Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

М. Д. Хаскинд
(Москва)

§ 1. Постановка задачи. Пользуясь линейной теорией волн, рассмотрим пространственную задачу о поступательном движении твердого тела с постоянной горизонтальной скоростью под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости конечной глубины.

Пусть xyz — подвижная система координат, скрепленная с телом плоскость xy совпадает с невозмущенным уровнем жидкости, причем ось x направлена в сторону движения; ось z — вертикально вверх.

Примем, что движение жидкости потенциальное и установившееся относительно тела. Тогда для определения потенциала скоростей $\varphi(x, y, z)$ возмущенного движения жидкости имеем граничные условия:

на поверхности тела условия обтекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = c\cos(n, x) \qquad \text{на} \quad S \tag{1.1}$$

где n — внешняя нормаль к поверхности тела S;

на свободной поверхности жидкости давление постоянно и равно атмосферному, поэтому это условие в линеаризированном виде при $z=0$ дает

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad \left(\nu = \frac{g}{c^2}\right) \tag{1.2}$$

и, наконец, при $z = -h$ имеем условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

К этим условиям следует присоединить требование об ограниченности скорости в области, занятой жидкостью, и стремление ее к нулю при $x \to +\infty$.

Плоская задача о поступательном движении тела под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины нами ранее рассматривалась [1] методом Н. Е. Кочина [2]. В настоящей статье обобщаем метод Н. Е. Кочина на случай конечной глубины в пространственной задаче и устанавливаем общие выражения для гидродинамических сил и потенциала скоростей через особую функцию, введенную Н. Е. Кочиным.

§ 2. Основные уравнения. Пусть в точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$ под свободной поверхностью тяжелой жидкости глубины h имеем источник. Потенциал скоростей $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ соответствующего волнового движения будем искать в виде

$$G = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \tag{2.1}$$

где $G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ есть уже гармоническая функция во всей области $0 > z > -h$, включая точку $Q(\xi, \eta, \zeta)$ и

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \qquad r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta+2h)^2} \tag{2.2}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r'} \qquad \text{при} \quad z = -h$$

то для определения функции G_1 имеем условия

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial G_1}{\partial z} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \nu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \qquad \text{при} \quad z = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} = 0 \qquad \text{при} \quad z = -h \tag{2.4}$$

Воспользуемся представлениями

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda [z-\zeta-i(x-\xi)\cos\theta - i(y-\eta)\sin\theta]}\, d\theta\, d\lambda \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda [z+\zeta+2h-i(x-\xi)\cos\theta - i(y-\eta)\sin\theta]}\, d\theta\, d\lambda \tag{2.6}$$

годными, если $z - \zeta > 0$ и $z + \zeta + 2h > 0$. Условие (2.3) примет вид:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial G_1}{\partial z} = \tag{2.7}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda (\zeta + h) (\lambda^2 \cos^2\theta + \nu\lambda)\, e^{i\lambda [(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]}\, d\theta\, d\lambda \qquad \text{при} \quad z = 0$$

Очевидно, что функция

$$G_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda (\zeta + h) \operatorname{ch} \lambda (z + h) (\lambda \cos^2\theta + \nu)}{\nu \operatorname{sh} \lambda h - \lambda \cos^2\theta \operatorname{ch} \lambda h}\, e^{i\lambda [(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]}\, d\theta\, d\lambda \tag{2.8}$$

есть гармоническая функция в области $-h < z < 0$, удовлетворяющая условиям (2.4) и (2.7). При этом путь интегрирования по λ, соединяющий точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, можно выбрать произвольно. Однако для удовлетворения условия на бесконечности путь интегрирования по λ следует выбрать соответствующим образом, обходящим особую точку $\lambda_0(\theta)$, где $\lambda_0(\theta)$ — действительный и положительный корень трансцендентного уравнения

$$\nu \operatorname{sh} \lambda_0 = \lambda_0 \cos^2\theta \operatorname{ch} \lambda_0 h \tag{2.9}$$

Это уравнение при $\nu h / \cos^2\theta > 1$ имеет единственный положительный корень для каждого θ. При $\nu h / \cos^2\theta < 1$ уравнение (2.9) имеет чисто мнимые корни. Легко видеть, что мы удовлетворим условию на бесконечности, если путь интегрирования по λ для значений $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ выберем обходящим особую точку $\lambda_0(\theta)$ с верхней стороны и для остальных значений $\pi > |\theta| > \frac{1}{2}\pi$ с нижней стороны[1]. Таким образом окончательно имеем

