Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

О НЕКОТОРЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. И. Седов

(Москва)

В предлагаемой работе мы находим ряд точных решений уравнений для одномерного неустановившегося движения сжимаемой жидкости в случае плоских волн и движений с цилиндрической и сферической симметрией[1]. Решения определяются с помощью простых приемов, основанных на соображениях теории размерностей; эти приемы можно рассматривать как общий метод, который позволяет находить во многих вопросах физики семейства решений, зависящих от произвольных параметров. В конкретных примерах обычно легко указать постановки задач и гипотезы, приводящие к решениям получаемого типа. Этот общий метод применим как к линейным, так и к нелинейным уравнениям с частными производными в самых разнообразных вопросах физики и механики.

Широко известен метод Фурье, приложимый к некоторым линейным задачам. Частные решения, которые получаются с помощью рассматриваемого общего метода, так же как и частные решения, получаемые методом Фурье, иногда возможно использовать для построения общего решения уравнений движения и для решения краевых задач.

1. Рассмотрим одномерные неустановившиеся движения сжимаемой жидкости. В качестве независимых переменных возьмем время t и линейную координату r. За основные искомые величины возьмем скорость частиц жидкости v, плотность ρ и давление p. Размерности плотности и давления зависят от символа единицы массы, поэтому функции $\rho(r, t)$ и $p(r, t)$ обязательно содержат некоторые размерные физические постоянные. Эти постоянные могут входить в уравнения движения, которым удовлетворяют искомые функции, либо в добавочные условия, которыми определяется решение (характеристики области, занятой движущейся жидкостью, краевые условия, начальные условия и т. п.).

Рассмотрим случаи, когда искомые функции содержат размерные постоянные, среди которых имеется только одна или две постоянных с независимыми размерностями. Специальные движения такого рода могут представлять самостоятельный интерес или могут оказаться предельным движениями, если в пределе, среди задаваемых физических характеристик, существенны только одна или только две характеристики с независимыми размерностями.

---

[1] Краткое сообщение об этих решениях опубликовано в заметке автора [1].

Предположим сначала, что имеется только одна размерная постоянная, которую обозначим через a. Очевидно, что размерность постоянной a обязательно содержит символ массы, поэтому, не уменьшая общности, можно принять, что формула размерности для a имеет вид

$$[a] = ML^kT^s$$

где k и s — постоянные. Для величин v, ρ и p можно написать формулы

$$v = \frac{r}{t} V, \qquad \rho = \frac{aR}{r^{k+3}t^s}, \qquad p = \frac{aP}{r^{k+1}t^{s+2}} \tag{1.1}$$

Очевидно, что отвлеченные величины V, R и P не могут зависеть от r и t и, следовательно, могут быть только постоянными[1]. Следовательно, гипотеза о том, что существенна только одна постоянная a, дает возможность, не прибегая к уравнениям движения, полностью определить зависимость v, ρ и p от r и t. Если уравнения движения не содержат физических постоянных или содержат постоянные с размерностями, выражающимися через размерность $[a]$, то эти уравнения должны иметь решения вида (1.1) при постоянных V, R и P. Нетрудно видеть, что в этом случае, какой бы ни были постоянные k и s, движение, определяемое формулами (1.1), не содержит состояния, для которого плотность и давление отличны от нуля и одновременно постоянны во всей массе жидкости.

Если, кроме постоянной a, есть еще вторая постоянная b, то, не ограничивая общности, всегда можно принять, что размерность b не содержит символа массы и, следовательно, справедлива формула вида

$$[b] = L^mT^n$$

где m и n — постоянные; очевидно, что при $n \neq 0$ существенно только отношение m/n.

Из определяющих величин r, t, a, b можно образовать только одну независимую отвлеченную переменную комбинацию

$$\lambda = br^{-m}t^{-n}$$

Обращаясь к формуле (1.1), приходим к выводу, что отвлеченные величины V, R и P могут быть функциями одного переменного параметра λ. Дальше мы покажем, что можно строить решения рассматриваемого типа, в которых функции V, R и P или их производные разрывны.

Гипотеза о том, что существенны только две постоянных с независимыми размерностями a и b позволяет установить общий вид распределения значений v_0, ρ_0 и p_0 при $t = 0$. С помощью теории размерностей [2] находим

$$v_0 = \alpha_1 b^{-\frac{1}{n}} r^{\frac{m}{n}+1}, \qquad \rho_0 = \alpha_2 a b^{-\frac{s}{n}} r^{\frac{ms}{n}-k-3}, \qquad p_0 = \alpha_3 a b^{-\frac{s}{n}-\frac{2}{n}} r^{\frac{ms}{n}-k-1+\frac{2m}{n}} \tag{1.2}$$

где α_1, α_2, α_3 — отвлеченные количества, которые можно рассматривать как функции от r, имеющие постоянные значения при $r \neq 0$ и $r \neq \infty$ и имеющие в общем случае точки разрыва при $r = 0$ и $r = \infty$. Величины α_1, α_2 и α_3, в частности, могут равняться нулю или бесконечности.

[1] Об общих методах теории размерностей см., например, книгу автора [2].

Если при $t=0$ давление и плотность постоянны, конечны и отличны от нуля, то должны иметь место соотношения

$$\frac{m}{n}=-1, \qquad k+s=-3 \tag{1.3}$$

из которых следует, что величина начальной скорости одинакова для всех частиц жидкостей. Разрыв скорости может иметь место только при $r=0$ или при $r=\infty$.

Отметим некоторые задачи, для которых решение может быть построено с помощью решений типа (1.1) при

$$k=-3, \qquad s=0, \qquad \frac{m}{n}=-1 \tag{1.4}$$

А. *Классическая задача о «взрыве» вдоль плоскости.* Требуется определить адиабатные движения газа, если в начальный момент времени скорость, плотность и давление имеют разрыв вдоль плоскости $x=r=0$, причем справа при $r>0$ имеем заданные постоянные значения v_1 ρ_1, p_1, а слева при $r<0$ заданные постоянные значения v_2, ρ_2, p_2.

Как известно, уравнения движения совершенного идеального газа не содержат размерных постоянных, поэтому в этом случае движение зависит только от шести размерных постоянных v_1, ρ_1, p_1, v_2, ρ_2, p_2.

Среди этих постоянных имеется только две с независимыми размерностями. В качестве постоянных a и b можно взять

$$\begin{aligned} &a=\rho_1 && \left([a]=ML^{-3}, \quad k=-3, \quad s=0\right) \\ &b=\frac{\gamma p_1}{\rho_1} && \left([b]=L^2T^{-2}, \quad m=2, \quad n=-2, \quad \frac{m}{n}=-1\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Соотношения (1.4) выполняются. Решение поставленной задачи можно получить с помощью комбинирования решений типа (1.1). Следовательно, в этом случае можно сказать заранее, что формулы, дающие выражения для v, ρ и p через r и t, могут зависеть только от параметра $bt^2/r^2=\lambda$. Формулы, выражающие v, ρ и p через r и t, могут менять свой вид при переходе через разрывы [1] (слабые, стационарные и сильные скачки).

B. *Задача о движении газа в длинной цилиндрической трубе, закрытой с одной стороны поршнем.* В начальный момент времени газ покоится, а поршень начинает двигаться внезапно с постоянной скоростью U. Обращая это движение, приходим к задаче о внезапном введении преграды перед поступательным однородным потоком газа.

