

СОПРОТИВЛЕНИЕ И ТЕПЛОТДАЧА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОТОКЕ ГАЗА ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

Л. Е. Калихман

(Москва)

Задача об обтекании пластины потоком сжимаемой жидкости (газом) при наличии теплообмена между газом и стенкой рассматривалась в работах Л. Крокко, А. Буземана, Т. Кармана и Тзяна. Крокко^[1] обратил внимание на то обстоятельство, что при постоянном отношении абсолютных температур набегающего потока и нагретой пластины теплоотдача последней падает с ростом числа Маха вследствие притока тепла за счет работы внутренних сил трения и, начиная с некоторого числа Маха, вместо охлаждения стенки имеет место ее нагревание. Бузман^[2] составил дифференциальное уравнение, являющееся обобщением уравнения Блазиуса на случай газа, движущегося с большими скоростями при наличии теплопередачи между ламинарным пограничным слоем и стенкой. Уравнение Буземана, кроме числа Маха, содержит еще отношение «температур торможения» стенки и набегающего потока, однако проинтегрировано им лишь для случая, когда последнее отношение равно единице (и для одного числа Маха), что соответствует отсутствию теплообмена между газом и пластиной. Карман и Тзян^[3], следуя методу Мизеса и применяя процесс последовательных приближений, рассчитали один пример обтекания пластины газом при больших скоростях, а именно случай ламинарного пограничного слоя при отношении абсолютных температур стенки и набегающего потока, равном $\frac{1}{4}$.

Применительно к турбулентному пограничному слою потока газа, обтекающего с большими скоростями плоскую пластину при наличии теплообмена между газом и стенкой, не было опубликовано, сколько нам известно, даже предварительных решений.

Задача об учете влияния сжимаемости на пограничный слой при отсутствии теплопередачи между газом и стенкой была решена А. Дородницким^[4]. Указанный Дородницким прием упрощения уравнений путем замены переменных используется в настоящей работе.

1. Результаты, общие для ламинарного и турбулентного пограничного слоя

Рассмотрим обтекание гладкой плоской пластины равномерным установившимся потоком газа. Пусть на пластине поддерживается постоянная температура T_w .

Вне пограничного слоя имеем всюду постоянную скорость U , давление p_0 , температуру T_0 , плотность ρ_0 . Направим ось x по длине пластины, ось y по перпендикуляру к пластине; назовем u , v компоненты скорости по осям x , y . Число Прандтля P принимаем равным единице как в случае ламинарного слоя ($P = \mu C_p / \lambda$, C_p — массовая теплоемкость при постоянном давлении, μ —

коэффициент вязкости, λ — коэффициент теплопроводности), так и в случае турбулентного слоя ($P = \mu_{\text{turb}} C_p / \lambda_{\text{turb}}$).

Задача состоит в решении системы уравнений (см., например, [1])

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right] \quad (1.3)$$

где $\Theta = T + \frac{u^2}{2JC_p}$ — так называемая температура торможения, T — абсолютная температура, J — механический эквивалент тепла.

Граничные условия задачи

$$\begin{aligned} u = v = 0, & \quad T = T_w & \text{при} & \quad y = 0 \\ u = U, & \quad T = T_0 & \text{при} & \quad y = \delta_y \end{aligned} \quad (1.4)$$

В уравнениях (1.1) и (1.3) коэффициент турбулентного обмена ε в случае ламинарного слоя следует положить равным нулю; наоборот, в случае турбулентного слоя коэффициент вязкости μ пренебрежимо мал по сравнению с ε .

Интегралом уравнения (1.3), удовлетворяющим условию отсутствия теплопередачи $(\partial T / \partial y)_{y=0} = 0$, является

$$\Theta = \text{const} \quad \text{или} \quad T + \frac{u^2}{2JC_p} = \frac{i_0}{JC_p} \quad (1.5)$$

где i_0 — полная энергия

$$i_0 = JC_p T_0 + \frac{U^2}{2} \quad (1.6)$$

Интеграл (1.5) показывает, что при отсутствии теплопередачи температура стенки равна температуре торможения набегающего потока

$$T_{00} = T_0 + \frac{U^2}{2JC_p} \quad (1.7)$$

Таким образом при $T_w \neq T_{00}$, т. е. при наличии теплопередачи, интеграл (1.5) не удовлетворяет условиям на стенке и потому не может быть использован для решения задачи.

