

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ПЛАСТИЧЕСКОМ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В. В. Соколовский

(Москва)

В теориях пластических, плоского деформированного и плоского напряженного, состояний рассматриваются цилиндрические или призматические тела, находящиеся под действием сил, перпендикулярных к образующим и равномерно распределенных в их направлении, причем тела предполагаются соответственно бесконечно длинными и бесконечно короткими в направлении образующих. Таким образом, обе эти теории посвящены двум крайним случаям — бесконечно длинного и бесконечно короткого призматических тел.

Рассмотрение одной и той же задачи в условиях пластических, плоского деформированного и плоского напряженного, состояний дает возможность установить границы, в которых расположено решение задачи при конечной длине цилиндрического тела в направлении образующей. Получение такой оценки представляет на наш взгляд главную задачу теории плоского напряженного состояния.

Уравнения пластического равновесия в условиях плоского напряженного состояния были исследованы в нашей статье [1]. Базируясь на этих уравнениях¹ и пользуясь методом, аналогичным примененному нами в теории предельного равновесия сыпучих тел [2], можно решать различные задачи о плоском пластическом напряженном состоянии. Ниже это будет показано на двух характерных примерах.

§ 1. Распределение напряжений вокруг кругового выреза

Рассмотрим сначала распределение напряжений в пластической зоне вокруг кругового выреза радиуса a , по окружности которого действует равномерное давление

$$\sigma_r = -kp = \text{const} \quad \text{при} \quad r = a.$$

причем $1 \leq |p| \leq 2$, а напряжения в бесконечности отсутствуют.

Эта задача, рассмотренная Надаи [3], может быть решена при помощи формул (2.19*). Постоянное интегрирования B , входящее в эти формулы, нетрудно найти из контурного условия

$$\omega = -x \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{p}{2} \quad \text{при} \quad r = a$$

имеющего место в силу формул (4.3*) при $P_n = -kp$ и $n = 0$. Окончательно получим

¹ Номера формул нашей статьи [1], часто встречающиеся в тексте, отмечены звездочками.

$$r^2 = a^2 \frac{|p| + \sqrt{3} \sqrt{4-p^2}}{4 \sin \omega} \exp \left\{ -\sqrt{3} \left[\frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{|p|}{2} + \chi \left(\omega - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем квадратные корни $\sqrt{\quad}$ считаются положительными, под \arcsin подразумевается его главное значение и $\chi = \text{sign } p, \text{sign}(\sin \omega) = \pm 1$ и $\pm \pi/2$.

Компоненты напряжения определены формулами (2.17*), которые при $\psi = \theta - (1 + \chi)\pi/4$ принимают вид

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = 2k \cos \left(\omega \pm \chi \frac{\pi}{6} \right) \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.2)$$

Построенное решение выражено через параметер ω . При заданном значении p интервалы изменения этого параметра должны быть выбраны так, чтобы не менялся знак производной

$$\frac{dr}{d\omega} = -r \frac{\chi}{\sin \omega} \sin \left(\omega + \chi \frac{\pi}{6} \right)$$

На контурной окружности

$$\left[\frac{dr}{d\omega} \right]_{r=a} = -2\chi a \frac{\sqrt{4-p^2}}{|p| + \sqrt{3} \sqrt{4-p^2}}$$

Производная $dr/d\omega$ сохраняет свой знак при изменении параметра ω в пределах

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{3} + \arcsin \frac{|p|}{2} \quad (\chi = +1), \quad \frac{2\pi}{3} - \arcsin \frac{|p|}{2} \leq \omega \leq \pi \quad (\chi = -1)$$

Интервал изменения ω , однако, должен быть уменьшен, так как пластическая зона заполняет не всю плоскость вне выреза, а только некоторое кольцо между контурной окружностью $r = a$ и концентрической с ней окружностью $r = c$.

Компоненты напряжения в упругой зоне выражаются известными из теории упругости формулами

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = -k \frac{C}{r^2}$$

написанными в предположении, что напряжения в бесконечности равны нулю.

Условие непрерывности компонент напряжения на общей границе упругой и пластической зон¹

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p; \quad \sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p \quad \text{при } r = c$$

дает возможность выразить постоянные интегрирования C через радиус граничной окружности c . Имеем

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = -\chi k \frac{c^2}{r^2} \quad (1.3)$$

Далее, из того же условия ясно, что

$$\sigma_r^p + \sigma_\theta^p = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \pm \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \text{при } r = c \quad (*)$$

¹ Буквами e и p отмечены значения компонент напряжения на границе упругой и пластической зон, вычисленные соответственно с упругой и пластической сторон.