В этой задаче движение определяется следующими размерными постоянными: начальной плотностью ρ_1, начальным давлением p_1 и скоростью поршня U. Получаем опять случай, когда решение зависит только от двух постоянных с независимыми размерностями. Как известно, если U направлено в сторону газа, то решение этой задачи имеет весьма простой вид, — перед поршнем образуется область с постоянными давлением, плотностью

[1] Рассмотрение возможных случаев движения в этой задаче см. в работе Н. Е. Кочина [3].

и скоростью частиц газа, равной U. Эта область отделена от покоящегося газа сильным разрывом, распространяющимся с постоянной скоростью.

C. Задача о детонации газа в цилиндрической трубе (детонация начинается либо в некотором плоском поперечном сечении трубы и распространяется в обе стороны в покоящейся среде, либо детонация начинается от конца трубы, закрытого неподвижным поршнем).

При детонации добавляется постоянная, определяющая выделяющуюся удельную теплоту химической реакции $q_1 - q_2$. Постоянная $q_1 - q_2$ в механических единицах измерения имеет размерность квадрата скорости, зависимую от размерностей давления и плотности. Следовательно, в этом случае мы имеем только две размерных постоянных с независимыми размерностями, и решение можно строить из решений вида (1.1).

Эту задачу можно обобщать, допустив, что поршень в начальный момент времени начинает двигаться с постоянной скоростью U, или допустив, что вместо подвижного поршня у конца трубы создается постоянное давление, которое сохраняется с течением времени и отличается от давления в покоящемся газе.

Для плоских волн решение перечисленных задач элементарно. Мы рассмотрим обобщение указанных задач на случай цилиндрической и сферической симметрии.

Для конкретности дальше мы ограничимся подробным изучением соответствующих задач со сферической симметрией. Предварительно рассмотрим следующую задачу: в момент $t = 0$ внутри сферы S_0 радиуса r_0 газ покоится и имеет заданную плотность ρ_2 и давление p_2; вне сферы S_0 имеется тот же газ, в котором плотность, давление и скорость постоянны и равны ρ_1, p_1, v_1; требуется определить возникающее движение газа.

Очевидно, что в этом случае решение зависит от шести размерных постоянных r_0, ρ_2, p_2, ρ_1, p_1, v_1, среди которых имеются три постоянных с независимыми размерностями. Так как радиус r_0 в общем случае имеет существенное значение, то решение этой задачи не имеет вида (1.1). Если перейдем к пределу при $r_0 \to 0$, то в результате получим задачу с двумя независимыми размерными постоянными, которую можно решить с помощью решений вида (1.1).

Таким образом приходим к следующим задачам со сферической симметрией, для которых мы дадим способы решения.

1°. *Все частицы однородного газа имеют одинаковую скорость, направленную к центру O*, $v_1 < 0$ (фокусирование в точке) либо от центра $v_1 > 0$ (разлет от центра).

В обоих случаях вблизи точки O образуется сферическая расширяющаяся область покоящейся жидкости, в первом случае с повышенным давлением, во втором с пониженным. Из дальнейшего будет видно, что существует критическая скорость $v_1^* > 0$. Если $v_1 > v_1^*$, то в центре O образуется пустота.

2°. *Обобщение задачи B о поршне*. При $t = 0$ газ покоится, но частицы сферы S_0 бесконечно малого радиуса с центром в точке O получают внезапно постоянную скорость U, направленную по радиусам от точки O.

В дальнейшем при $t > 0$ эти частицы продолжают двигаться с той же постоянной скоростью U. Жидкость как бы раздвигается сферой S_0, радиус которой растет от нуля пропорционально времени. С помощью теории размерности нетрудно усмотреть, что на поверхности сферы S_0 давление должно быть постоянным.

Соответствующее давление определяется в функции скорости U и характеристик покоящегося газа. Следовательно, эта задача совпадает с задачей о раздвигании покоящейся массы жидкости заданным постоянным давлением, возникающим в точке O.

3°. *Задача о сферической детонации*. При $t=0$ в некоторой точке O в газе возникает детонация, которая затем распространяется в покоящемся газе. В этом случае около точки O образуется расширяющаяся сфера S_1 с покоящимся газом. Плотность и давление внутри S_1 постоянны и отличны от плотности и давления в покоящемся газе, через который еще не прошла детонационная волна [1].

2. Для получения условий, которым должны удовлетворять величины, входящие в формулы (1.1), необходимо обратиться к уравнениям движения. Очевидно, что для справедливости принятых гипотез необходимо, чтобы уравнения движения не содержали существенных постоянных с размерностями, независимыми от размерностей a и b.

Для определенности задачи возьмем уравнения движения жидкости в следующей форме:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{\rho v}{r} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{p}{\rho^\gamma} + v\frac{\partial}{\partial r}\frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \tag{2.2}$$

где γ — некоторая отвлеченная постоянная. При $\nu=1$ имеем плоские волны, при $\nu=2$ — цилиндрические и при $\nu=3$ — сферические.

При $\gamma = c_p / c_v$ уравнения (2.1) и (2.2) можно рассматривать как уравнения адиабатных движений газа, когда энтропия может быть различной у разных частиц газа. Уравнения (2.1) и (2.2) не содержат размерных постоянных, поэтому эти уравнения должны иметь решение в форме (1.1), когда имеется только одна постоянная a, а также в случае, когда имеются две существенных постоянных a и b.

Подставляя формулы (1.1) в уравнения (2.1) и (2.2), получим

$$\begin{gathered}\lambda\left[(n+mV)V' + m\frac{P'}{R}\right] = V^2 - V - (k+1)\frac{P}{R}\\ \lambda\left[mV' + (n+mV)\frac{R'}{R}\right] = -s - (k-\nu+3)V\\ \lambda(n+mV)\left[\frac{P'}{P} - \gamma\frac{R'}{R}\right] = -s(1-\gamma) - 2 - [k(1-\gamma) + 1 - 3\gamma]V\end{gathered} \tag{2.3}$$

[1] Задача о сферической детонации решена Зельдовичем [4]. Подобно тому, как в задаче C о детонации в цилиндрической трубе, задача о сферической детонации может быть осложнена путем добавления условий задачи 2°.

Если постоянная b отсутствует, то левые части уравнений (2.3) нужно заменить нулями, в результате получаются три простых конечных соотношения, связывающие V, P, R, k и s,

$$V=\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)}, \quad P=\frac{2\nu(1-\gamma)}{(k+1)[2+\nu(\gamma-1)]^2}R, \quad s=\frac{2(\nu-k-3)}{2+\nu(\gamma-1)} \tag{2.4}$$

В этом случае формулы (1.1) дают семейство точных решений уравнений (2.1) и (2.2), зависящее от двух произвольных постоянных k и aR. Заменяя t через $t-t_0$, получим решение, зависящее от трех постоянных.

При $\nu=1$ в формулах (1.1) координату r можно заменить через $r-r_0$, после чего получим решение, зависящее от четырех произвольных постоянных.

Для идеального газа энтропия выражается через комбинацию

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=a^{1-\gamma}\frac{P}{R^\gamma}r^{k(\gamma-1)+3\gamma-1}t^{s(\gamma-1)-2}$$

которая в общем случае различна для разных частиц жидкости. Если

$$k=-\frac{3\gamma-1}{\gamma-1}, \qquad s=\frac{2}{\gamma-1}$$

то для полученного семейства решений, зависящего от одной постоянной энтропия одинакова для всех частиц жидкости.

