \quad (2.6)$$

Формула (2.6) дает значение поперечного коэффициента для угла атаки как среднюю арифметическую величину по размаху крыла.



Фиг. 1

Расчет по формуле (2.6) для открытой и закрытой струи приводим в табл. 2.

		0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$\lambda = 8$	Открытая струя	-0.1250	-0.1250	-0.1259	-0.1300	-0.1438
	Закрытая струя	0.1250	0.1250	0.1259	0.1301	0.1440

Предположим что по размаху крыла имеет место эллиптическое распределение циркуляции, т. е. $\tilde{G}_0 \neq 0$, $\tilde{G}_n = 0$ ($n \geq 1$).

Для этого случая из (2.6) получим

$$\delta_x = \mp \frac{1}{8} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu} \nu! (\nu+1)!} \sigma^{4\nu} \quad (2.7)$$

Результаты вычисления δ_x по формуле (2.7) приводим в табл. 3.

		0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
Открытая струя	Открытая струя	-0.1250	-0.1250	-0.1260	-0.1294	-0.1414
	Закрытая струя	0.1250	0.1250	0.1260	0.1294	0.1414

Величина коэффициента δ_x , найденная по формуле (2.7) для случая эллиптического распределения циркуляции по размаху, почти не отличается от величины коэффициента δ_x , найденного по формуле (2.6) для циркуляции, которая имеет место непосредственно в струе.

3. Коэффициент индуктивного сопротивления элемента dx крыла в какой-нибудь точке x размаха

$$C_{xi}(x) = C_x^* (\varphi) = \frac{16\sigma^2 C_y^2}{\pi^2 \lambda \tilde{G}_0} \tilde{G}(\varphi) \delta_x^* (\varphi), \quad \tilde{G}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n \sin(2n+1)\varphi \quad (3.1)$$

Представим $C_{xi}(x)$ в виде

$$C_{xi}(x) = \delta_q(x) S C_y^2 / F \quad (3.2)$$

Сравнивая (3.1) и (3.2), получим

$$\delta_q(x) = \delta^* (\varphi) = 4 \tilde{G}(\varphi) \delta_x^* (\varphi) / \pi \tilde{G}_0 \quad (3.3)$$

Среднее значение поправочного коэффициента для лобового сопротивления по размаху крыла

$$\delta_q = \frac{C_{xi} F}{S C_y^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \delta_q^* (\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{\pi \tilde{G}_0} \int_0^{\pi} \tilde{G}(\varphi) \delta_x^* (\varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (3.4)$$

Подставляя в (3.4) вместо $\tilde{G}(\varphi)$ ряд (3.1), интегрируя и производя преобразования, получим

$$\delta_q = \mp \frac{1}{2\tilde{G}_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k C_k \sigma^{4k}, \quad A_k = \sum_{n=0}^k I_{nk}^* \tilde{G}_n, \quad C_k = \sum_{\nu=0}^k (2\nu+1) I_{\nu k} \tilde{G}_\nu \quad (3.5)$$

Взяв только четыре коэффициента G_n ($n=0, 1, 2, 3$) в формуле (3.5) для открытой и закрытой струи, мы произвели вычисления, которые приводим в табл. 4.

Таблица 4

σ		0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$\lambda=8$	Открытая струя	-0.1250	-0.1250	-0.1257	-0.1292	-0.1403
	Закрытая струя	0.1250	0.1250	0.1257	0.1293	0.1405

Из табл. 4 видно, что коэффициенты δ_q для закрытой и открытой струи круглого поперечного сечения по абсолютной величине одинаковы.

Сравнивая табл. 2 и 4, можно сказать, что только для больших размахов крыла абсолютная величина δ_a больше абсолютной величины δ_q ; для малых и средних размахов они равны.

Предполагая, что распределение циркуляции по размаху крыла эллиптическое, из (3.5) получим

$$\delta_q = \mp \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} I_{0k} I_{0k}^* \sigma^{4k} = \mp \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2^{4k}} \left[\frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \right]^2 \sigma^{4k} \quad (3.6)$$

Результаты расчета по формуле (3.6) приводим в табл. 5.

Таблица 5

σ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
Открытая струя	0.1250	-0.1250	-0.1255	-0.1284	-0.1370
Закрытая струя	-0.1250	0.1250	0.1255	0.1284	0.1370

Сравнивая между собой табл. 4 и 5, замечаем, что поправочные коэффициенты δ_q , полученные по точной формуле (3.5) и по формуле (3.6), соответствующей эллиптическому распределению циркуляции, для небольших и средних размахов не отличаются друг от друга и только для больших размахов разница между ними становится заметной.

Поступила в редакцию
28 VIII 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

I. A. PANICHKIN. — ON THE THEORY OF A WING IN A FLOW OF CIRCULAR CROSS SECTION

The paper deals with confined and free flows having circular cross-section.

It gives the distribution of circulation along the span of the wing and derives the correction coefficients for the incidence and drag. The coefficients depend on this circulation, dimensions of the wing and diameter of flow.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глауэрт Г. Основы теории крыльев и винта. ГНТИ. 1931.
2. Голубев В. Теория крыла аэроплана конечного размаха. Труды ЦАГИ, 1931.