Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

О ПОГРУЖЕНИИ ДИСКА В ВЯЗКО-СЖИМАЕМУЮ СРЕДУ

Н. А. Слезкин

(Москва)

§ 1. Вязко-сжимаемая среда. Вязкая жидкость, как известно, обладает той особенностью, что напряженное состояние в какой-либо точке внутри нее находится в прямой зависимости не от состояния в этой точке самих деформаций, а от состояния скоростей изменения этих деформаций во времени. Если обозначить через u, v, w проекции абсолютной скорости частицы вязкой среды на неподвижные оси x, y, z, а через X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x обозначить компоненты тензора напряжения в том месте, где находится рассматриваемая частица, то на основании обобщенного закона Гука будем иметь соотношения

$$X_x = -p + \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \begin{pmatrix} x\,y\,z \\ u\,v\,w \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

где p есть давление, а λ и μ суть характеристические постоянные данной вязкой среды[1]. Величина же Θ представляет собой скорость кубического расширения, определяемую равенством

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.2}$$

Чтобы давление p, входящее в формулы (1.1), не зависело от направления трех взаимно перпендикулярных площадок в данной точке, приходится принимать гипотезу Стокса, согласно которой постоянная λ связывается с коэффициентом μ абсолютной вязкости зависимостью

$$3\lambda + 2\mu = 0 \tag{1.3}$$

Мы будем далее рассматривать тот случай, когда среда является вязкой и сжимаемой, т. е. будем предполагать скорость кубического расширения Θ отличной от нуля.

Если исключить из рассмотрения газы, подчиняющиеся адиабатическому закону, то для многих сред, в том числе и упруго-твердых, можно считать

---

[1] Здесь и в дальнейшем стоящие рядом с равенствами в скобках буквы указывают, что для получения остальных соотношений нужно совершать циклическую перестановку во всем, что обозначено через x, y, z, одновременно заменяя циклически u, v, w.

изменение давления p прямо пропорциональным относительному изменению плотности ρ, т. е.

$$\Delta p = k\frac{\Delta\rho}{\rho} \tag{1.4}$$

где k называется модулем объемного сжатия или расширения.

Для того чтобы зависимость (1.4) представить через скорость кубического расширения Θ, рассмотрим закон сохранения масс. Пусть объем некоторого количества частиц до деформации был τ_0, а после деформации стал равным τ. В начальном объеме плотность была ρ_0, а в конечном стала равной ρ. Тогда по закону сохранения масс мы должны иметь

$$\rho\tau = \rho_0\tau_0 \tag{1.5}$$

Величина Θ представляет собой изменение единицы объема в единицу времени. Стало быть, чтобы получить из начального объема τ_0 величину конечного объема τ, надо помножить τ_0 на $\Theta\,dt$, проинтегрировать по времени от нуля до некоторого значения t и результат прибавить к начальному значению τ_0, т. е.

$$\tau = \tau_0 + \tau_0\int_0^t \Theta\,dt \tag{1.6}$$

Подставляя значение τ из (1.6) в (1.5), получим выражение для относительного изменения плотности

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho} = -\int_0^t \Theta\,dt \tag{1.7}$$

Полагая затем $\Delta\rho = \rho - \rho_0$, $\Delta p = p - p_0$ и учитывая равенство (1.7), получим зависимость давления p в произвольный момент t от скорости кубического расширения Θ

$$p = p_0 - k\int_0^t \Theta\,dt \tag{1.8}$$

где p есть давление, существующее в среде до начала сжатия.

Будем называть среду вязко-сжимаемой, если для нее выполняются соотношения (1.1) и (1.8). Таким образом, для вязко-сжимаемой среды компоненты тензора напряжения связаны с составляющими скоростей частиц следующими интегро-дифференциальными зависимостями

$$X_x = -p_0 + k\int_0^t \Theta\,dt + \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \begin{pmatrix} x\,y\,z \\ u\,v\,w \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Анализируя правые части для нормальных напряжений, видим, что вязко-сжимаемая среда обладает в некоторой мере свойством упрочнения по отношению к объемным деформациям и свойствами текучести по отношению к деформациям формы. Это обстоятельство позволяет думать, что соотношения (1.9) могут быть использованы не только для жидких сред и газов при их малых сжатиях, но и для тех случаев твердых сред, когда пластические деформации формы переплетаются преимущественно с объемными упругими деформациями сжатия.