Как известно, существует другой интеграл уравнения (1.3), — непосредственной проверкой можно убедиться в том, что выражение $\Theta = au + b$ в силу (1.1) удовлетворяет уравнению (1.3). Используя граничные условия (1.4) для определения a и b , получаем

$$T = T_{00} \left[1 - \bar{u}^2 + \left(\frac{T_w}{T_{00}} - 1 \right) \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}} \right) \right] \quad (1.8)$$

где обозначено

$$\bar{u} = \frac{u}{\sqrt{2i_0}}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\sqrt{2i_0}}$$

Плотность газа определим по уравнению состояния

$$\rho = \rho_{00} \frac{p}{p_{00}} \frac{T_{00}}{T}$$

где постоянная p/p_{00} согласно уравнению Бернулли равна

$$\frac{p}{p_{00}} = (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \quad \left(x = \frac{C_p}{C_v} \right)$$

Следовательно,

$$\rho = \rho_{00} \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}}{1 - \bar{u}^2 + (T_w / T_{00} - 1)(1 - \bar{u} / \bar{U})} \quad (1.9)$$

Принимая для вязкости формулу

$$\mu = \mu_{00} \left(\frac{T}{T_{00}} \right)^n \quad (n = 0,75)$$

получаем

$$\mu = \mu_{00} \left[1 - \bar{u}^2 + \left(\frac{T_w}{T_{00}} - 1 \right) \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}} \right) \right]^n \quad (1.10)$$

Интегрируя уравнение (1.1) по y от 0 до δ_y , получаем

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_y} \rho u (U - u) dy = \tau_w, \quad \text{где} \quad \tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (1.11)$$

Подставляя в (1.11) выражение (1.9), для ρ получаем

$$\rho_{00} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_y} \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} u (U - u)}{1 - \bar{u}^2 + (T_w / T_{00} - 1)(1 - \bar{u} / \bar{U})} dy = \tau_w \quad (1.12)$$

Вводим новую независимую переменную

$$\eta = \int_0^y \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}}}{1 - \bar{u}^2 + (T_w / T_{00} - 1)(1 - \bar{u} / \bar{U})} dy \quad (1.13)$$

Тогда уравнение (1.12) принимает вид

$$\rho_{00} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u (U - u) d\eta = \tau_w \quad (1.14)$$

где δ — значение переменной η , соответствующее границе слоя.

Определим толщину потери импульса в плоскости $x\eta$ формулой

$$\vartheta = \int_0^{\delta} \frac{u}{\bar{U}} \left(1 - \frac{u}{\bar{U}} \right) d\eta \quad (1.15)$$

Тогда

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_{00} U^2} \quad (1.16)$$

где $\bar{\vartheta} = \vartheta / L$, $\bar{x} = x / L$, причем L — длина пластины.

Подготовим выражения для местного c_f и суммарного C_f коэффициентов сопротивления:

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_0 U^2}, \quad C_f = \int_0^1 c_f d\bar{x} \quad (1.17)$$

Заменяя ρ_0 согласно (1.9), причем вне пограничного слоя $u = U$, получим

$$c_f = 2 \frac{d\bar{\theta}}{dx} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad C_f = 2 (\bar{\theta})_{x=L} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.18)$$

Заменяя в $\frac{U}{\sqrt{2i_0}}$ полную энергию i_0 согласно (1.6), найдем

$$\bar{U}^2 = \frac{\frac{1}{2}(\alpha-1)M^2}{1 + \frac{1}{2}(\alpha-1)M^2} \quad (1.19)$$

где $M = U/a$ — число Маха набегающего потока.

Подготовим также формулы для местной и полной теплоотдачи. Из формул (1.8) и (1.11) получаем количество тепла, проходящее в единицу времени через единицу площади пластины

$$q_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \frac{C_p (T_{00} - T_w)}{U} \tau_w \quad (1.20)$$

Будем характеризовать теплообмен между газом и стенкой числом Нусельта N_0 , отнесенным к величинам набегающего потока. Тогда, учитывая, что согласно (1.8) и (1.19)

$$T_0 = T_{00} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(\alpha-1)M^2} \quad (1.21)$$

найдем

$$N_0 = \frac{q_w L}{\lambda_0 T_0} = \frac{1}{2} c_f R \left(1 + \frac{1}{2}(\alpha-1)M^2 \right) \left(1 - \frac{T_w}{T_{00}} \right) \quad (1.22)$$

где $R = U L \rho_0 / \mu_0$ — число Рейнольдса.