При $m\neq 0$ интегрирование системы уравнений (2.3) можно свести к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dz}{dV}=\frac{z\{[2(V-1)+\nu(\gamma-1)V](V-q)^2-(\gamma-1)V(V-1)(V-q)-[2(V-1)+\varkappa(\gamma-1)]z\}}{(V-q)[V(V-1)(V-q)+(\varkappa-\nu V)z]} \tag{2.5}$$

где приняты обозначения

$$z=\frac{\gamma P}{R}, \quad q=-\frac{n}{m}, \quad \varkappa=\frac{s+2+q(k+1)}{\gamma}$$

После интегрирования уравнения (2.5) зависимость V, R от λ определится с помощью квадратур из соотношений

$$\frac{d\ln\lambda^\mu}{dV}=\frac{(V-q)^2-z}{V(V-1)(V-q)+(\varkappa-\nu V)z} \tag{2.6}$$

$$(V-q)\frac{d\ln R}{d\ln\lambda^\mu}=\frac{V(V-1)(V-q)+(\varkappa-\nu V)z}{z-(V-q)^2}-[s+(k-\nu+3)V] \qquad \left(\mu=\frac{1}{m}\right) \tag{2.7}$$

В общем случае интегрирование уравнения (2.5) необходимо производить приближенно. При $m=0$, т. е. при $q=\infty$, уравнение (2.5) легко интегрируется и получаем интеграл

$$\frac{\gamma P}{R}=z=\gamma AV^2(V-1)^{\nu(\gamma-1)} \tag{2.8}$$

где A — постоянная интегрирования. Полагая $n=1$ (при этом $\lambda=b/t$, где b — характерное время), из уравнений (2.3) найдем

$$d\ln\lambda=\frac{dV}{V[V-1-A(k+1)V(V-1)^{\nu(\gamma-1)}]} \tag{2.9}$$

$$d \ln R \lambda^s = -\frac{(k+3-\nu)\, dV}{V-1-A(k+1)\, V\,(V-1)^{\nu(\gamma-1)}} \tag{2.10}$$

В этом случае решение уравнений движения жидкости (2.1) и (2.2) можно представить в виде

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{t_0}{t} = \exp \int \frac{dV}{V\,[(V-1) - A(k+1)\, V\,(V-1)^{\nu(\gamma-1)}]} \tag{2.11}$$

$$\rho = \frac{aB}{r^{k+3}} \exp\left\{ -(k+3-\nu) \int \frac{dV}{(V-1) - A(k+1)\, V\,(V-1)^{\nu(\gamma-1)}} \right\} \tag{2.12}$$

$$p = \frac{r^2}{t^2} AV^2 (V-1)^{\nu(\gamma-1)} \rho, \qquad v = \frac{r}{t} V$$

Эти формулы дают точное решение уравнений (2.1) и (2.2), зависящее от четырех произвольных независимых постоянных t_0, A, aB и k.

Для некоторых частных значений γ интегралы, входящие в эти формулы, могут быть вычислены в простом виде.

Если $k = -1$, то при любом γ интегралы легко вычисляются, после чего получаем следующее точное решение уравнений (2.1) и (2.2)

$$v = \frac{r}{t - t_0}, \qquad \rho = \alpha \frac{(t-t_0)^{2-\nu}}{r^2}, \qquad p = \beta \frac{1}{(t-t_0)^{\nu\gamma}} \tag{2.13}$$

где t_0, α, β — произвольные постоянные. В движениях, описываемых формулами (2.13), давление зависит от времени, но постоянно во всей массе жидкости. Все частицы движутся равномерно и прямолинейно, но с различными скоростями. Для каждой частицы жидкости энтропия постоянна, но различна у разных частиц. При цилиндрической симметрии распределение плотности получается стационарным. Более общее решение получится, если в решении (2.13) постоянную α заменить через $F\left(\frac{r}{t-t_0}\right)$, где F — произвольная функция.

Решение (2.13) совпадает по форме с решением, доставляемым формулами (1.1) при V, R и P постоянных, определяемых формулами (2.4), но отличается от него тем, что зависит от двух размерных постоянных α и β, которые в данном случае входят специальным образом.

При $\nu = 1$ в формулах (2.13) координату r можно заменить через $r - r_0$, после чего получим решение, зависящее от четырех произвольных постоянных; это решение отличается от соответствующего решения, отвечающего формулам (2.4).

3. Решения в форме (2.1) можно искать с наличием поверхностей слабых или сильных разрывов. Эти характерные поверхности будут отвечать некоторым значением координаты $r = r^*$, зависящей от времени.

Динамические условия, связывающие значения v, ρ_1, p_1, и v_2, ρ_2, p_2 на различных сторонах поверхностей сильных скачков, имеют вид:

условие постоянства массы

$$\rho_1 (v_1 - c) = \rho_2 (v_2 - c) \tag{3.1}$$

где c — скорость перемещения скачка;

условие о сохранении количества движения

$$\rho_2 (v_2 - c)(v_1 - v_2) = p_2 - p_1 \tag{3.2}$$

Уравнение энергии мы напишем в предположении, что газ совершенный

$$q_1-q_2+\frac{\gamma_1 p_1}{(\gamma_1-1)\rho_1}-\frac{\gamma_2 p_2}{(\gamma_2-1)\rho_2}+\frac{1}{2}[(v_1-c)^2-(v_2-c)^2]=0 \tag{3.3}$$

через q_1-q_2 обозначена энергия, отнесенная к единице массы, которая может выделяться за счет химических реакций, сопровождающих скачок. Величину q_1-q_2 необходимо вводить при рассмотрении явления детонации. Мы будем считать, что разность q_1-q_2 выражена в механических единицах измерения и поэтому размерность q_1-q_2 равняется квадрату скорости. Постоянная γ может быть разной на различных сторонах поверхности разрыва.

На скачках размерными определяющими параметрами будут t, a и b; из них нельзя образовать безразмерной комбинации, поэтому для решений (1.1) на скачках будут справедливы соотношения

$$\lambda=\lambda_0=\mathrm{const}, \qquad r^*=\lambda_0^{-\frac{1}{m}}\, b^{\frac{1}{m}}\, t^{-\frac{n}{m}} \tag{3.4}$$

Так как $c=dr^*/dt$, то

$$c=-\frac{n}{m}\frac{r^*}{t} \tag{3.5}$$

Далее можно положить

$$q_1-q_2=q\left(\frac{r^*}{t}\right)^2 \tag{3.6}$$

где λ_0 и q — отвлеченные постоянные.

Решения рассматриваемого вида могут существовать при выделении тепла за счет химических реакций, если это выделение может быть подчинено закону, отвечающему формуле (3.6).

Движение с наличием поверхностей разрыва невозможно, если имеется только одна существенная размерная постоянная a.

Как отмечено выше (1.3), если движение возникает из состояния покоя, в котором жидкость однородна, то $m/n=-1$. Следовательно, для движений рассматриваемого типа, начинающегося из состояния покоя, в котором p_0 и ρ_0 не равны нулю или бесконечности, получается, что скорость ударных волн постоянна и удельная теплота реакции q_1-q_3 также должна быть постоянной.