§ 2. Функциональное преобразование уравнений вязко-сжимаемой среды. Уравнения движения всякой сплошной среды, как известно, представляются в виде

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\rho X+\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\qquad\begin{pmatrix}x\,y\,z\\u\,v\,w\end{pmatrix}\qquad(2.1)$$

где ρ есть плотность среды в данный момент времени в рассматриваемой точке с координатами x, y, z, а X, Y, Z суть составляющие внешней силы, отнесенной к единице массы рассматриваемой среды.

Будем пренебрегать квадратичными членами инерции в уравнениях (2.1) и считать плотность ρ равной своему начальному значению ρ_0. Тогда уравнения медленных движений вязко-сжимаемой среды можно представить в виде

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}=\rho_0 X+\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\qquad\begin{pmatrix}x\,y\,z\\u\,v\,w\end{pmatrix}\qquad(2.2)$$

Подвергнем теперь соотношения (1.2) и уравнения (2.2) функциональному преобразованию Лапласа. Помножим обе части равенства на $e^{-pt}\,dt$, где p есть комплексный параметр преобразования, и проинтегрируем от нуля до бесконечности.

Будем обозначать преобразования Лапласа от величин u, v, w и других теми же буквами со звездочками, т. е. будем пользоваться обозначениями

$$\int_0^\infty e^{-pt}u\,dt=\frac{u^*}{p},\qquad\int_0^\infty e^{-pt}\Theta\,dt=\frac{\Theta^*}{p},\qquad\int_0^\infty e^{-pt}X_x\,dt=\frac{X_x^*}{p}\qquad\begin{pmatrix}x\,y\,z\\u\,v\,w\end{pmatrix}\qquad(2.3)$$

Так как при этом будем иметь, что

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^t\Theta\,dt\right)dt=\left[\left(\int_0^t\Theta\,dt\right)\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^\infty+\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}\,\Theta\,dt=\frac{\Theta^*}{p^2}$$

в предположении, что интеграл в круглых скобках при стремлении t к бесконечности остается конечным, то соотношения, представляющие обобщенный закон Гука для вязко-сжимаемой среды, примут вид

$$X_x^*=-p_0+\left(\lambda+\frac{k}{p}\right)\Theta^*+2\mu\frac{\partial u^*}{\partial x},\qquad X_y^*=Y_x^*=\mu\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial v^*}{\partial x}\right)\qquad\begin{pmatrix}x\,y\,z\\u\,v\,w\end{pmatrix}\qquad(2.4)$$

Обратим внимание на то, что если считать начальное давление p_0 равным нулю, то соотношения (2.4) совпадают с формальной стороны с известными соотношениями обобщенного закона Гука в теории упругости с той лишь разницей, что здесь u^*, v^*, w^* означают не компоненты перемещения, а преобразования Лапласа от соответствующих компонент скоростей перемещений. Кроме того, коэффициент λ заменен через сумму $\lambda+k/p$.

Обозначим значения скоростей перемещений для момента $t=0$ через u_0, v_0, w_0; тогда будем иметь

$$\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt=ue^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}u\,dt=-u_0+u^*\qquad(u\,v\,w)$$

Стало быть, после применения преобразования Лапласа к уравнениям (2.2) получим равенства

$$\rho_0 p(u^* - u_0) = \rho_0 X^* + \frac{\partial X_x^*}{\partial x} + \frac{\partial X_y^*}{\partial y} + \frac{\partial X_z^*}{\partial z} \qquad \begin{pmatrix} x\,y\,z \\ u\,v\,w \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Подставляя, наконец, в полученные равенства (2.5) результаты преобразований Лапласа от компонент напряжения (2.4), получим дифференциальные уравнения для функциональных преобразований составляющих скоростей перемещений

$$\rho_0 p(u^* - u_0) = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \left(\lambda + \mu + \frac{k}{p}\right)\frac{\partial \Theta^*}{\partial x} + \mu \Delta u^* + \rho_0 X^* \qquad \begin{pmatrix} x\,y\,z \\ u\,v\,w \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

где Δ есть оператор Лапласа.