Таким образом параметр ω , входящий в формулы (1.1) и (1.2), заключен в пределах

$$\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{3} + \arcsin \frac{|p|}{2} \quad (\alpha = +1), \quad \frac{2\pi}{3} - \arcsin \frac{|p|}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \quad (\alpha = -1)$$

Для нахождения радиуса c служат формулы (1.4) и (*). Имеем

$$c = \frac{a}{2} \sqrt{|p| + \sqrt{3\sqrt{4-p^2}}} \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\arcsin \frac{|p|}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \quad (1.4)$$

Таким образом в пластическом состоянии находится лишь кольцевая зона $a \leq r \leq c$, в которой (так как $|p| \leq 2$)

$$\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{5\pi}{6} \quad (\alpha = +1), \quad \frac{\pi}{6} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \quad (\alpha = -1)$$

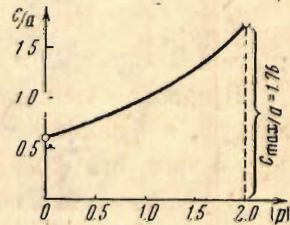
Следовательно, в этой пластической кольцевой области уравнения (2.1*) являются гиперболическими.

Пластическая зона возникает впервые при

$$|p| = 1$$

Возрастание величины $|p|$ влечет за собой расширение пластического кольца. Максимальное значение $c = c_{\max}$ будет иметь место при предельном значении $|p| = 2$. Имеем

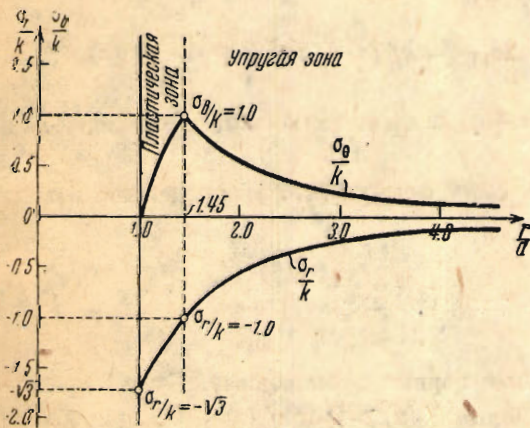
$$c_{\max} = \frac{a}{\sqrt{2}} \exp \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) \approx 1.76 a$$



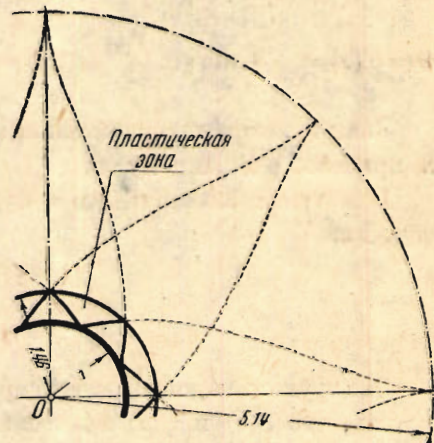
Фиг. 1.

Зависимость между c/a и $|p|$ представлена на фиг. 1.

Таким образом под действием полярно-симметричного радиального давле-



Фиг. 2.



Фиг. 3.

ния, приложенного вдоль контура выреза, может возникнуть пластическое состояние лишь внутри окружности радиуса c_{\max} .

На фиг. 2 изображены эпюры компонент напряжения (по оси абсцисс отложено r/a), а на фиг. 3 построена сетка характеристик (2.20*) для $p = \sqrt{3}$. Сетка характеристик имеет механический смысл, конечно, лишь в пластиче-

ской зоне, т. е. в кольце $a \leq r \leq c$; поэтому вне этого кольца характеристики нанесены пунктиром. Величина

$$c = a \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \exp \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \approx 1.46 a$$

находится по формуле (1.4) при $p = \sqrt{3}$.

§ 2. Распределение напряжений вокруг некругового выреза

Рассмотрим теперь распределение напряжений в пластической зоне вокруг отверстия, ограниченного произвольным гладким контуром,

$$x = x(\alpha), \quad y = y(\alpha)$$

(через α обозначен угол между осью x и касательной к контуру, а через r — радиус его кривизны), вдоль которого задано нормальное давление

$$\sigma_n = -kp(\alpha) \quad (p > 0)$$

причем $1 \leq p \leq 2$, а напряжения в бесконечности отсутствуют.