Подставляя формулы (1.1) в соотношения (3.1), (3.2) и (3.3) и вводя обозначения

$$\frac{v-c}{r^*/t}=u, \qquad \frac{\gamma P}{R}=\frac{\gamma p}{\rho}\cdot\left(\frac{r^*}{t}\right)^2=z \tag{3.7}$$

получим

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{u_2}{u_1} \tag{3.8}$$

$$\frac{z_1}{\gamma_1 u_1}+u_1=\frac{z}{\gamma_2 u_2}+u_2 \tag{3.9}$$

$$q+\frac{z_1}{\gamma_1-1}+\frac{u_1^2}{2}=\frac{z_2}{\gamma_2-2}+\frac{u_2^2}{2} \tag{3.10}$$

Из уравнений (3.9) и (3.10) легко выразить z_2 и u_2 через z_1, u_1 и q.

Для ударных волн без химических реакциий ($\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ и $q=0$) два решения уравнений (3.9) и (3.10) имеют простой вид

$$u_1 = u_2, \qquad z_2 = z_1 \tag{3.11}$$

$$u_2 = u_1 \left[1 + \frac{2}{\gamma+1} \frac{z_1 - u_1{}^2}{u^2{}_1} \right]$$

$$z_2 = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2 \frac{1}{u_1{}^2} \left[u_1^2 + \frac{2z_1}{\gamma-1} \right] \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} u_1{}^2 - z_1 \right] \tag{3.12}$$

Так как уравнения (3.9) и (3.10) симметричны относительно z_1, V_1 и z_2, V_2, то очевидно, что для получения выражений z_1, V_1 через z_2, V_2 достаточно в формулах (3.11) и (3.12)[1] индексы 1 и 2 переставить местами.

В дальнейшем мы примем, что индекс 1 соответствует той стороне скачка, на которую мы переходим при возрастании r.

Для общего анализа полезно еще соотношение

$$z_2 - u^2{}_2 = -(z_1 - u_1^2)\left(1 + \frac{2}{\gamma+1} \frac{z_1 - u^2{}_1}{u^2{}_1}\right) \tag{3.13}$$

Величина z по своему физическому смыслу существенно положительна. По теореме Цемплена должно выполняться неравенство $V_1 - V_2 < 0$, что дает

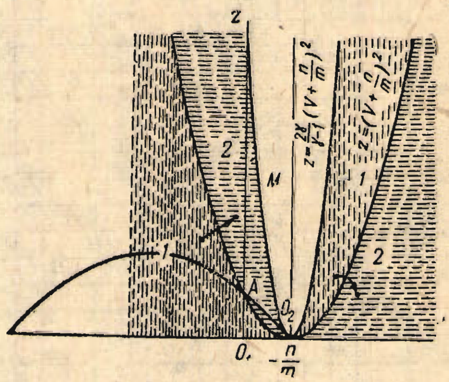
$$u_1 - u_2 = V_1 - V_2 < 0 \tag{3.14}$$

На полуплоскости $-\infty < V < +\infty$, $r > 0$ (фиг. 1) отмечены области, преобразующиеся друг в друга с помощью соотношений (3.11) и $(3.12)_2$.

Прямая $z_1 = 0$ преобразуется в параболу $z = 2\gamma\,(V + n/m)^2/(\gamma - 1)$. Точки параболы $z = (V + n/m)^2$ переходят сами в себя.

Из теоремы Цемплена следует, что точки z_1, V_1, должны быть расположены в областях, заштрихованных вертикально, а соответствующие значения z_2 и V_2 будут находиться в областях, заштрихованных горизонтально. Возможные переходы от z_1, V_1 к z_2, V_2, указаны стрелками.

Точки типа M, расположенные выше параболы $z = 2\gamma\,(V + n/m)^2/(\gamma - 1)$, не могут соответствовать границам скачков.



Фиг. 1

Рассмотрим теперь подробнее еще случай, когда состояние покоя есть частное решение в рассматриваемом семействе. В этом случае

$$-\frac{n}{m} = 1, \qquad c = \frac{r^*}{t}; \qquad z = \frac{a^2}{c^2}, \qquad V - 1 = \frac{v - c}{c} \qquad \left(a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}\right)$$

где a — скорость звука.

Если $z > (V-1)^2$, то скорость частиц жидкости относительно скачка меньше скорости звука, при $z < (V-1)^2$ — больше скорости звука. На параболе $z = (V-1)^2$ относительная скорость частиц равна скорости звука.

---

[1] В предыдущих рассуждениях формулы (2.1) используются для формулировки условий на скачке в безразмерной форме (4.8), (4.9), (4.10), поэтому указанные соотношения справедливы для любых движений газа с прямыми скачками. Для специальных движений рассматриваемого типа имеем $u = V + n/m$.

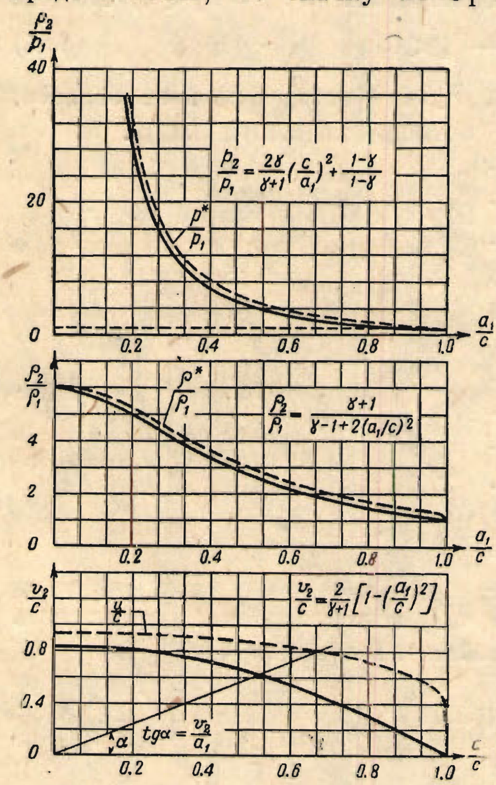
Если $v=0$ при $r \neq 0$ и $t \neq \infty$, то $V=0$; отсюда следует, что состоянию покоя соответствуют точки оси z.

На прямой $V=1$ имеем $v=r/t$. Это означает, что скорость частиц жидкости равна скорости перемещения состояний движения $\lambda=\text{const}$, отвечающих точкам этой прямой. Следовательно, если в потоке имеются стационарные разрывы, то они должны соответствовать точкам прямой $V=1$.

Пусть на стороне I мы имеем состояние покоя; это состояние может переходить в движение скачком только для точек оси z, расположенных на отрезке O_1A, для которого $z_1 = a_1{}^2/c^2 \leqslant 1$. Точки отрезка O_1A преобразуются скачком в точки дуги параболы AO_2, уравнение которой имеет вид

$$z_2 = (1-V_2)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}V_2\right) \tag{3.15}$$

Точке O_1 ($z_1=0$, $V_1=0$) соответствует точка O_2, для которой будет $z_2 = 2\gamma(\gamma-1)/(\gamma+1)^2$, $V_2 = 2/(\gamma+1)$. Если скорость звука в покоящейся среде конечна, то скачку из O_1 в точку O_2 соответствует предельный случай, когда скорость распространения скачка равна бесконечности. Точке A ($z=1$, $V=0$) соответствует скорость распространения, равная скорости звука. При приближении точки z_1, V_1 к точке A скачки скорости, плотности и давления стремятся к нулю. Точке A может соответствовать только слабый разрыв. Положением точки z_1 на отрезке O_1A определяется скорость распространения скачка в покоящуюся жидкость.