Заметим, что если бы мы пренебрегли в уравнениях (2.2) локальными производными по времени от скоростей и считали давление p_0 величиной постоянной, то левые части уравнений (2.6) и первые слагаемые в правых частях их обращались бы в нуль. Тогда уравнения (2.6) с формальной стороны совпадали бы с известными уравнениями теории упругости в перемещениях при замене коэффициента λ через $\lambda + k/p$.

Совпадение соотношений обобщенного закона Гука и дифференциальных уравнений позволяет строить решения некоторых задач для вязко-сжимаемой среды на основании решений соответственных задач математической теории упругости.

Возможность такого метода решений покажем на частной задаче.

§ 3. Погружение диска в вязко-сжимаемую среду. Представим себе, что вязко-сжимаемая среда занимает все полупространство ниже горизонтальной плоскости xOy. До момента $t = 0$ среда находилась в покое. С момента $t = 0$ в эту среду начинает погружаться своим основанием диск с некоторой постоянной скоростью V. Предполагая, что эта скорость не велика, требуется определить сопротивление погружению диска.

Будем искать решение данной задачи для тех моментов времени, которые очень близки к моменту начала погружения диска.

Начало осей координат возьмем в центре основания диска в момент соприкасания его со свободной поверхностью вязко-сжимаемой среды и ось z направим во внутрь среды. Радиус диска обозначим через a.

Будем пренебрегать локальными изменениями скоростей и давлением p_0.

Тогда дифференциальное уравнение (2.6) при отсутствии внешних сил представляется в виде

$$\Delta u^* + \frac{\lambda + \mu + k/p}{\mu}\frac{\partial \Theta^*}{\partial x} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x\,y\,z \\ u\,v\,w \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Далее предположим, что силой трения между плоскостью основания и средой можно будет пренебречь.

В таком случае касательные напряжения X_z и Z_x должны будут обращаться в нуль на всей границе среды при $z = 0$, т. е.

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial v^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial y} = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0 \tag{3.2}$$

Вне площади, закрываемой основанием диска, нормальное напряжение Z_z должно обращаться в нуль, т. е.

$$Z_z = k\int_0^t \Theta\,dt + \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{при} \quad z=0, \quad r>a$$

Подвергая и это условие преобразованию Лапласа, получим

$$Z_z^* = \left(\lambda + \frac{k}{p}\right)\Theta^* + 2\mu\frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \qquad \text{при} \quad z=0 \quad r>a \tag{3.3}$$

Внутри же круга радиуса a частицы среды должны иметь скорость по нормали, в точности равную скорости погружения диска V, т. е. $w=V$ при $z=0$ и $r<a$.

Считая эту скорость погружения постоянной и применяя преобразование Лапласа, получим

$$w^* = V \qquad \text{при} \quad z=0 \text{ и } r<a \tag{3.4}$$

Кроме того, на бесконечности составляющие скорости смещения и их производные по координатам должны обращаться в нуль.

Таким образом поставленная задача сводится к предварительному решению системы дифференциальных уравнений (3.1) при удовлетворении условиям (3.2), (3.3) и (3.4) и условию на бесконечности. С математической стороны эта предварительная задача совпадает с задачей вдавливания жесткого цилиндра основанием его в упругую среду (см., например, Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, стр. 290—295). Для некоторой полноты мы здесь воспроизведем кратко решение этой известной задачи.