Предполагается, что функция $p(\alpha)$ допускает непрерывную первую производную, а функции $x(\alpha)$, $y(\alpha)$ — непрерывные вторые производные, причем, кроме того, эти функции периодические с периодом 2π .

В условиях плоского пластического деформированного состояния задача об определении напряжений вокруг отверстий решена Христиановичем^[4].

Ниже эта задача рассматривается при пластическом плоском напряженном состоянии.

Контурные значения ω и ψ находятся по формулам (4.3*) и (4.4*) при $P_n = -kp(\alpha)$ в виде

$$\omega = \omega(\alpha) = \frac{\pi}{3} + \arcsin \frac{p(\alpha)}{2}, \quad \psi = \alpha, \quad 2\sigma_t = -kp(\alpha) + k\sqrt{3} \sqrt{4 - p^2(\alpha)} \quad (2.1)$$

Знак κ выбран положительным $\kappa = +1$, а произвольные целые числа m и n приняты равными нулю.

Контурные значения ξ и η будут в силу формул (2.4*) определены в виде функций

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(\alpha) \\ \eta &= \eta(\alpha) \end{aligned} \right\} = \Omega[\omega(\alpha)] \pm \alpha \quad (2.2)$$

Эти функции допускают непрерывные первые производные. Будем предполагать, что $\xi(\alpha)$ и $\eta(\alpha)$ монотонны, причем $\xi'(\alpha) > 0$ и $\eta'(\alpha) < 0$; при обходе вокруг контура $\xi(\alpha)$ получает приращение $+2\pi$, а $\eta(\alpha)$ приращение -2π . Условие о монотонности функций $\xi(\alpha)$ и $\eta(\alpha)$ требует наложения некоторых ограничений¹ на функцию $p(\alpha)$. Эти ограничения будут выполнены, например, при $p = \text{const}$.

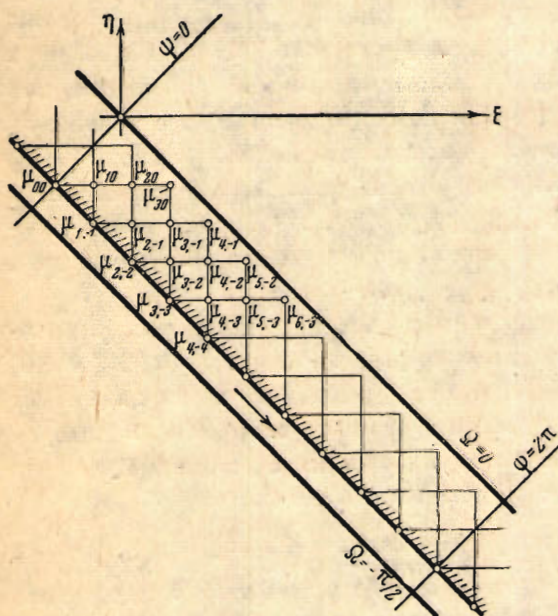
Для нахождения напряжений в пластической зоне вокруг контура доста-

¹ Впрочем, эти ограничения несущественны и могут быть легко сняты.

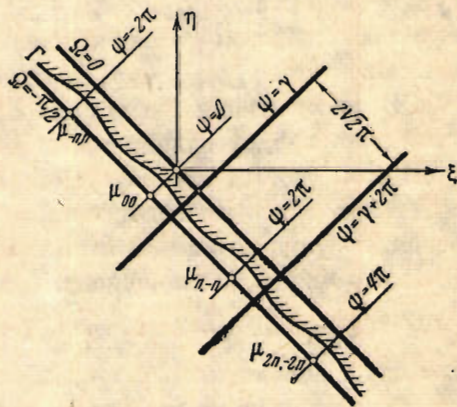
точно построить решение $\omega = \omega(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$ уравнений (2.1*) так, чтобы на кривой $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$ выполнялись условия (2.1).

Введем в рассмотрение плоскость характеристик $\xi\eta$. Точки в этой плоскости будем отмечать буквами μ_{ij} , а их изображения на плоскости xy — буквами M_{ij} . Условимся называть два геометрических образа плоскости $\xi\eta$ эквивалентными, если их можно совместить переносом одного из них в направлении $\omega = \text{const}$ на отрезок $2\sqrt{2}\pi m$ (m — целое число). Как уравнения (2.7*), так и граничные условия не изменяются при добавлении к ψ величины $2\pi m$.