Фиг. 2

В случае распространения прямого скачка уплотнения в покоящемся газе $v_1=0$ (при $q_1-q_2=0$ и $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$) соотношения (3.1), (3.2) и (3.3) можно представить в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{c}{a_1}\right)^2 + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \tag{3.16}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2(a_1/c)^2} \tag{3.17}$$

$$\frac{v_2}{c} = \frac{2}{\gamma+1}\left[1-\left(\frac{a_1}{c}\right)^2\right] \tag{3.18}$$

Эти формулы удобны для оценки элементов скачка через скорость распространения скачка или через скорость частиц газа за скачком v_2. Для большей наглядности соотношения, представляемые формулами (3.16), (3.17) и (3.18), изображены графически сплошным линиями на фиг. 2.

Если отношение v_2/a_1 задано, то для определения отношения a_1/c достаточно на нижнем графике провести через начало координат прямую с угловым коэффициентом, равным v_2 / a_1. Пересечение этой прямой с параболой (3.18) определит отношение a_1 / c.

Рассмотрим теперь еще случай, когда $q_1 - q_2 \neq 0$ и $\gamma_1 \neq \gamma_2$, а ударная волна распространяется в покоящейся среде $V_1 = 0$ или $u_1 = -1$.

Уравнения (3.9) и (3.10) в этом случае принимают вид

$$z_2 + \gamma_2 \left(\frac{a_1^2}{\gamma_1 c_1^2} \right) u_2 + \gamma_2 u_2^2 = 0 \tag{3.19}$$

$$\frac{z_2}{\gamma_2 - 1} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma_1 - 1} \frac{a_1^2}{c^2} + \frac{q_1 - q_2}{c^2} \tag{3.20}$$

При постоянных a_1^2, $q_1 - q_2$ и c^2 в плоскости z, u эти уравнения представляются параболами, расположенными так, как это указано на фиг. 3, если

$$(\gamma_2 - 1) \frac{q_1 - q_2}{a_1^2} \geqslant \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 (\gamma_1 - 1)} \tag{3.21}$$

Знак равенства соответствует случаю, когда параболы пересекаются в точке D. Если неравенство (3.21) не удовлетворяется, то система (3.19) и (3.20) имеет два решения, для одного из них $V_2 < 0$, а для другого $1 > V_2 > 0$.

Для существования двух действительных различных решений уравнений (3.19) и (3.20) постоянные a_1, c и $q_1 - q_2$ должны удовлетворять соотношению

$$\left(1 + \frac{1^2}{\gamma_1 c^2}\right)^2 > 2 \frac{\gamma_2^2 - 1}{\gamma_2^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma_1 - 1} \frac{a_1^2}{c^2} + \frac{q_1 - q_2}{c^3} \right] \tag{3.22}$$

Корни уравнений (3.19) и (3.20) сливаются, когда в соотношении (3.22) знак неравенства заменяется знаком равенства; в этом случае приходим к уравнению

$$\left(\frac{c}{a_1}\right)^4 - 2 (\gamma_2^2 - 1) \left[\frac{q_1 - q_2}{a_1^2} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1 (\gamma_1 - 1)(\gamma_2^2 - 1)} \right] \left(\frac{c}{a_1}\right)^2 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma^2} = 0 \tag{3.23}$$

причем теперь для корней уравнений (3.19) и (3.20) получаются выражения

$$u_2' = u_2'' = -\frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \left(1 + \frac{a_1^2}{\gamma_1 c^2}\right), \qquad z_2' = z_2'' = \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_2 + 1)^2} \left(1 + \frac{a_1^2}{\gamma_1 c^2}\right)^2 \tag{3.24}$$

Очевидно, что соответствующее решение определяет точку, расположенную на параболе

$$z_2 = (V_2 - 1)^2 \tag{3.25}$$

Если имеет место неравенство (3.22), то получаются два решения, для которых соответствующие точки M и N (фиг. 3) расположены по различным сторонам параболы (3.25).

Нетрудно убедиться, что если отношение $(q_1 - q_2) / a_1^2$ задано так, что неравенство (3.18) удовлетворяется, то при различных c^2 / a_1^2 соответствующие точки M и N расположатся на некоторой кривой третьего порядка, причем в точках параболы (3.25) удовлетворяется уравнение (3.23), а величина c^2 / a_1^2 достигает extremum. Наибольший корень уравнения (3.23) соответствует минимуму, а наименьший максимуму отношения c^2 / a_1^2.

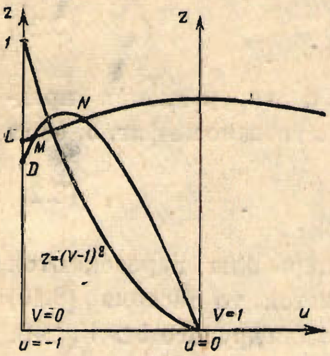
Если в соотношении (3.21) имеет место знак равенства, то уравнение (3.23) получает вид

$$\left(\frac{c_0^2}{a_1^2}-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2=0 \tag{3.26}$$

Очевидно, что в этом случае скорость c_0 равняется скорости звука в газе с показателем адиабаты γ_2. Из формул (3.24) для соответствующих значений V_2 и z_2 находим $V_2=0$, $z_2=1$.

Если в соотношении (3.21) имеет место знак неравенства, то уравнения (4.23) имеют два корня c_1 и c_2, удовлетворяющие неравенству $c_1<c_0<c_2$.

Все рассуждения этого параграфа применимы к движениям с плоскими волнами и к движениям с цилиндрической и сферической симметрией.



Фиг. 3

4. Рассмотрим теперь вопрос об определении всех решений, когда $m=2$, $n=-2$, $s=0$, $k=-3$ и $\nu=3$. Положим

$$a=\rho_1, \qquad b=\frac{\gamma p_1}{\rho_1}=a_1^2, \qquad \lambda=a_1^2\frac{t^2}{r^2}$$

где p_1 и ρ_1 — некоторые выбранные значения давления и плотности.

Уравнения (2.5) и (2.6) в рассматриваемом случае принимают вид

$$\frac{dz}{dV}=2\frac{z}{V}\frac{z-(V-1)(\gamma V-1)}{3z-(V-1)^2} \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\ln\lambda}{dV}=\frac{z-(V-1)^2}{V[3z-(V-1)^2]} \tag{4.2}$$

Кроме того, при $V\neq1$ последнее из уравнений (2.3) интегрируется, в результате чего получаем следующую связь между P, R и λ:

$$P=\frac{R^\gamma\lambda}{\gamma\beta^{\gamma-1}} \tag{4.3}$$

где β — постоянная интегрирования.

Пользуясь соотношением (4.3) и обозначением $\gamma P/R=z$, формулы (1.1) представим в виде

$$v=a_1\frac{V}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \rho=\rho_1\beta\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \qquad p=p_1\beta\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{4.4}$$

В областях непрерывного движения величина p/ρ^γ у различных частиц жидкости будет одинакова, так как

$$\frac{p}{\rho_1^\gamma}=\frac{p_1}{\rho_1^\gamma}\frac{1}{\beta^{\gamma-1}} \tag{4.5}$$

Очевидно, что отвлеченная постоянная β тесно связана с значением энтропии. Если в некоторой точке области непрерывного движения давление и плотность имеют значения p_1 и ρ_1, то очевидно, что в этой области $\beta=1$.