Полное количество тепла Q , проходящее в единицу времени через пластину длины L и единичной ширины, равно

$$Q = \int_0^L q_w dx$$

Поэтому для суммарного числа Нусельта N имеем¹

$$N = \frac{Q}{\lambda_0 T_0} = \frac{1}{2} c_f R \left(1 + \frac{1}{2}(\alpha-1)M^2 \right) \left(1 - \frac{T_w}{T_{00}} \right) \quad (1.23)$$

Установим вытекающие из системы (1.1) — (1.3) основные формулы баланса тепла в пограничном слое. Умножая уравнение (1.1) на $-u/JC_p$ и складывая его с уравнением (1.3), получим

$$\rho \left[u \frac{\partial}{\partial x} (C_p T) + v \frac{\partial}{\partial y} (C_p T) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[C_p (\mu + \varepsilon) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{1}{J} (\mu + \varepsilon) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (1.24)$$

Интегрируя это уравнение по объему, занятому пограничным слоем, найдем

$$Q_1 = \Phi - Q, \quad \text{где} \quad Q_1 = \left(\int_0^{\delta_y} \rho u C_p (T - T_0) dy \right)_{x=L} \quad (1.25)$$

представляет изменение теплосодержания газа в единицу времени в объеме пограничного слоя на пластине длины L и шириною 1, а

$$\Phi = \frac{1}{J} \int_0^L \int_0^{\delta_y} (\mu + \varepsilon) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy dx \quad (1.26)$$

¹ Для чисел Нусельта, отнесенных к температурному напору, имеем

$$Nu_0 = \frac{q_w L}{\lambda_0 (T_{00} - T_w)} = \frac{1}{2} c_f R, \quad Nu_w = \frac{Q}{\lambda_0 (T_{00} - T_w)} = \frac{1}{2} C_f R$$

представляет количество тепла, выделяющееся в том же объеме в единицу времени за счет работы сил трения (диссипация); наконец,

$$Q = \int_0^L q_w dx \quad (1.27)$$

теплотдача, считаемая положительной при переходе тепла от газа к стенке.

2. Ламинарный пограничный слой при наличии теплопередачи

Следуя Польгаузену, представим профиль скоростей в виде

$$\frac{\bar{u}}{U} = A \left(\frac{\eta}{\delta} \right) + B \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^2 + C \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^3 + D \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^4 \quad (2.1)$$

Для определения коэффициентов имеем следующие условия:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{при } y = 0$$

$$u = U, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{при } y = \delta_y$$

Преобразуя выражение $\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ к независимой переменной η с помощью (1.10) и (1.13), получаем:

$$\text{при } \frac{\eta}{\delta} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (\eta/\delta)^2} \frac{\bar{u}}{U} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial (\eta/\delta)} \frac{\bar{u}}{U} \right)^2 = 0 \quad \left(\alpha = (1-n) \frac{T_w - T_{00}}{T_w} \right) \quad (2.2)$$

$$\text{при } \frac{\eta}{\delta} = 1$$

$$\frac{\bar{u}}{U} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial (\eta/\delta)} \frac{\bar{u}}{U} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial (\eta/\delta)^2} \frac{\bar{u}}{U} = 0 \quad (2.3)$$

После элементарных выкладок находим

$$A = \frac{3 - \sqrt{9 - 12\alpha}}{\alpha}, \quad B = 6 - 3A, \quad C = -8 + 3A, \quad D = 3 - A \quad (2.4)$$

Имея профиль скоростей, исключим δ :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1}{1260} (-5A^2 + 12A + 144) \quad (2.5)$$

а также, используя (1.10), (1.13), определим τ_w . Подставляя результаты в (1.16), получаем основное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{R_{00}} \left(\frac{T_w}{T_{00}} \right)^{n-1} \frac{A(-5A^2 + 12A + 144)}{1260 \bar{U} \delta} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \quad (2.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\sqrt{2 i_0 L \rho_{00}}}{\mu_{00}} = R \frac{1}{\bar{U}} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{1}{x-1}} = \\ &= R \left(1 + \frac{1}{2} (x-1) M^2 \right)^{\frac{x+1}{2(x-1)-n}} \left(\frac{1}{2} (x-1) M^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Интегрируя, получаем окончательно

$$\bar{\vartheta} = \sqrt{\left(\frac{T_w}{T_{00}}\right)^{n-1} \frac{2A(-5A^2 + 12A + 144)}{1260} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{R}} \left(1 + \frac{1}{2}(x-1)M^2\right)^{\frac{n}{2} - \frac{x+1}{2(x-1)}}} \quad (2.8)$$

Теперь по формулам (1.18) — (1.19) получаем

$$c_f = \sqrt{\left(\frac{T_w}{T_{00}}\right)^{n-1} \frac{2A(-5A^2 + 12A + 144)}{1260} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{R}} \left(1 + \frac{1}{2}(x-1)M^2\right)^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}} \quad (2.9)$$

$$C_f = \sqrt{\left(\frac{T_w}{T_{00}}\right)^{n-1} \frac{2A(-5A^2 + 12A + 144)}{345} \frac{1}{\sqrt{R}} \left(1 + \frac{1}{2}(x-1)M^2\right)^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}} \quad (2.10)$$