В отличие от задачи Христиановича о распределении напряжений вокруг отверстия при плоском деформированном состоянии, в которой использовалась



Фиг. 4.



Фиг. 5.

вся плоскость $\xi\eta$, в задаче о распределении напряжений вокруг отверстия при плоском напряженном состоянии следует рассматривать на плоскости $\xi\eta$ лишь полосу $-\pi/2 \leq \Omega \leq 0$. Поэтому в применении к настоящей задаче рассуждения Христиановича подлежат существенному изменению.

Нанесем в плоскости $\xi\eta$ кривую (2.2) для $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Пусть это будет линия¹ $\mu_{00} \mu_{n,-n}$ (фиг. 4). Разделим интервал изменения α на n промежутков (равных или не равных) и обозначим значения α в точках деления через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$. Через точки деления $\mu_{1,-1}, \mu_{2,-2}, \dots$, отрезка $\mu_{00} \mu_{n,-n}$, соответствующие $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, проведем прямые, параллельные осям координат. Мы получим, таким образом, в плоскости $\xi\eta$ ряд треугольников и прямоугольников, изображенных на фиг. 5.

Отрезки кривых, эквивалентных $\mu_{00} \mu_{n,-n}$, составляют линию Г. Около

¹ На фиг. 4 эта линия для простоты чертежа представлена в виде прямой, что соответствует случаю $p = \text{const}$.

каждого из этих отрезков построим треугольники и прямоугольники, эквивалентные треугольникам и прямоугольникам, примыкающим к отрезку $\mu_{00} \mu_{n,-n}$.

Функции $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$ определяют функции x и y вдоль отрезка $\mu_{00} \mu_{n,-n}$, являющегося изображением контура. Таким образом вдоль $\mu_{00} \mu_{n,-n}$, а следовательно, вдоль каждого из отрезков $\mu_{00} \mu_{1,-1}$, $\mu_{1,-1} \mu_{2,-2}$, ... мы имеем данные Коши¹, которые дают возможность построить решения уравнений (2.7*) в треугольниках $\mu_{00} \mu_{10} \mu_{1,-1}$, $\mu_{1,-1} \mu_{2,-1} \mu_{2,-2}$, ..., примыкающих к отрезку $\mu_{00} \mu_{n,-n}$. Очевидно, что найденные решения имеют силу также во всех треугольниках, эквивалентных $\mu_{00} \mu_{10} \mu_{1,-1}$, $\mu_{1,-1} \mu_{2,-1} \mu_{2,-2}$, ...

Далее, могут быть построены решения уравнения (2.7*) в цепи прямоугольников $\mu_{1,-1} \mu_{10} \mu_{20} \mu_{2,-1}$, $\mu_{2,-2} \mu_{2,-1} \mu_{3,-1} \mu_{3,-2}$, ..., примыкающих к указанным треугольникам. Рассмотрим, например, прямоугольник $\mu_{1,-2} \mu_{10} \mu_{20} \mu_{2,-1}$ стороны его суть характеристики различных семейств уравнений (2.7*). Вдоль двух отрезков $\mu_{1,-1} \mu_{10}$ и $\mu_{1,-1} \mu_{20} \mu_{2,-1}$ характеристик значения x и y известны, так как они были получены при определении этих величин в треугольниках $\mu_{00} \mu_{10} \mu_{1,-1}$ и $\mu_{1,-1} \mu_{2,-1} \mu_{2,-2}$. По этим данным находится решение уравнений (2.7*) в прямоугольнике $\mu_{1,-1} \mu_{10} \mu_{20} \mu_{2,-1}$. Аналогичным образом строится решение в прямоугольниках $\mu_{2,-2} \mu_{2,-1} \mu_{3,-1} \mu_{3,-2}$, $\mu_{3,-3} \mu_{3,-2} \mu_{4,-2} \mu_{4,-3}$, ... Ясно, что полученные таким образом решения остаются в силе также во всех прямоугольниках, эквивалентных $\mu_{1,-1} \mu_{10} \mu_{20} \mu_{2,-1}$, $\mu_{2,-2} \mu_{2,-1} \mu_{3,-1} \mu_{3,-2}$, ...