Решение, выраженное формулами (4.4), зависит от четырех произвольных постоянных. Две из них — это $\rho_1\beta$ и $p_1\beta$, две другие войдут при интегрировании дифференциальных уравнений (4.1) и (4.2).

Основная трудность заключается в интегрировании уравнения (4.1). После интегрирования уравнения (4.1) параметр λ определяется в функции от V из уравнения (4.2) с помощью простой квадратуры.

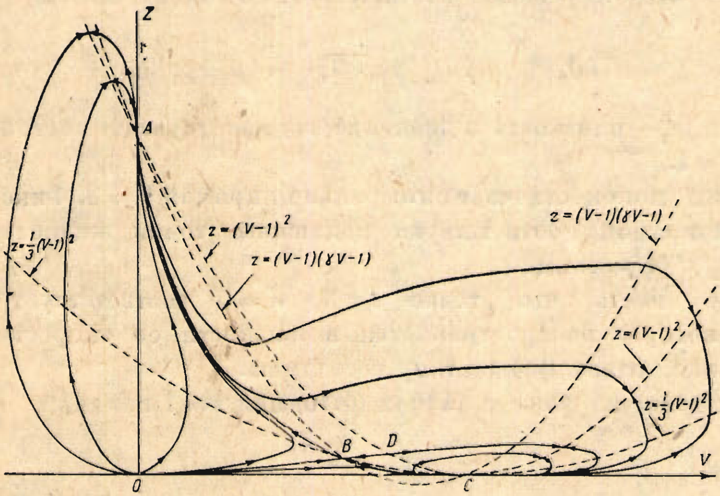
Рассмотрим поведение интегральных кривых уравнения (4.1) в плоскости zV. Это уравнение имеем пять особых точек

$$O(0,0), \quad A(1,0), \quad B(z^*,V^*), \quad C(0,1), \quad D(\infty, \pm\infty)$$

причем

$$z^* = \frac{3(\gamma-1)^2}{(3\gamma-1)^2}, \qquad V^* = \frac{2}{3\gamma-1}$$

Точки O, A, C являются узлами, точки B и D — седлами. Общий вид интегральных кривых в полуплоскости $z>0$ показан на фиг. 4.



Фиг. 4

В точках параболы $z=(V-1)(\gamma V-1)$ интегральные кривые имеют касательные, параллельные оси V; в точках параболы $z=\frac{1}{3}(V-1)^2$ — касательные, параллельные оси z.

Вблизи точки O решения уравнений (4.1) и (4.2) имеют вид

$$z = k_1 V^2 + \ldots, \qquad V = \frac{\sqrt{\lambda}}{k_2} + \ldots \tag{4.6}$$

где $k_1>0$ и $k_2 \gtrless 0$ — произвольные постоянные. Точке O соответствует $\lambda = a_1^2 t^2 / r^2 = 0$, следовательно, в пространстве движения жидкости точке O соответствует бесконечно удаленная точка $r=\infty$.

В бесконечности для скорости, плотности и давления получаются значения v_0, ρ_0 и p_0, определяемые формулами

$$v_0 = \frac{a_1}{k_2} \quad \left(k_2 = \frac{a_1}{v_0}\right), \quad \rho_0 = \rho_1\beta\left(\frac{k_1}{k_2^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad p_0 = p_1\beta\left(\frac{k_1}{k_2^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{4.7}$$

Если $\rho_0=\rho_1$, $p_0=p_1$, то $\beta=1$, $k_1=k_2^2$.

В плоскости z, V, вблизи точки O, интегральные кривые имеют вид парабол. С увеличением величины скорости в бесконечности соответствующие параболы приближаются к оси V. Если $v_0>0$, то приближению из бесконечности к центру симметрии соответствует перемещение вверх по правой ветви параболы, если $v_0<0$ — перемещение вверх по левой ветви параболы.

Уравнения (4.1) и (4.2) имеют точное решение:

$$z=0, \qquad V=\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2} \tag{4.8}$$

Этому решению соответствуют состояния движения, в которых либо $p=0$, либо $\rho=\infty$.

Кроме того, уравнения (4.1) и (4.2) имеют решение

$$V=0, \qquad z=k_3\lambda \tag{4.9}$$

Очевидно, что это решение соответствует состоянию покоя

$$v=0, \qquad \rho=\rho_1\beta k_3^{\frac{1}{\gamma-1}}, \qquad p=p_1\beta k_3^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{4.10}$$

Если ρ_1 и p_1 — плотность и давление, соответствующие состоянию покоя, то $\beta=1$, $k_3=1$.

Состоянию покоя отвечает интегральная прямая $V=0$. Фиксированным точкам этой прямой соответствуют подвижные точки жидкости, для которых $\lambda=a_1^2 t^2 / r^2=\text{const}$.

Нетрудно видеть, что точке $z=1$, $V=0$ соответствует состояние движения, которое распространяется в жидкости со скоростью, равной скорости звука, отвечающей этому состоянию.

В самом деле, из формул (4.9) и (4.10) при $z=1$ получим

$$\frac{r^2}{t^2}=a_1^2 k_3=\frac{\gamma p}{\rho}$$

При $z<1$ скорость распространения соответствующих состояний в покоящейся жидкости больше скорости звука, при $z>1$ меньше скорости звука.

Рассмотрим поведение интегральных кривых вблизи точки A, для которой $z=1$, $V=0$. Вблизи этой точки уравнение первого приближения для уравнения (4.1) имеет вид

$$\frac{dz}{dV}=\frac{z-1+(1+\gamma)V}{V} \tag{4.11}$$

Общий интеграл уравнения (4.11) представляется формулой

$$z-1=CV+(1+\gamma)V\ln V \tag{4.12}$$

где C — постоянная интегрирования.

Очевидно, что в точке A имеется узел, интегральные кривые сходятся к точке A, касаясь оси z.

Нетрудно видеть, что при движении вдоль интегральной кривой точка A достигается при конечном значении параметра λ, так как в точке A имеем

$$\frac{dV}{d\lambda}=0, \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dz}=1 \tag{4.13}$$

Точка A может соответствовать слабому разрыву. Состояние покоя, даваемое прямой $V=0$, может переходить непрерывно в движение, определяемое другими интегральными кривыми, сходящимися в точку A.

Особая точка B представляет собой седло. Через точку B проходят две интегральных кривых с угловыми коэффициентами

$$\frac{dz}{dV}=\frac{\gamma-1}{2(3\gamma-1)}\left[\gamma-3\pm\sqrt{(\gamma-3)^2+4(\gamma-1)(3\gamma+1)}\right] \tag{4.14}$$

При движении к точке B по интегральным кривым, соответствующим знаку плюс, параметр λ стремится к $+\infty$, при движении к точке B по интегральным кривым, соответствующим знаку минус, параметр λ стремится к нулю.