Будем искать решения для составляющих скоростей u, v, w в виде

$$u^* = \varphi_1 + z\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad v^* = \varphi_2 + z\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad w_3 = \varphi^* + z\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{3.5}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 и ψ суть функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа.

Подставляя эти выражения u^*, v^*, w^* в дифференциальные уравнения (3.1), получим, что частные производные по x, y и z от выражения

$$2\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\lambda+\mu+k/p}{\mu}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

равны нулю, т. е. это выражение не должно зависеть от x, y, z, а следовательно, равно постоянной величине. Но так как на бесконечности каждое из слагаемых должно обращаться в нуль, то эта постоянная должна быть приравнена нулю. Таким образом получаем зависимость между между введенными функциями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и ψ

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{\lambda+\mu+k/p}{\lambda+3\mu+k/p}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right) \tag{3.6}$$

Обратимся теперь к граничным условиям (3.2). Подставляя в эти условия выражения (3.5) для u^*, v^*, w^*, получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y}=0 \qquad \text{при} \quad z=0 \tag{3.7}$$

Так как левые части этих равенств суть функции, гармонические во всей области ниже горизонтальной плоскости, то они, будучи на границе $z=0$ и $z=\infty$ равными нулю, должны обращаться в нуль и во всей области.

Дифференцируя левые части по x и y соответственно и складывая, получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2(\varphi_3+\psi)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\varphi_3+\psi)}{\partial y^2}=0$$

или, так как $\Delta\varphi=0$ и $\Delta\psi=0$,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}-\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}-\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)=0$$

Интегрируя это равенство и учитывая условие обращения в нуль на бесконечности каждого слагаемого в левой части, получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}-\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}-\frac{\partial \psi}{\partial z}=0 \tag{3.8}$$

Подставляя в правую часть уравнения (3.6) выражение суммы $\partial\varphi_1/\partial x+$ $+\partial\varphi_2/\partial y$ из (3.8), получим уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}=-\frac{\lambda+\mu+k/p}{\lambda+3\mu+k/p}\left(2\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$$

откуда после интегрирования будем иметь

$$\psi=-\frac{\lambda+\mu+k/p}{\lambda+2\mu+k/p}\varphi_3 \tag{3.9}$$

Учитывая равенства (3.8) и (3.9) для величины Θ^*, получим

$$\Theta^*=2\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu+k/p}\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \tag{3.10}$$

Найдем теперь выражение для преобразования нормального напряжения Z_z^*, определенного согласно (2.4) равенством

$$Z_z^*=\left(\lambda+\frac{k}{p}\right)\Theta^*+2\mu\frac{\partial w^*}{\partial z}$$

Подставляя сюда выражение Θ^* из (3.10) и выражение w^* из (3.5), получим

$$Z_z^*=\frac{2\mu(\lambda+\mu+k/p)}{\lambda+2\mu+k/p}\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}+2\mu z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

На границе $z=0$ преобразование нормального напряжения определяется формулой

$$(Z_z^*)_{z=0}=2\mu\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\frac{\lambda+\mu+k/p}{\lambda+2\mu+k/p} \tag{3.11}$$

а на этой же границе преобразование от скорости w из (3.5) будет равно

$$(w^*)_{z=0}=\varphi_3 \tag{3.12}$$

Условия (3.3) и (3.4) сводятся, таким образом, к условиям для гармонической функции φ_3, а именно к условиям

$$\varphi_3 = V \quad \text{при} \quad z=0 \text{ и } r<a, \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z=0 \text{ и } r>a \tag{3.13}$$

Эту неизвестную функцию φ_3 представляем в следующем виде:

$$\varphi_3 = \int_0^\infty f(\alpha) J_0(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha \tag{3.14}$$

где $f(\alpha)$ есть некоторая подлежащая определению функция от параметра α а J_0 есть функция Бесселя нулевого порядка от аргумента αr.