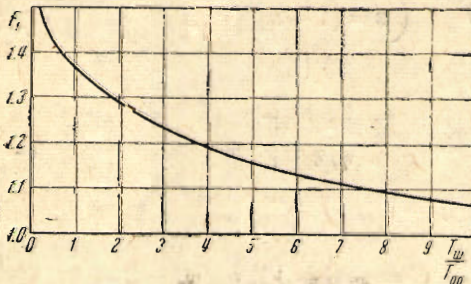
Представим формулу (2.10) в виде

$$C_f = F_1 \left(\frac{T_w}{T_{00}}\right) \frac{1}{\sqrt{R}} \left(1 + \frac{1}{2}(x-1)M^2\right)^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

Здесь

$$F_1 \left(\frac{T_w}{T_{00}}\right) = \sqrt{\left(\frac{T_w}{T_{00}}\right)^{n-1} \frac{2A(-5A^2 + 12A + 144)}{345}} \quad (2.12)$$

$$A = \frac{1}{T_w/T_{00} - 1} \left[12 \frac{T_w}{T_{00}} - 4 \sqrt{\frac{T_w}{T_{00}} \left(6 \frac{T_w}{T_{00}} + 3\right)} \right] \quad (2.13)$$



Фиг. 1.

$$\frac{T_w}{T_{00}} = \frac{T_w}{T_0} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(x-1)M^2} \quad (2.14)$$

График функции $F_1(T_w/T_{00})$ представлен на фиг. 1. При отсутствии теплопередачи ($T_w/T_{00} = 1$) получаем, естественно, то самое значение коэффициента $F_1 = 1,371$, которое дает метод Польгаузена для данного случая.

Если пластина отдает тепло газу ($T_w/T_{00} > 1$), ее сопротивление меньше, чем при отсутствии теплообмена; если пластина служит для отвода тепла от газа ($T_w/T_{00} < 1$), ее сопротивление больше, чем при отсутствии теплообмена. Сопротивление «холодной» по сравнению с набегающим потоком пластины ($T_w/T_0 < 1$) всегда больше, чем при отсутствии теплообмена. Сопротивление «нагретой» пластины ($T_w/T_0 > 1$) меньше, чем при отсутствии теплообмена лишь в пределах чисел Маха, при которых пластина отдает тепло ($T_w/T_{00} > 1$). При больших числах Маха сопротивление нагретой пластины превышает сопротивление пластины без теплообмена.

Для малых чисел Маха формула (2.13) дает

$$C_f = F_1 \left(\frac{T_w}{T_0}\right) \frac{1}{\sqrt{R}} \quad (2.15)$$

Фиг. 1 при малых числах Маха характеризует изменение сопротивления пластины изменения физических свойств газа вследствие теплообмена.

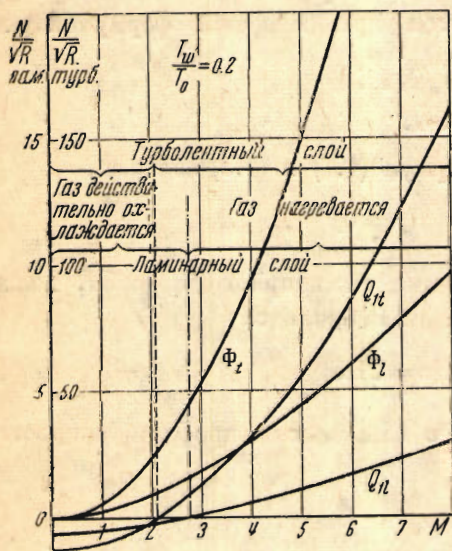
Используя полученный профиль скорости (2,1)–(2,4) и зависящий от него профиль температур (1.8) в формулах (1.25)–(1.27), найдем

$$\frac{N_Q}{\sqrt{R}} = \frac{1}{2} F_1 \left(1 - \frac{T_w}{T_{00}}\right) \left(1 + \frac{1}{2} (x-1) M^2\right)^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