Точке B отвечает особое решение

$$v=\frac{2}{3\gamma-1}\frac{r}{t}, \qquad \rho=\rho_1\beta z^{*\frac{1}{\gamma-1}}\left(\frac{r}{a_1 t}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \qquad p=p_1\beta z^{*\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{r}{a_1 t}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \tag{4.15}$$

Решение (4.15) является частным случаем общего решения, зависящего от одной размерной постоянной, рассмотренного нами в п. 1 и 2. Формулы (1.1) и (2.4) приводятся к формулам (4.15) при

$$k=\frac{3\gamma-1}{1-\gamma}, \qquad s=\frac{2}{\gamma-1} \tag{4.16}$$

В решении (4.15) при $t=0$, $r\neq 0$ имеем $v=\infty$, $\rho=\infty$, $p=\infty$; при $t>0$ бесконечные значения сохраняются только при $r=\infty$; при $r=0$ имеем $v=0$, $\rho=0$, $p=0$.

Рассмотрим, наконец, особую точку C. Вблизи точки $V=1$, $z=0$ при достаточно малых $z>\frac{1}{3}(V-1)^2$ продолжение интегральных кривых вправо и влево приводят к пересечению с параболой $z=\frac{1}{3}(V-1)^2$. В точках этой параболы имеем $(dz/dV)=\infty$; при дальнейшем продолжении интегральные кривые стремятся к точке C, оставаясь ниже параболы $z=\frac{1}{3}(V-1)^2$. Следовательно, точка C является узлом.

Нетрудно показать, что для всех $\gamma>1$ имеет место неравенство

$$\lim_{V\to 1}\frac{z}{(V-1)^2}<\frac{1}{3} \tag{4.17}$$

Отсюда следут, что производная $d\ln\lambda/dV$ при $V=1$ имеет конечное значение. Следовательно, при движении по интегральной кривой приходим в точку C с конечным значением параметра λ. Точка C может соответствовать станционарному разрыву или границе, перемещающейся вместе с частицами жидкости.

В точке C имеем $z=\gamma P/R=0$, отсюда и из (4.3) следует, что для всех решений, отличных от $z=0$, при приближении к точке C давление и плотность стремятся к нулю.

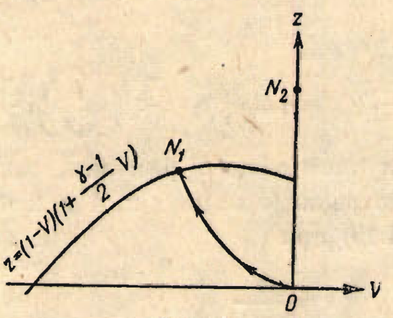
Уменьшению r соответствует движение по интегральной кривой в сторону возрастания параметра λ. При $0\leqslant r\leqslant\infty$ имеем $\infty\leqslant\lambda\leqslant 0$.

С помощью уравнения (4.2) легко указать направления возрастания параметра λ вдоль интегральных кривых. На фиг. 4 эти направления указаны стрелками.

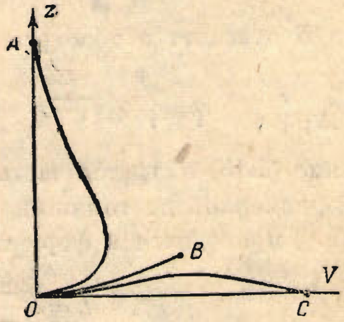
На параболе $z=(V-1)^2$ параметр λ достигает максимума при $V<0$ и $V>1$ и минимума при $0<V<1$.

Очевидно, что непрерывный переход по интегральной кривой через точки этой параболы, исключая точки A и C, физически недопустим, так как это приводит к неоднозначности.

В центре симметрии потока $r=0$ и $\lambda=\infty$. В плоскости zV движение жидкости продолжается до центра $r=0$ вдоль интегральной прямой $V=0$, $z\to+\infty$, отвечающей состоянию покоя; вдоль прямой $z=0$, $V\to\pm\infty$, для которой либо плотность бесконечна, либо давление равно нулю; для особого решения (4.15), т. е. для точки B, и, наконец, для движения, отвечающего интегральным кривым OB и DB, упирающимся в особое решение для точки B.



Фиг. 5



Фиг. 6

В бесконечно удаленной точке потока имеем $r=\infty$, $\lambda=0$. В плоскости z_1V бесконечно удаленной точке потока могут соответствовать только особые точки O и B. В бесконечности для точки B скорость получается бесконечной. Для решений, исходящих из точки O, скорость жидкости в бесконечности может иметь любое значение.

5. Опираясь на данный выше общий анализ: условий на скачках и поведения интегральных кривых уравнений (4.1) и (4.2) в плоскости z_1V, нетрудно построить решения задач, отмеченных в п. 1 (стр. 292).

Задача 1°. Вид интегральной кривой при $v_1<0$ представлен на схеме фиг. 5. Начальные данные для интегральной кривой определяются значениями $v_1=v_0$, $\rho_1=\rho_0$ и $p_1=p_0$ с помощью формул (4.7) и (4.8)

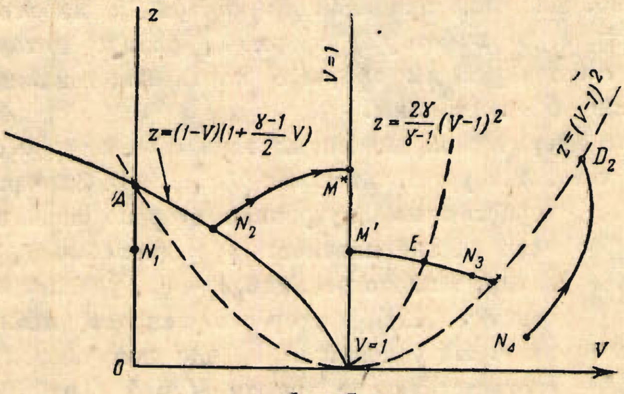
В точке N_1 пересечения параболы $z=(1-V)[1+(\gamma-1)V/2]$ с интегральной кривой возникает сильный скачок, за которым жидкость находится в покое (точка N_2). Скорость распространения скачка C, равная скорости роста радиуса сферического ядра с остановленным газом, определяется значением параметра $\lambda^*=\gamma p_1/(\rho_1c^2)$, отвечающего точкам N_1 и N_2.

Если $v_1>0$, то соответствующие интегральные кривые представлены на фиг. 6. При достаточно малых v_1 получаются интегральные кривые типа OA, причем движение оказывается непрерывным для всех r. Вблизи центра симметрии образуется сферическое ядро покоящегося газа, переходящего слабым разрывом в движение, слабому разрыву соответствует точка A. При некоторой начальной скорости $v_1=v_1^*$ в плоскости z_1V получается интегральная кривая OB. Центру симметрии соответствует точка B: в этом случае скорость газа будет равна нулю только в одной точке — в центре симметрии. Если $v_1>v_1^*$, то интегральные кривые стремятся к точке C

в которой параметр λ имеет некоторое конечное, отличное от нуля постоянное значение λ^*, а давление и плотность обращаются в нуль. Следовательно, при начальных скоростях $v_1 > v_1^*$ в газе образуется пустота, расширяющаяся с постоянной скоростью, определяемой значением λ^*.

2°. Обозначим через U скорость сферического поршня, равную скорости частиц газа на сфере S_0; давление внутри этой сферы постоянно и равно p^*.

Плотность и давление в покоящейся жидкости обозначим через ρ_1 и p_1. В плоскости zV граничной сфере S_0 соответствует некоторая точка прямой $V=1$. Интегральные кривые, исходящие из точек прямой $V=1$, пересекают параболу $z=(V-1)^2$. Поэтому продолжение движения до точки O, соответствующей бесконечно удаленной точке, возможно только скачком.