---

[1] В этом можно также убедиться, применив метод диссипативных сил.

$$G=\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\int\limits_{0\,(L_1)}^{\infty}\frac{e^{-\lambda h}(\lambda\cos^2\theta+\nu)\operatorname{ch}\lambda(\zeta+h)\operatorname{ch}\lambda(z+h)}{\nu\operatorname{sh}\lambda h-\lambda\cos^2\theta\operatorname{ch}\lambda h}\times e^{i\lambda[(x-\xi)\cos\theta+(y-\eta)\sin\theta]}\,d\theta d\lambda+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\int\limits_{0\,(L_2)}^{\infty}\frac{e^{-\lambda h}(\lambda\cos^2\theta+\nu)\operatorname{ch}\lambda(\zeta+h)\operatorname{ch}\lambda(z+h)}{\nu\operatorname{sh}\lambda h-\lambda\cos^2\theta\operatorname{ch}\lambda h}\,e^{-i\lambda[(x-\xi)\cos\theta+(y-\eta)\sin\theta]}\,d\theta d\lambda \quad (2.10)$$

где путь L_1 соединяет точки $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$ и обходит особую точку $\lambda_0(\theta)$ с верхней стороны, а путь L_2 соединяет эти же точки, но обходит особую точку $\lambda_0(\theta)$ с нижней стороны.

Вернемся теперь к общей задаче. Пусть функция φ дает решение поставленной задачи, т. е. функция $\varphi(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области, занятой жидкостью, граничным условиям (1.1), (1.2) (1.3) и условию ограниченности производных функции φ и стремлению их к нулю при $x\to+\infty$.

Как и в случае бесконечно глубокой жидкости [2] можно получить однозначное представление

$$\varphi(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}G-\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS \quad (2.11)$$

где S_1 — поверхность, охватывающая поверхность S, точка $P(x,y,z)$ находится вне поверхности S_1 и берется внешнее направление нормали к поверхности.

Подставим выражение (2.10) для функции G и выражение производной

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial \xi}\cos(n,\xi)+\frac{\partial G}{\partial \eta}\cos(n,\eta)+\frac{\partial G}{\partial \zeta}\cos(n,\zeta) \quad (2.12)$$

в формулу (2.11) и произведем перемену порядка интегрирования. Затем, следуя Н. Е. Кочину, введем функцию

$$H(\lambda,\theta)=\iint\limits_{S_1}e^{\lambda(z+h+ix\cos\theta+iy\sin\theta)}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\lambda\varphi[i\cos\theta\cos(n,x)+\right.$$

$$\left.+i\sin\theta\cos(n,y)+\cos(n,z)]\right\}dS \quad (2.13)$$

Таким образом потенциал скоростей получим в виде суммы двух функций

$$\varphi(x,y,z)=\varphi_1(x,y,z)+\varphi_2(x,y,z) \quad (2.14)$$

где первая функция

$$\varphi_1(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{1}{r}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dS \quad (2.15)$$

гармоническая вне поверхности S_1, а вторая

$$\varphi_2(x,y,z)=-\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\lambda(z+h-ix\cos\theta-iy\sin\theta)}H(-\lambda,\theta)\,d\theta\,d\lambda- \quad (2.16)$$

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\int\limits_{0\,(L_1)}^{\infty}\frac{e^{-\lambda h}(\lambda\cos^2\theta+\nu)\operatorname{ch}\lambda(z+h)}{\nu\operatorname{sh}\lambda h-\lambda\cos^2\theta\operatorname{ch}\lambda h}[\overline{H}(\lambda,\theta)+H(-\lambda,\theta)]\,e^{i\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,d\theta\,d\lambda-$$

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\int_{0(L_2)}^{\infty}\frac{e^{-\lambda h}(\lambda\cos^2\theta+\nu)\operatorname{ch}\lambda(z+h)}{\nu\operatorname{sh}\lambda h-\lambda\cos^2\theta\operatorname{ch}\lambda h}[H(\lambda,\theta)+\overline{H}(-\lambda,\theta)]e^{-i\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,d\theta\,d\lambda$$

гармоническая функция во всей области $-h<z<0$. В этих выражениях черта над буквой обозначает комплексно сопряженную величину.