Используя условия (3.13), получим уравнения для определения $f(\alpha)$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty f(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = V && \text{при} \quad r<a \\ &\int_0^\infty \alpha f(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = 0 && \text{при} \quad r>a \end{aligned} \tag{3.15}$$

Эти равенства будут выполняться, если положить

$$f(\alpha) = \frac{2V}{\pi} \frac{\sin a\alpha}{\alpha}, \tag{3.16}$$

так как из интегральных формул для бесселевых функций известно, что (Кузьмин, Бесселевы функции, стр. 144)

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J_0(\alpha r) d\alpha = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad r<a \\ \arcsin \dfrac{a}{r} & \text{при} \quad r \geqslant a \end{cases} \\ &\int_0^\infty \sin a\alpha \, J_0(\alpha r) d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r>a \\ \dfrac{1}{\sqrt{a^2-{}^2r}} & \text{при} \quad r<a \end{cases} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Таким образом неизвестная гармоническая функция φ_3 будет

$$\varphi_3 = \frac{2V}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin a\alpha}{\alpha} J_0(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha \tag{3.18}$$

Подставляя это значение φ_3 в формулу (3.11) для нормального напряжения Z_z^* на свободной границе среды и учитывая равенства (3.17), получим

$$Z_z^* = -\frac{4\mu V}{\pi} \frac{\lambda+\mu+k/p}{\lambda+2\mu+k/p} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} \qquad \text{при} \quad r<a, \quad z=0 \tag{3.19}$$

или

$$Z_z^* = -\frac{4\mu V}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} \left[\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} + \frac{k\mu}{(\lambda+2\mu)^2} \frac{1}{p+\dfrac{k}{\lambda+2\mu}} \right] \tag{3.20}$$

Если теперь обратиться к выражению для Z_z^* согласно (2.3) и взять от обеих частей этого выражения интеграл Меллина, то получим

$$Z_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} Z_z^* \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{4\mu V}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} \times \int_{\sigma i-\infty}^{\sigma i+\infty} e^{pt} \left[\frac{1}{p} - \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \frac{1}{p+\dfrac{k}{\lambda+2\mu}} \right] dp$$

Вычисляя интеграл Меллина от правой части, получим выражение для нормального напряжения под поверхностью диска

$$Z_z = -\frac{4\mu V}{\pi(\lambda+2\mu)} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} \left[\lambda+2\mu-\mu \exp\frac{-kt}{\lambda+2\mu}\right] \tag{3.21}$$

Полное сопротивление погружению диска в вязко-сжимаемую среду получим, если помножим левую и правую части на $2\pi r dr$ и проинтегрируем от нуля до a. Получим

$$P = -\frac{8\mu V a}{\lambda+2\mu} \left[\lambda+2\mu-\mu \exp\frac{-kt}{\lambda+2\mu}\right] \tag{3.22}$$

Таким образом, сопротивление погружению диска в вязко-сжимаемую среду пропорционально первой степени скорости и зависит к тому же от времени. С течением времени сопротивление погружению диска увеличивается.

Если мы в правую часть выражения (3.22) подставим $\lambda = -2\mu/3$ согласно (1.3), то получим окончательное выражение для силы сопротивления погружению диска в вязко-сжимаемую среду

$$P = -2\mu a V \left(4-3 \exp\frac{-3kt}{4\mu}\right) \tag{3.23}$$

Эта формула показывает, что сопротивление погружению диска в вязко-сжимаемую среду стремится к предельному значению, превышающему значение начального сопротивления в четыре раза.

§ 4. Удар диска о поверхность вязко-сжимаемой среды. Приближенно можно считать, что формула (3.22) для сопротивления погружению диска в вязко-сжимаемую среду может быть пригодной и тогда, когда скорость погружения V и не будет величиной постоянной. В таком случае представляется возможность рассматривать погружение диска либо под действием постоянной силы, либо при ударе.

Допустим, что тонкий диск с малым весом ударяется о свободную поверхность вязко-сжимаемой среды, имея перед ударом скорость V_0. Пусть масса диска равна Q/g.