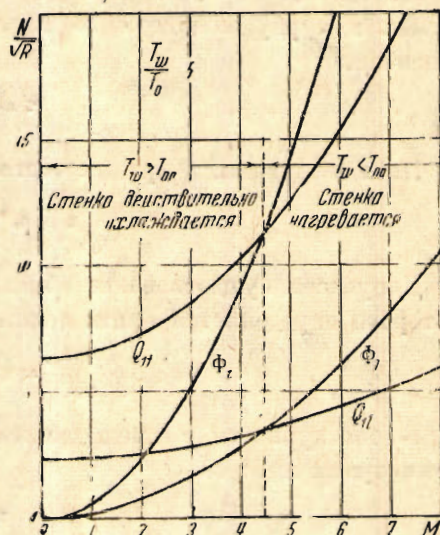
$$\frac{N_\Phi}{\sqrt{R}} = \frac{(T_w/T_{00})^{n-1} A}{745 F_1} \left(\frac{3504}{7} + \frac{292}{7} A - \frac{253}{24} A^2 - A^3\right) \frac{1}{2} (x-1) M^2 \left(1 + \frac{1}{2} (x-1) M^2\right)^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

$$\frac{N_{Q_1}}{\sqrt{R}} = \frac{N_\Phi}{\sqrt{R}} - \frac{N_Q}{\sqrt{R}} \quad (2.18)$$

Формулы (2.16)–(2.18) определяют баланс тепла в ламинарном слое при произвольном отношении температур и произвольном числе Маха.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Для примера приводим на фиг. 2 и 3 графики, характеризующие распределение тепла при двух отношениях температур, а именно: при $T_w/T_0 = 0.2$ и $T_w/T_0 = 5$. Кривая Φ_1 представляет тепло, выделяющееся вследствие работы сил трения (диссипацию), кривая Q_{1l} — тепло, остающееся в газе (изменение теплосодержания газа). Разность ординат первой и второй кривых характеризует теплопередачу между газом и стенкой. Как видно из фиг. 2, в случае $T_w/T_0 = 0.2$ при малых числах Маха Q_1 отрицательно и газ охлаждается; однако с увеличением чисел Маха интенсивность охлаждения газа падает и при $M = 2.75$ охлаждение прекращается, $Q_1 = 0$.

Начиная с этого «предельного» значения числа Маха, приток тепла за счет работы сил трения превышает количество тепла, которое отводится через стенку, вследствие чего газ нагревается.

Фиг. 3 иллюстрирует процесс изменения теплосодержания газа в случае нагретой стенки: с ростом числа Маха возрастает роль тепла, выделяющегося за счет работы сил трения и уменьшается теплоотдача стенки. При числе

Маха 4.45, соответствующем при $T_w/T_0 = 5$ условию $T_w/T_{00} = 1$, теплообмен прекращается $Q = 0$ (все тепло, выделяющееся вследствие диссипации, остается в газе); при больших числах Маха имеет место поток тепла в обратном направлении, и не только газ, но и стенка нагреваются. По формулам (2.16) — (2.18) легко рассчитать предельные значения числа Маха, определяемые условием $N_{Q_1} = 0$ при охлаждении газа и $N_Q = 0$ при охлаждении стенки, для любых других отношений температур.

Заметим, что в частном случае $T_w/T_0 = 0.25$ полученные нами формулы дают результаты, хорошо согласующиеся с расчетом Кармана-Тзяна примерно до значений числа Маха 4—5.

3. Турбулентный пограничный слой при наличии теплопередачи

Решение задачи требует установления закона сопротивления — зависимости между ϑ и τ_w . Будем исходить из общепринятого в настоящее время «логарифмического» метода Прандтля-Кармана. Принимаем, что напряжение трения в турбулентном слое выражается прандтлевской формулой «пути смешения»

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (3.1)$$

Иными словами, в правых частях формул (1.1) и (1.3) полагаем

$$\varepsilon = \rho l^2 \frac{du}{dy} \quad (\mu = 0)$$

Допускаем существование вблизи стенки ламинарного подслоя, толщина которого определяется критическим числом Рейнольдса

$$\frac{u_l \delta_{yl} \rho_w}{\mu_w} = \alpha^2 \quad (\alpha = 11.5) \quad (3.2)$$

В совокупности с предположением о линейности профиля скоростей в ламинарном подслое

$$\tau_w = \mu_w \frac{u_l}{\delta_{yl}} \quad (3.3)$$

условие (3.2) дает

$$\frac{\sqrt{\tau_w \rho_w} \delta_{yl}}{\mu_w} = \alpha \quad (3.4)$$

где δ_{yl} — значение толщины ламинарного подслоя в обычном смысле; т. е. по переменной y .