§ 3. Формулы для гидродинамических сил. Пусть координатная система осей x, y, z определяется единичными векторами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Для главного вектора сил давления, приложенных к элементам поверхности S, имеем [2]

$$\mathbf{F}=\rho gV\mathbf{k}+\rho\mathbf{I} \tag{3.1}$$

где ρgV — архимедова сила, а

$$\mathbf{I}=\int_{S_1}\left[\operatorname{grad}\varphi_2\times(\mathbf{n}\times\operatorname{grad}\varphi)-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\operatorname{grad}\varphi_2\right]dS \tag{3.2}$$

Для вычисления вектора $\mathbf{I}$ воспользуемся представлением (2.16), после чего получим

$$\mathbf{I}=-\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\infty}H(-\lambda,\theta)\,\overline{\mathbf{C}}(-\lambda,\theta)\,d\theta\,d\lambda- \tag{3.3}$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\int_{0(L_1)}^{\infty}\frac{(\nu+\lambda\cos^2\theta)\,e^{-\lambda h}}{\nu\operatorname{sh}\lambda h-\lambda\cos^2\theta\operatorname{ch}\lambda h}[\overline{H}(\lambda,\theta)+H(-\lambda,\theta)][\mathbf{C}(\lambda,\theta)+\overline{\mathbf{C}}(-\lambda,\theta)]\,d\theta\,d\lambda-$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\int_{0(L_2)}^{\infty}\frac{(\nu+\lambda\cos^2\theta)\,e^{-\lambda h}}{\nu\operatorname{sh}\lambda h-\lambda\cos^2\theta\operatorname{ch}\lambda h}[H(\lambda,\theta)+\overline{H}(-\lambda,\theta)][\overline{\mathbf{C}}(\lambda,\theta)+\mathbf{C}(-\lambda,\theta)]\,d\theta\,d\lambda$$

где

$$\mathbf{C}(\lambda,\theta)=\iint_{S_1}\Big[\operatorname{grad}e^{\lambda(z+h+ix\cos\theta+iy\sin\theta)}\times(\mathbf{n}\times\operatorname{grad}\varphi)-$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\operatorname{grad}e^{\lambda(z+h+ix\cos\theta+iy\sin\theta)}\Big]\,dS \tag{3.4}$$

Функция $\mathbf{C}(\lambda,\theta)$ выражается через функцию $H(\lambda,\theta)$ следующим образом [2]:

$$\mathbf{C}(\lambda,\theta)=-\lambda\,\mathbf{E}H(\lambda;\theta),\quad\text{где}\quad\mathbf{E}=i\cos\theta\,\mathbf{i}+i\sin\theta\,\mathbf{j}+\mathbf{k} \tag{3.5}$$

Приняв это во внимание, для проекций гидродинамических сил после несложных вычислений окончательно находим

$$X=-\frac{\rho\nu^2}{8\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\frac{|H(\lambda_0,\theta)+H(-\lambda_0,\theta)|^2}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h-\nu h/\cos^2\theta}\,\frac{\operatorname{th}\lambda_0 h}{\cos^3\theta}\,d\theta \tag{3.6}$$

$$Y = -\frac{\rho\nu^2}{8\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{|\overline{H}(\lambda_0,\theta) + H(-\lambda,\theta)|^2}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h - \nu h/\cos^2\theta}\,\frac{\operatorname{th}\lambda_0 h\sin\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta \tag{3.7}$$

$$Z = \rho g V - \frac{\rho}{8\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\lambda|H(-\lambda,\theta)|^2\,d\theta\,d\lambda - \frac{\rho\nu^2}{4\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{Im}(H(\lambda_0,\theta)\,H(-\lambda_0,\theta))}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h - \nu h/\cos^2\theta}\,\frac{\operatorname{th}\lambda_0 h}{\cos^4\theta}\,d\theta +$$

$$+\frac{\rho}{8\pi^2}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\text{v.p.}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\lambda(\nu+\lambda\cos^2\theta)\,e^{-\lambda h}}{\nu\,\operatorname{sh}\lambda h - \lambda\cos^2\theta\,\operatorname{ch}\lambda h}\left[|H(\lambda,\theta)|^2 - |H(-\lambda,\theta)|^2\right]d\theta\,d\lambda \tag{3.8}$$