Беря для силы сопротивления выражение (3.22) и пренебрегая весом диска по сравнению с силой сопротивления, получим следующее дифференциальное уравнение погружения диска в среду после удара:

$$\frac{Q}{g}\frac{dV}{dt} = -\frac{8\mu a V}{\lambda+2\mu} \left[\lambda+2\mu-\mu \exp\frac{-kt}{\lambda+2\mu}\right] \tag{4.1}$$

Если разделить переменные, проинтегрировать и учесть начальное условие, что $V = V_0$ при $t = 0$, то будем иметь

$$\ln\frac{V}{V_0} = -\frac{8\mu a g}{Q}\left[t+\frac{\mu}{k}\left(\exp\frac{-kt}{\lambda+2\mu}-1\right)\right] = -f(t) \tag{4.2}$$

Таким образом, скорость погружения диска после удара представится в виде

$$V = V_0 e^{-f(t)} \tag{4.3}$$

и, следовательно, обращается в нуль лишь через бесконечно долгое время.

Глубина погружения диска, определяемая формулой

$$H = V_0 \int_0^t e^{-f(t)}\, dt \tag{4.4}$$

будет представлять конечную величину, не превосходящую значения следующего интеграла

$$V_0 \int_0^\infty e^{A-Bt}\, dt = \frac{V_0 e^A}{B} \tag{4.5}$$

где постоянные A и B имеют значения

$$A = \frac{8\mu^2 ag}{kQ}, \qquad B = \frac{8\mu ag}{Q} \tag{4.6}$$

Для $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ эта глубина погружения H будет удовлетворять неравенству

$$H < \frac{QV_0}{8\mu ag} \exp \frac{8\mu^2 ag}{kQ} \tag{4.7}$$

Эта формула показывает, что при всех прочих одинаковых условиях глубина погружения диска после удара будет тем меньше, чем больше будет коэффициент сжимаемости k среды.

§ 5. Действие силы, сосредоточенной в точке на свободной плоской границе вязко-сжимаемой среды. Легко проверить, что те решения, которые мы получили в § 3 для преобразований Лапласа от скоростей смещений и напряжений, могли быть получены и без каких-либо выкладок непосредственно из соответственных решений для упругой среды. В частности, например, формула (3.19) для преобразования нормального напряжения могла быть получена из соответственной формулы для нормального напряжения в решении задачи о вдавливании цилиндра в упругое полупространство (Франк, Мизес, стр. 294) с помощью одной только замены коэффициента λ через сумму $\lambda + k/p$.

Это обстоятельство позволяет без особого труда устанавливать решения ряда задач для вязко-сжимаемой среды в предположении, что локальными изменениями скоростей можно пренебрегать на основании лишь одних решений соответственных задач для упругой среды.

В частности, рассмотрим следующую задачу.

Допустим, что вязко-сжимаемая среда занимает все полупространство. Плоская граница этой среды совершенно свободна от напряжений, за исключением окрестности одной точки, где приложена сосредоточенная сила P. Граничную плоскость принимаем за плоскость $z = 0$; положительное направление оси z обращаем во внутрь среды.

Выражения для преобразований Лапласа от скоростей частиц вязко-сжимаемой среды для нашей задачи будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
u^* &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{xz}{r^3} - \frac{P}{4\pi(\lambda+\mu+k/p)}\frac{x}{r(r+z)} \\
v^* &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{yz}{r^3} - \frac{P}{4\pi(\lambda+\mu+k/p)}\frac{y}{r(r+z)} \qquad (5.1)\\
w^* &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{z^2}{r^3} + \frac{P(\lambda+2\mu+k/p)}{4\pi\mu(\lambda+\mu+k/p)}\frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

Эти выражения получены путем замены величины λ на $\lambda + k/p$ в известных формулах для проекций смещений u_x, u_y, u_z в случае аналогичной задачи для упругой среды (Ляв, Математическая теория упругости, стр. 201—202); в них r — расстояние рассматриваемой точки от точки приложения силы.