Фиг. 7

По предположению движение жидкости возникает из состояния покоя, поэтому на внешней стороне скачка должно быть $V_1=0$, $z_1 \neq 0$, т. е. соответствующая точка лежит на оси z. Отсюда следует, что точка N_2 (z_2, V_2) определяется пересечением интегральной кривой (фиг. 7) с параболой

$$z=(1-V)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}V\right)$$

На прямой $V=1$ сфере S_0 соответствует точка M^* и значение

$$\lambda^*=\frac{\gamma p_1}{\rho_2 U^2} > \lambda_1 = \frac{\gamma p_1}{\rho_1 c^2}$$

так что $c > U$.

При $c^2 \to a_1^2$, значения z^* и λ^* стремятся к бесконечности, а скорость U стремится к нулю.

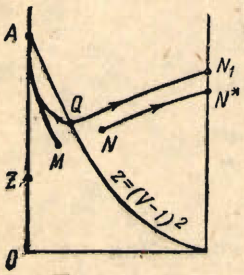
В результате произведенных нами численных расчетов мы определили зависимость отношений U/c, ρ^*/ρ_1, p^*/p_1 от величины a_1/c. На фиг. 2 эти зависимости представлены в виде пунктирных кривых; сравнение пунктирных кривых с сплошными кривыми дает увеличение рассматриваемых отношений при переходе от скачка к поршню (сфере S_0).

Рассмотренное движение можно продолжить внутрь сферы S_0, при продолжении сфера S_0 может оказаться поверхностью стационарного разрыва (разрывна только плотность, скорость и давление непрерывны). На прямой $V=1$, интегральная кривая $z=z\,(V)$ может иметь точку разрыва. Величина разрыва (положение точек M^* и M') определяется отношением плотностей на различных сторонах сферы S_0, которое можно задать произвольно

Из условия об однозначности следует, что из точки M' интегральную кривую можно продолжать вправо (фиг. 7) только до точки D_1 пересечения с параболой $z=(V-1)^2$. После пересечения интегральной кривой с параболой $z=2\gamma(V-1)^2/(\gamma-1)$ в точке E дальнейшее продолжение движения можно осуществить скачком из некоторой точки N_3 отрезка ED в соответствующую точку N_4. От точки N_4 интегральная кривая продолжаема при выполнении условий об однозначности только до пересечения с параболой $z=(V-1)^2$ в точке D_2. По теореме Цемплена других скачков произойти уже не может. Точкам N_1, N_2; $M^* M'$; N_3, N_4 и D_2 соответствуют скорости распространения c, U, c' и U'. Очевидна справедливость неравенств $c>U>c'>U'$.

Следовательно, движение продолжаемо внутрь S_0, но это продолжение осуществимо только до некоторой сферы S, радиус которой растет по закону $r=U't$. На поверхности сферы S плотность, давление и скорости жидкости (большие U') постоянны.

3°. На фронте сферической детонации имеем $\lambda=a_1^2/c^2=\text{const}$. Внешней стороне скачка соответствует точка $z_1=a_1^2/c^2$, $V=0$. Значение всех характеристик на внутренней стороне скачка определится, если задана плотность ρ_1 и давление p_1 в покоящейся смеси, теплота реакции q_1-q_2, удовлетворяющая неравенству (3.21), и скорость распространения ударной волны c. Из условий на скачке получаются два решения, соответствующие точкам M и N (фиг. 3).



Фиг. 8

Продолжение движения от точки M осуществляется интегральной кривой MA (фиг. 8). Точка A соответствует границе расширяющегося ядра, в котором покоится газ, — продукт химической реакции, сопровождающей детонацию.

Продолжение движения от точки N осуществляется интегральной кривой NM^*. Очевидно, что это движение нельзя продолжить до центра симметрии. Движения такого рода можно возбудить с помощью дополнительного сферического поршня, который мы рассматривали в задаче 2°.

Скорость распространения детонации при заданной величине q_1-q_2 минимальна, когда точка M и N сливаются в одну точку Q, расположенную на параболе $z=(V-1)^2$. В этом критическом случае движение можно продолжать либо вправо к точке N_1^*, либо влево к точке A. В первом случае давления во внутренней области и на поршне получаются бóльшими, чем на скачке, во втором случае за скачком возникает волна разрежения, в которой давления уменьшаются от точки Q до точки A.

Различными авторами уделено много внимания вопросу об определении скорости детонации[1]. Можно отметить, что все гидродинамические условия удовлетворяются, если скачок происходит в точку M и продолжение движения производится вдоль интегральной кривой MA.

Опытные данные показывают, что имеет место режим детонации, соответствующий минимальной скорости, отвечающей точке Q (фиг. 8),

---

[1] См., например, Зельдович, [2] Гриб [3],

с последующим изменением характеристик вдоль интегральной кривой QA. Для обоснования этого факта Зельдович привлекал некоторые соображения, связанные с химическим механизмом реакции в фронте ударной волны.

Очевидно, что в любой момент времени каждое движение рассматриваемого типа механически подобно любому состоянию и, в частности, состоянию для момента времени, сколь угодно близкому к начальному моменту возникновения детонации в центре симметрии. Это обстоятельство может служить поводом к обоснованию выбора скорости детонации через данные о способе возбуждения в центре симметрии. Если детонация возбуждается в центре внешним давлением, то скачку должна соответствовать точка типа N. С другой стороны, требование о равенстве нулю скорости продуктов реакции в центре симметрии приводит к решениям, в которых скачку соответствует точка типа M. Одновременное выполнение этих двух условий может удовлетвориться только для точек типа Q и интегральной кривой типа QA. Эти соображения можно рассматривать как некоторое обоснование того, что на практике должны получаться режимы скачков, соответствующих точкам типа Q.

Поступила в редакцию
28 IV 1945

L. I. SEDOV.—UNSTEADY MOTIONS OF COMPRESSIBLE FLUIDS

Employing the theory of dimensionality, the author finds a number of exact solutions of the equations of one dimensional unsteady motion of a compressible fluid in the case of plane waves and motions with cylindrical and spherical symmetry. He arrives at solutions, depending upon constants, among which but two (a, b) or only one (b) have independent dimension. Here formulae (1.1) in which V, R and P depend upon only one variable λ, hold for the velocity, density and pressure. The corresponding motions may have strong and weak ruptures; the formula (1.2) holds for $t=0$,

These solutions make it possible to construct the solutions for the problem of «explosions» over a plane, the problem of detonation, the problem of a gas under constant pressure, the problem of motion of a gas away from and towards a centre. The work gives a complete solution of the abovementioned problems in cases of spherical symmetry (n° 4 and 6).

For the general case, the solution is reduced to the integration of a differential equation of the first order (5.5). In particular cases, the author obtains the solutions in finite forms, containing an arbitrary constant (2.1), (2.12), (2.13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Доклады Академии Наук. Новая серия. Т. XLVII. № 2. 1945.
2. Седов Л. И. Методы теории размерностей и теории подобия в механике. Гостехиздат. 1944.
3. Kochin N. Rendiconti del circolo matematico di Palermo. 1925. Novembre T. L.
4. Зельдович. Теория горения и детонации газов. Изд. АН СССР, 1944.
5. Гриб. Прикладная математика и механика. 1948. Т. VIII. Вып. 4.