В частном случае бесконечной глубины жидкости

$$\lambda_0 = \frac{\nu}{\cos^2\theta} \tag{3.9}$$

и формулы (3.6) — (3.8) приводят к выражениям

$$X = -\frac{\rho\nu^2}{2\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\left|\widetilde{H}\left(\frac{\nu}{\cos^2\theta},\ \theta\right)\right|^2\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \tag{3.10}$$

$$Y = -\frac{\rho\nu^2}{2\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\left|\widetilde{H}\left(\frac{\nu}{\cos^2\theta},\ \theta\right)\right|^2\frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^4\theta} \tag{3.11}$$

$$Z = \rho g V + \frac{\rho}{4\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\text{v.p.}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\lambda(\nu+\lambda\cos\theta)}{\nu-\lambda\cos^2\theta}\,|\widetilde{H}(\lambda,\theta)|^2\,d\theta\,d\lambda \tag{3.12}$$

совпадающие с формулами Н. Е. Кочина[2] и в которых

$$\widetilde{H}(\lambda,\theta) = e^{-\lambda h}H(\lambda,\theta) = \tag{3.13}$$

$$= \iint\limits_{S_1} e^{\lambda(z+ix\cos\theta+iy\sin\theta)}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \lambda\varphi\left[i\cos\theta\cos(n,x) + i\sin\theta\cos(n,y) + \cos(n,z)\right]\right\}dS$$

В дальнейшем мы ограничимся вычислением только волнового сопротивления тел, симметричных относительно плоскости xz. В этом случае функция $H(\lambda,\theta)$ будет четной функцией от θ и поэтому Y обращается в нуль, а для волнового сопротивления $R = -X$ будем иметь формулу

$$R = \frac{\rho\nu^2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{|M(\lambda_0,\theta)|^2}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h - \nu h/\cos^2\theta}\,\frac{\operatorname{th}\lambda_0 h}{\cos^3\theta}\,d\theta \tag{3.14}$$

где

$$M(\lambda,\theta) = \frac{1}{2}\left[H(\lambda,\theta) + H(-\lambda,\theta)\right] = \iint\limits_{S_1}\operatorname{ch}\lambda(z+h)\,e^{i\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n} -\right.$$

$$\left. - \lambda\varphi\left[i\cos\theta\cos(n,x) + i\sin\theta(n,y) + \operatorname{th}\lambda(z+h)\cos(n,z)\right]\right\}dS \tag{3.15}$$

Следует отметить, что интегрирование по θ в формуле (3.14) распространяется только на те значения θ, для которых уравнение (2.9) имеет действительный и положительный корень $\lambda_0(\theta)$, т. е. на значения θ, определяющиеся из неравенства

$$\frac{\nu h}{\cos^2\theta} < 1 \tag{3.16}$$

Поэтому формулу (3.14) можно представить в виде

$$R=\frac{\rho\nu^2}{\pi}\int\limits_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|M(\lambda_0,\theta)|^2}{\mathrm{ch}^2\lambda_0 h-\nu h/\cos^2\theta}\,\frac{\mathrm{th}\,\lambda_0 h}{\cos^3\theta}\,d\theta \tag{317}$$

Здесь нижний предел $\theta_0=0$ при $\nu h>1$, т. е. когда $c^2<gh$, и $\theta_0=\arccos\sqrt{\nu h}$ при $\nu h<1$, т. е. когда $c^2>gh$.

Таким образом изменение нижнего предела происходит в зависимости от значения величины скорости по отношению к так называемой критической скорости $c^*=\sqrt{gh}$, соответствующей данной глубине.

Это изменение объясняется тем, что при $c<c^*$ за телом остается система поперечных и продольных волн, заключенных внутри некоторого угла. При $c>c^*$ за телом остается только система продольных волн.

Формуле (3.17) можно придать несколько более удобный вид для интегрирования, а именно, введя новую переменную интегрирования $\gamma=\lambda_0(\theta)h$ и воспользовавшись (2.9), получим

$$R=\frac{\rho\nu}{2\pi h}\int\limits_{\gamma_0}^{\infty}\frac{|M(\gamma/h,\theta)|^2}{\mathrm{ch}^2\gamma\sqrt{\gamma^2-\alpha\gamma\,\mathrm{th}\,\gamma}}\,\gamma\,d\gamma \tag{3.18}$$

Здесь

$$\alpha=\nu h,\qquad \theta=\arccos\sqrt{\frac{\alpha\,\mathrm{th}\,\gamma}{\gamma}} \tag{3.19}$$

а нижний предел интегрирования принимает значение 0, если $\alpha<1$, т. е. $c^2>gh$, и значение, равное действительному и положительному корню уравнения $\alpha\,\mathrm{th}\,\gamma=\gamma$, если $\alpha>1$, т. е. $c^2<gh$.