Преобразуем последнюю формулу к переменной η :

$$\delta_{yl} = \int_0^{\delta_{yl}} dy = \int_0^{\eta_l} \frac{1 - \bar{u}^2 + (T_w/T_{00} - 1)(1 - \bar{u}/\bar{U})}{(1 - \bar{U}^2)^{x-1}} d\eta \approx \frac{T_w}{T_{00}} (1 - \bar{U}^2)^{1-x} \delta_l$$

$$\rho_w = \rho_{00} \frac{(1 - \bar{U}^2)^{x-1}}{T_w/T_{00}}, \quad \mu_w = \mu_{00} \left(\frac{T_w}{T_{00}} \right)^n$$

Подставляя эти выражения в (3.4), получаем

$$\frac{\delta_l}{\delta} = \frac{\alpha \zeta}{R_3} \left(\frac{T_w}{T_{00}} \right)^n \quad (3.5)$$

где введены обозначения

$$R_{\delta} = \bar{U} \delta R_{00}, \quad \zeta = \frac{U}{\sqrt{\tau_w / \rho_{00}}} \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{2(x-1)}}}{(T_w / T_{00})^{1/2}}$$

Преобразуем формулу (3.1) к виду

$$\tau = \rho_{00} \bar{l}^2 \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 \quad (3.6)$$

где

$$\bar{l}^2 = \frac{l^2 (1 - \bar{U}^2)^{\frac{3x}{x-1}}}{[1 - \bar{u}^2 + (T_w / T_{00} - 1) (1 - \bar{u} / \bar{U})]^3}$$

Иследуем поведение функции \bar{l} вблизи стенки. Здесь \bar{u}^2 и \bar{u} / \bar{U} малы, $l = ky$ ($k = 0.3914$)

$$y \approx \left[1 - \bar{u}^2 + \left(\frac{T_w}{T_{00}} - 1 \right) \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{U}} \right) \right] (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{1-x}} \eta \approx \frac{T_w}{T_{00}} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{1-x}} \eta$$

поэтому

$$\bar{l} = k\eta \frac{(1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{2(x-1)}}}{(T_w / T_{00})^{1/2}} \quad (3.7)$$

Таким образом, при близких к стенке значениях η имеет место линейное распределение пути смещения \bar{l} по формуле (3.7), а трение мало отличается от трения на стенке τ_w . В соответствии с основной идеей логарифмического метода примем постоянное напряжение трения $\tau = \tau_w$ и линейный закон (3.7) для всей толщины турбулентного слоя, полагая, что, как и в случае несжимаемой жидкости, будет иметь место взаимная компенсация ошибок, допускаемых в распределении τ и \bar{l} . Итак,

$$\tau_w = \rho_{00} k^2 \eta^2 \frac{1}{T_w / T_{00}} (1 - \bar{U}^2)^{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 \quad (3.8)$$

Интегрируя это уравнение в пределах от η до δ , значения η , соответствующего границе слоя, получаем профиль скоростей

$$\frac{\bar{u}}{\bar{U}} = 1 + \frac{1}{k\zeta} \ln \frac{\eta}{\delta} \quad (3.9)$$

Из (3.3) получаем скорость на границе ламинарного подслоя

$$\frac{\bar{u}_\eta}{\bar{U}} = \frac{\alpha}{\zeta} \quad (3.10)$$

Условие равенства скоростей (3.9) и (3.10) на границе ламинарного подслоя приводит к закону сопротивления

$$1 + \frac{1}{k\zeta} \ln \frac{\delta_\eta}{\delta} = \frac{\alpha}{\zeta} \quad (3.11)$$

Для исключения вспомогательной переменной δ используем профиль скоростей (3.9) в формуле (1.15). Получаем

$$\frac{\delta_\eta}{\delta} = \frac{1}{k\zeta} \left(1 - \frac{2}{k\zeta} \right) \quad (3.12)$$

Формулы (3.5) и (3.12) позволяют представить закон сопротивления окончательно в следующем виде

$$R_3 = \frac{\alpha}{k} e^{-k\alpha} \left(\frac{T_w}{T_{00}} \right)^n e^{k\zeta} \left(1 - \frac{2}{k\zeta} \right) \quad \left(\frac{\alpha}{k} e^{-k\alpha} = 0.326 \right) \quad (3.13)$$

С помощью (3.13) уравнение (1.16) можно представить в виде

$$\left(\frac{T_w}{T_{00}} \right)^{-n-1} R (1 - \bar{U}^2)^{n+1} d\bar{x} = \frac{1}{q} e^{k\zeta} k^2 \zeta^2 \left(1 - \frac{2}{k\zeta} + \frac{2}{k^2 \zeta^2} \right) k d\zeta$$

$$\left(\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{k^3} e^{-k\alpha} = 2.126 \right) \quad (3.14)$$

Интегрируя и выражая попутно \bar{U} через число Маха по (1.19), получаем

$$\left(\frac{T_w}{T_{00}} \right)^{-n-1} \left(1 + \frac{1}{2} (\kappa - 1) M^2 \right)^{-n-1} R \bar{x} = \frac{1}{q} e^{k\zeta} (k^2 \zeta^2 - 4k\zeta + 6) + \text{const} \quad (3.15)$$

По этой формуле находится распределение величины ζ по длине пластины. Если на некоторой части пластины имеется ламинарный пограничный слой, значение постоянной в (3.15) находится из условия $R_{\text{turbulent}} = R_{\text{laminar}}$ в точке перехода.