Вычисляя производные от u^*, v^*, w^* по x, y, z соответственно и складывая, получим выражение для Θ^* преобразования Лапласа от скорости кубического расширения

$$\Theta^* = \frac{P}{2\pi(\lambda+\mu+k/p)}\frac{z}{r^3} \qquad (5.2)$$

Если мы теперь подставим выражения (5.1) для u^*, v^*, w^* и Θ^* по (5.2) в формулы (2.4) для преобразований Лапласа от компонент напряжения, то получим следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
X_x^* &= -\frac{P}{2\pi}\frac{\lambda+k/p}{\lambda+\mu+k/p}\frac{z}{r^3} + \frac{P}{2\pi}\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right)\frac{z}{r^3} - \\
&\qquad - \frac{P}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu+k/p}\frac{1}{r(r+z)}\left[1-\frac{x^2(2r+z)}{r^2(r+z)}\right] \\
Y_y^* &= -\frac{P}{2\pi}\frac{\lambda+k/p}{\lambda+\mu+k/p}\frac{z}{r^3} + \frac{P}{2\pi}\left(1-\frac{3y^2}{r^2}\right)\frac{z}{r^3} - \qquad (5.3)\\
&\qquad - \frac{P}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu+k/p}\frac{1}{r(r+z)}\left[1-\frac{y^2(2r+z)}{r^2(r+z)}\right] \\
Z_z^* &= -\frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{r^5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_y^* = Y_x^* &= -\frac{P}{2\pi}\frac{3yzx}{r^5} + \frac{P}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu+k/p}\frac{xy(2r+z)}{r^3(r+z)^2} \\
Y_z^* = Z_y^* &= -\frac{P}{2\pi}\frac{3yz^2}{r^5}, \qquad (5.4)\\
Z_x^* = X_z^* &= -\frac{P}{2\pi}\frac{3xz^2}{r^5}
\end{aligned}
$$

Эти равенства показывают, что для границы $z=0$ компоненты напряжения Z_x^*, Z_y^*, Z_z^* всюду обращаются в нуль, за исключением начала координат, т. е. той точки, где приложена сосредоточенная сила. Чтобы найти величину этой силы, выделим полусферу с центром в начале координат малого радиуса r и подсчитаем проекцию на ось z равнодействующей силы всех напряжений, распределенных по этой полусфере.

Как известно, проекция на ось z напряжения, развивающегося на площадке с нормалью, имеющей направляющие косинусы l, m, n, представляется в виде

$$Z_n = Z_x l + Z_y m + Z_z n \tag{5.5}$$

В нашем случае площадка представляет собой элемент поверхности среды радиуса r с центром в начале координат; поэтому направляющие косинусы будут соответственно равны $l = x/r$, $m = y/r$, $z = z/r$. Подставляя значения преобразований напряжений из (5.3) и (5.4) в формулу, аналогичную формуле (5.5), и учитывая значения для направляющих косинусов, получим выражение для проекции преобразования напряжения на ось z на площадке сферы радиуса r

$$Z_r^* = -\frac{3P}{2\pi}\frac{z^2}{r^5}\left(\frac{x^2}{r}+\frac{y^2}{r}+\frac{z^2}{r}\right) = -\frac{3P}{2\pi}\frac{z^2}{r^4} \tag{5.6}$$

Умножая обе части равенства на величину площадки сферического пояска, равную $2\pi r \sin\theta r\, d\theta$, заменяя координату z через $z = r\cos\theta$ и проинтегрировав по углу θ от нуля до $\frac{1}{2}\pi$, получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Z_r^* 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta = -3P \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = -P \tag{5.7}$$

Таким образом мы установили, что величина сосредоточенной в начале координат силы равна в точности тому постоянному коэффициенту P, который фигурирует в формулах (5.1).