§ 4. Примеры вычисления волнового сопротивления. В качестве первого примера рассмотрим корабль типа Мичелля. Корабль типа Мичелля предполагается, как обычно, симметричным относительно плоскости xz, уравнение погруженной части корабля будет поэтому иметь вид

$$\eta=\pm f(x,z) \tag{4.1}$$

причем предполагается, что толщина корабля мала по сравнению с его длиной и осадкой и что касательная плоскость в точках поверхности очень мало наклонена к диаметральной плоскости, т. е. производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial z$ малы.

Для определения функции $\varphi(x,y,z)$ граничное условие (1.1) при сделанных допущениях можно заменить на

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-c\frac{\partial f}{\partial x} \tag{4.2}$$

которое следует считать выполняющимся при $y=0$ на диаметральной плоскости. Ввиду симметрии корабля потенциал φ имеет одинаковые значения в точках симметричных относительно плоскости xz.

В силу сделанного предположения о тонкости корабля, после стягивания поверхности S к диаметральной плоскости S_0 из формулы (3.15) получим

$$M(\lambda,\theta)=-2c\iint\limits_{S_0}\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{ch}\,\lambda(z+h)\,e^{i\lambda x\cos\theta}\,ds \tag{4.3}$$

Вводя обозначения

$$I = \iint\limits_{S_0} \frac{\partial f}{\partial x} \operatorname{ch} \gamma \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos \frac{x}{h} \sqrt{\alpha\gamma \operatorname{th} \gamma}\, dS \tag{4.4}$$

$$J = \iint\limits_{S_0} \frac{\partial f}{\partial x} \operatorname{ch} \gamma \left(1 + \frac{z}{h}\right) \sin \frac{x}{h} \sqrt{\alpha\gamma \operatorname{th} \gamma}\, dS \tag{4.5}$$

эту формулу представим в виде

$$M\left(\frac{\gamma}{h}, \theta\right) = -2c\,(I + iJ) \qquad \left(\cos\theta = \sqrt{\frac{\alpha \operatorname{th} \gamma}{\gamma}}\right) \tag{4.6}$$

Тогда по формуле для волнового сопротивления (3.18) получаем

$$R = \frac{2\rho g}{\pi h} \int\limits_{\gamma_0}^{\infty} \frac{I^2 + J^2}{\operatorname{ch}^2 \gamma \sqrt{\gamma^2 - \alpha\gamma \operatorname{th} \gamma}}\, \gamma\, d\gamma \tag{4.7}$$

Эта последняя формула впервые была установлена М. В. Келдышем и Л. И. Седовым [3]. Следующим примером рассмотрим случай движения сферы радиуса a, находящейся на глубине h_0.

Для приближенного вычисления функции $M(\lambda, \theta)$ подставим в формулу (3.15) вместо φ то выражение этой функции, которое отвечает случаю безграничной жидкости. Такое приближение тем точнее, чем больше относительная глубина погружения сферы. Воспользовавшись выражением функции $H(\lambda, \theta)\, e^{-\lambda h}$, вычисленным для сферы в случае босконечно глубокой жидкости [2], и формулой (3.15) для функции $M(\lambda, \theta)$, получаем

$$M(\lambda, \theta) = 2\pi i c\, \lambda\, a^3 \cos\theta \operatorname{ch} \lambda\, (h - h_0) \tag{4.8}$$

По формуле (3.18) находим [1]

$$R = 2\pi \rho c^2 \nu^2 \frac{a^6}{h^2} \int\limits_{\gamma_0}^{\infty} \frac{\gamma^2 \operatorname{th} \gamma \operatorname{ch}^2 \gamma (1 - h_0 / h)}{\operatorname{ch}^2 \gamma \sqrt{\gamma^2 - \alpha\gamma \operatorname{th} \gamma}}\, d\gamma \tag{4.9}$$

В качестве последнего примера рассмотрим движение эллипсоида с осями a, b, c,, находящегося на глубине h_0 и движущегося в направлениии большой оси a параллельно положительному направлению оси x со скоростью U.