При полностью турбулентном пограничном слое постоянную следует положить равной нулю. Учитывая (2.14), представим формулу (3.15) в виде

$$\left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{-n-1} R \bar{x} = \frac{1}{q} e^{k\zeta} (k^2 \zeta^2 - 4k\zeta + 6) \quad (3.16)$$

Зная распределение ζ , находим распределение коэффициента сопротивления

$$c_f = \frac{2}{\zeta^2} \frac{1 - \bar{U}^2}{T_w / T_{00}} \quad \text{или} \quad c_f = \frac{2}{\zeta^2 T_w / T_0} \quad (3.17)$$

Уравнение (3.16) при $\bar{x} = 1$ определяет ζ_1 — значение ζ на конце пластины. Зная ζ_1 по формулам (3.13) и (1.18), получаем

$$C_f = \frac{2k^2}{q} \left(\frac{T_w}{T_{00}} \right)^n e^{k\zeta_1} \left(1 - \frac{2}{k\zeta_1} \right) \frac{(1 + 1/2 (\kappa - 1) M^2)^n}{R}$$

или окончательно

$$C_f = \frac{2k^2}{q} e^{k\zeta_1} \left(1 - \frac{2}{k\zeta_1} \right) \frac{(T_w / T_0)^n}{R} \quad (3.18)$$

Рассматривая полученные формулы (3.16) — (3.18), обнаруживаем весьма интересный факт, — в случае турбулентного слоя как местный, так и полный коэффициент сопротивления пластины при данном числе Рейнольдса не зависит от числа Маха, а зависит только от отношения абсолютных температур стенки и набегающего потока.

В частности, оказывается безразлично, достигнуто ли данное отношение температур за счет больших чисел Маха (при отсутствии теплопередачи или за счет подогрева стенки при малых значениях числа Маха или, наконец, действуют оба фактора одновременно — сопротивление пластины во всех этих случаях при одинаковом T_w / T_0 будет одинаковым. Так же как в случае

ламинарного слоя, сопротивление пластины меньше, чем при отсутствии теплообмена, если пластина отдает тепло газу, и больше, чем при отсутствии теплообмена, если пластина воспринимает тепло от газа.

Заметим еще одно следствие установленного факта: с увеличением числа Маха при отсутствии теплообмена коэффициент сопротивления пластины падает, а стенка нагревается; если путем отвода части тепла, выделяющегося при диссипации, поддерживать температуру стенки постоянной, сопротивление будет также оставаться постоянным; при этом доля тепла, подлежащая отводу, не зависит от числа Маха, а зависит только от значений числа Рейнольдса (и составляет, например, 0.545 при значении $R = 10 \times 10^5$).

Формулы для c_f и C_f можно с известным приближением представить в форме, аналогичной принятой для несжимаемой жидкости без теплопередачи.

Так как значения $k\zeta$ велики при больших значениях R , то, отбрасывая младшие степени $k\zeta$ по сравнению с $k^2\zeta^2$, имеем

$$R\bar{x} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{-n-1} \approx \frac{1}{q} e^{k\zeta} k^2 \zeta^2$$

или

$$\frac{0.241}{\sqrt{c_f} \sqrt{T_w/T_0}} = \lg(R\bar{x}c_f) - n \lg \frac{T_w}{T_0} + \text{const}$$

Выбирая постоянную путем сопоставления полученной формулы при $T_w/T_0 = 1$ с формулой Кармана-Кемпфа, имеем

$$\frac{0.241}{\sqrt{c_f} \sqrt{T_w/T_0}} = \lg(R\bar{x}c_f) - n \lg \frac{T_w}{T_0} + 0.41 \quad (3.19)$$