Остается только в равенствах (5.1), (5.2) и (5.3) перейти от преобразований Лапласа к оригиналам самих функций. В рассматриваемом случае это действие выполняется очень просто. Для компонент скоростей получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} u &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{xz}{r^3} - \frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{x}{r(r+z)}\exp\frac{-kt}{\lambda+\mu} \\ v &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{yz}{r^3} - \frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{y}{r(r+z)}\exp\frac{-kt}{\lambda+\mu} \\ w &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{z^2}{r^3} + \frac{P}{4\pi\mu}\frac{1}{r} + \frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{1}{r}\exp\frac{-kt}{\lambda+\mu} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Скорость же кубического расширения будет тогда представляться из (5.2) в виде

$$\Theta = -\frac{P}{2\pi(\lambda+\mu)}\frac{z}{r^3}\exp\frac{-kt}{\lambda+\mu} \tag{5.9}$$

Наконец, осуществляя переход в формулах (5.3) и (5.4) от преобразований Лапласа к оригиналам, получим выражения для компонент напряжений

$$\begin{aligned} X_x = &-\frac{P}{2\pi}\frac{z}{r^3} + \frac{P}{2\pi}\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right)\frac{z}{r^3} + \frac{P}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{z}{r^3}\exp\frac{-kt}{\lambda+\mu} - \\ &-\frac{P}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{r(r+z)}\left[1-\frac{x^2(2r+z)}{r^2(r+z)}\right]\exp\frac{-kt}{\lambda+\mu} \\ Y_y = &-\frac{P}{2\pi}\frac{z}{r^3} + \frac{P}{2\pi}\left(1-\frac{3y^2}{r^2}\right)\frac{z}{r^3} + \frac{P}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{z}{r^3}\exp\frac{-kt}{\lambda+\mu} - \\ &-\frac{P}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{r(r+z)}\left[1-\frac{y^2(2r+z)}{r^2(r+z)}\right]\exp\frac{-kt}{\lambda+\mu} \\ Z_z = &-\frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{r^5} \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$X_y = Y_x = -\frac{P}{2\pi}\frac{3yzx}{r^5} + \frac{P}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{xy(2r+z)}{r^3(r+z)^2}\exp\frac{-kt}{\lambda+\mu}$$

$$Y_z = Z_y = -\frac{P}{2\pi}\frac{3yz^2}{r^5} \tag{5.11}$$

$$Z_x = X_z = -\frac{P}{2\pi}\frac{3xz^2}{r^5}.$$

На основании полученных формул (5.8) — (5.11) приходим к заключению, что если среда обладает одновременно свойствами вязкости и сжимаемости, то действие постоянной (сосредоточенной) силы обусловливает переменное со временем поле скоростей, переменное поле деформаций и переменное поле напряжений, причем компоненты напряжения, параллельные направлению силы, со временем не изменяются.

Поступила в редакцию
19 X 1944

Артиллерийская академия
им. Дзержинского

N. A. SLEZKIN.—IMMERSION OF A DISK IN A VISCOUS COMPRESSIBLE MEDIUM

The first two paragraphs of this paper contain a survey of the well-known relation (1.9) between the components of the stress tensor and the velocity components, and equation (2.2) for the motion of a viscous medium (here the usual expedients of neglecting second order magnitudes in the inertia terms are used).

By Laplace transformations (2.3) these relationships are reduced to the forms (2.4) and (2.6), which coincide formally with the generalized Hooke law and with the equations for displacements in the theory of elasticity.

This coincidence make it possible to construct the solutions for certain problems of a viscous compressible medium by means of the known solutions of the corresponding problems of the theory of elasticity.

The author illustrates this idea in paragraph 3 dealing with the problem of immersion of a plane disk in a viscous compressible medium at the moment of contact of the disk with the free surface of the medium.

In paragraph 4 the author speaks of the impact of the disk on the viscous compressible medium.

Paragraph 5 deals with the action of a concentrated force on the plane boundary of the viscous compressible medium.