Поступая аналогичным образом, как в предыдущем примере, для функции $M(\lambda, \theta)$ находим выражение

$$M(\lambda, \theta) = \frac{4\sqrt{2}\, \pi^{\frac{3}{2}}\, i\, abc\, U \cos\theta \operatorname{ch} \lambda\, (h - h_0)}{(2 - A_0) \sqrt[4]{(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta - c^2)^3} \sqrt{\lambda}}\, J_{\frac{3}{2}} \left(\lambda \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta - c^2}\right) \tag{4.10}$$

Здесь A_0 есть эллиптический интеграл:

$$A_0 = abc \int\limits_0^{\infty} \frac{dk}{(a^2 + k)\, \Delta(k)}, \qquad \Delta(k) = \sqrt{(a^2 + k)(b^2 + k)(c^2 + k)} \tag{4.11}$$

и $J_{\frac{3}{2}}(z)$ — функция Бесселя

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right) \tag{4.12}$$

[1] Такое приближение равносильно замене действия сферы диполем соответствующей интенсивности. Задача о движении диполя в жидкости конечной глубины рассматривалась Хавелоком [4]. Формула волнового сопротивления диполя вычислена им неверно.

Для того чтобы воспользоваться формулой (3.18), следует произвести в (4.10) замену:

$$\lambda_0(\theta)=\frac{\gamma}{h}, \qquad \cos^2\theta=\frac{\alpha \operatorname{th}\gamma}{\gamma} \tag{4.13}$$

Таким образом получим

$$R=\frac{16\rho\pi^2\nu^2 h a^2 b^2 c^2 U^2}{(2-A_0)^2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\gamma_0}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\gamma \operatorname{ch}^2\gamma\,(1-h_0/h)J_{\frac{3}{2}}^2\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{h^2}(\alpha\gamma\operatorname{th}\gamma+\varkappa^2\gamma^2)}\right)}{\gamma\left(\frac{\alpha\operatorname{th}\gamma}{\gamma}+\varkappa^2\right)^{\frac{3}{2}}\operatorname{ch}^2\gamma\sqrt{\gamma^2-\alpha\gamma\operatorname{th}\gamma}}\,d\gamma \tag{4.14}$$

где $\varkappa=(b^2-c^2)/(a^2-b^2)$

Для эллипсоида вращения $b=c$, $\varkappa=0$ и формула (4.14) упрощается

$$R=\frac{16\rho\pi^2 U^2 b^3\alpha^{\frac{1}{2}}}{(2-A_0)^2 h\eta e^3}\int\limits_{\gamma_0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}^2\gamma\,(1-h_0/h)\,J_{\frac{3}{2}}^2\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{h^2}\alpha\gamma\operatorname{th}\gamma}\right)}{\operatorname{ch}^2\gamma\sqrt{\operatorname{th}\gamma\,(\gamma^2-\alpha\gamma\operatorname{th}\gamma)}}\sqrt{\gamma}\,d\gamma \tag{4.15}$$

где e — эксцентриситет, а η — удлинение эллипсоида:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \qquad \eta=\frac{a}{b}, \qquad A_0=-\frac{2}{\eta^2 e^3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1-e}{1+e}+e\right) \tag{4.16}$$

Поступила в редакцию
25 I 1945

M. D. HASKIND. — WAVE RESISTANCE OF A SOLID IN MOTION THROUGH A FLUID OF FINITE DEPTH

The author deals with the three-dimensional motion of a body with constant horizontal velocity below the free surface of a heavy incompressible fluid of finite depth. The metnod employed is that developed by Kochin [2] for cases of infinite depth.

For the hydrodynamic forces and for the potential of velocities of the disturbed motion of the fluid, the author gives the general expressions in terms of a special function introduced by Kochin.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. О поступательном движении тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. Прикладная математика и механика. 1945. Т. IX. Вып. I
2. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Труды конференции по теории волнового сопротивления. Изд. ЦАГИ. М. 1937.
3. Келдыш М. В. и Седов Л. И. Теория волнового сопротивления в канале конечной глубины. Труды конференции по теории волнового сопротивления. Изд. ЦАГИ. М. 1937.
4. Havelock T. H. Wave Resistance. Proceedings of the Royal Society of London. L. 1928. v. CXVIII.