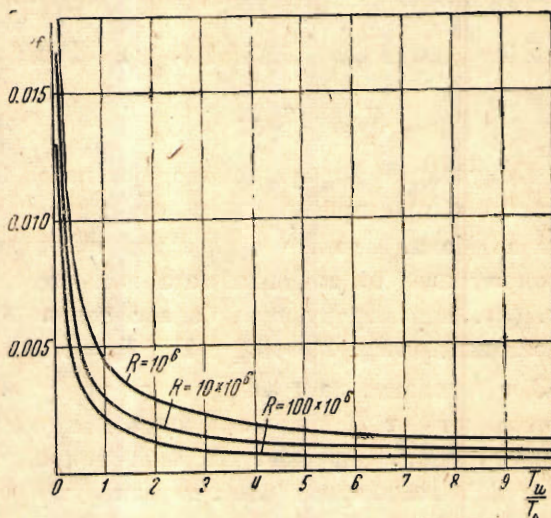
Отбрасывая в формуле (3.18) член $2/k\zeta$ по сравнению с 1 и выбирая постоянные из условия совпадения при $T_w/T_0 = 1$ с формулой Кармана-Шенхера, получаем

$$\frac{0.242}{\sqrt{C_f} \sqrt{T_w/T_0}} = \lg(RC_f) - n \lg \frac{T_w}{T_0} \quad (3.20)$$

При отсутствии теплопередачи ($T_w/T_0 = 1$) формула (3.20) совпадает с формулой Кармана [6]

$$\frac{0.242}{\sqrt{C_f} (1 + 1/2 (\alpha - 1) M^2)^{1/2}} = \lg(RC_f) - n \lg \left(1 + \frac{1}{2} (\alpha - 1) M^2 \right)$$

На фиг. 4 представлены кривые C_f в функции от T_w/T_0 для трех чисел Рейнольдса. В отличие от случая ламинарного слоя наблюдаем весьма сильную зависимость сопротивления от отношения температур.



Фиг. 4.

Зная профиль скорости (3.9), а следовательно, и профиль температур (1.8), находим диссипацию, теплоотдачу и изменение теплосодержания газа:

$$N_{\Phi} = 2 \frac{k^2}{q} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^n e^{k\zeta_1} \left(1 - \frac{3}{k\zeta_1} + \frac{3}{k^2\zeta_1^2} \right) \frac{1}{2} (\alpha - 1) M^2 \quad (3.21)$$

$$N_Q = \frac{1}{2} RC_f \left(1 + \frac{1}{2} (\alpha - 1) M^2 - \frac{T_w}{T_0} \right) \quad (3.22)$$

$$N_{Q_1} = N_{\Phi} - N_Q \quad (3.23)$$

Полученные формулы позволяют найти баланс тепла в турбулентном слое пластины при произвольном отношении температур и при произвольных числах Маха, а также определить предельные числа Маха, соответствующие прекращению охлаждения газа или стенки вследствие диссипации. Кривые Φ_1 , Q_{11} , иллюстрирующие баланс тепла в турбулентном пограничном слое пластины при $T_w/T_0 = 0.2$ и $T_w/T_0 = 5$ при $R = 10 \times 10^6$, приведены на фиг. 2 и 3, где деление на \sqrt{R} в случае турбулентного слоя, конечно, не устраняет зависимость от R и сделано лишь для удобства сравнения с кривыми ламинарного слоя. Обращает на себя внимание значительно более интенсивный, нежели в ламинарном слое, характер тепловых процессов, особенно в случае $T_w/T_0 < 1$, когда оба фактора — турбулентность и подогрев газа — действуют в одном направлении, а именно, усиливают перемешивание.

Поступила в редакцию
20 XII 1944

L. E. KALIKHMAN. — RESISTANCE AND HEAT TRANSFER OF A PLATE IN A FLOW OF GAS WITH HIGH VELOCITY

The paper is concerned with the problem of the laminar and turbulent boundary layers of gas flow around a plane plate with heat exchange.

The author derives the formulae for the resistance and heat transfer, distributions of velocities and temperatures, dissipation and heat content of the gas.

The author also finds the limit numbers of Mach, beyond which the plate will lose its cooling action on the heated gas, or the gas will lose its cooling action upon the heated plate.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crocco L. Sulla trasmissione del calore da una lamina piana un fluido scorrente ad alta velocità. L'Aerotecnica. 1932. Vol. 42 [Fasc. 181—197].
2. Busemann A. Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte. ZAMM. 1935. V. 15. [S. 23].
3. Karman T. a. Tsien H. Boundary Layer in Compressible Fluids. J. Aeronautica S. 1938. Vol. 5. N 6 [P. 227—232].
4. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. Вып. 6.
5. Франкль Ф. И., Христианович С. А., Алексеева Р. Н. Основы газовой динамики. Труды ЦАГИ. 1938. Вып. 364.
6. Karman T. The Problem of Resistance in Compressible Fluids. V Convegno della Fondazione Volta, Reale Accademia d'Italia, Roma.