Эти рассуждения могут быть продолжены до тех пор, пока рассматриваемая цепь прямоугольников еще находится в пределах² полосы $-\pi/2 \leq \Omega \leq 0$.

В этом состоит весьма существенное отличие решаемой здесь задачи от соответствующей задачи при плоском деформированном состоянии, в которой искомые функции определяются на всей полуплоскости над линией Γ .

Построенные выше функции будут удовлетворять равенствам

$$x(\xi + 2\pi m, \eta - 2\pi m) = x(\xi, \eta), \quad y(\xi + 2\pi m, \eta - 2\pi m) = y(\xi, \eta)$$

так как в эквивалентных точках значения x и y должны быть соответственно равны. Написанные равенства показывают, что достаточно рассматривать в плоскости $\xi\eta$ не всю полосу $-\pi/2 \leq \Omega \leq 0$, а только прямоугольник шириной $2\sqrt{2}\pi$, вырезанный из нее прямыми $\psi = \text{const}$, и притом ту его часть, которая расположена над линией Γ , другими словами, прямоугольник (фиг. 5)

$$\Omega[\omega(\alpha)] \leq \Omega \leq 0, \quad \gamma \leq \psi < \gamma + 2\pi$$

где через γ обозначено произвольное значение угла ψ .

Сделаем несколько замечаний по поводу полученного решения. Прежде всего изучим поведение якобиана

$$\Delta = \frac{+2R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (2.8^*)$$

¹ Существование и единственность решений краевых задач уравнений (2.7*) могут быть установлены обычными в теории гиперболических уравнений методами. Для проведения соответствующих доказательств следует уравнения (2.7*) свести к системе интегральных уравнений Вольтерра. Последние, как известно, могут быть при выполнении некоторых весьма общих условий решены методом последовательных приближений, причем построенные решения будут единственны.

² При достаточно большом числе промежутков на отрезке $\mu_{00} \mu_{n,-n}$ можно построить функции x и y в точках, расположенных сколь угодно близко от прямой $\Omega = 0$.

Нетрудно найти значение якобиана Δ вдоль линии Γ . Дифференцируя функции

$$x = x(\alpha), \quad y = y(\alpha)$$

по α и принимая во внимание уравнения (2.7*), найдем производные $\partial x / \partial \xi$, $\partial x / \partial \eta$, а вслед затем по формуле (2.8*) и выражение якобиана преобразования на кривой Γ

$$\Delta^* = \frac{r^2}{2\xi'(\alpha)\eta'(\alpha)} \sqrt{\frac{\sin(\omega + \pi/6)}{\sin(\omega - \pi/6)}} < 0,$$

где r — радиус кривизны контура.

Таким образом вдоль кривой Γ якобиан преобразования Δ отрицателен; в плоскости $\xi\eta$ он остается отрицательным вплоть до линии разрыва, если она существует.

Нетрудно видеть, что прямоугольнику $\Omega[\omega(\alpha)] \leq \Omega \leq 0$, $\gamma \leq \psi < \gamma + 2\pi$ в плоскости $\xi\eta$ соответствует область плоскости xy , расположенная вне контура. Известно, что если якобиан преобразования отрицателен, то при отображении одной области на другую направления обходов соответствующих кривых становятся противоположными. При обходе контура против часовой стрелки в плоскости xy область вне контура остается справа, следовательно, соответствующая область в плоскости $\xi\eta$ при движении по линии Γ от ψ_{00} к ψ_{n-n} (направление указано стрелкой) должна оставаться слева.

Функции

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

обратные по отношению к $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, на основании предложения, указанного в § 2 статьи [1], являются решением уравнений (2.2*). Эти функции в силу формул (1.6*) и (2.4*) определяют компоненты напряжения.

В качестве примера рассмотрено распределение напряжений вокруг отверстия, ограниченного эллипсом ($a/b = 2.5$):

$$x = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{1 - e \cos^2 \alpha}}, \quad y = -\frac{b}{a} \frac{b \cos \alpha}{\sqrt{1 - e \cos^2 \alpha}}, \quad e = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

по контуру которого действует равномерное давление, причем $p = \sqrt{3}$.

Решение задачи проведено приближенным методом Массо (Massau), состоящим в замене отыскания решения краевых задач уравнений (2.7*) определением значений ω , ψ , x , y в конечном числе узловых точек сетки характеристик.

На фиг. 6 построена сетка характеристик и представлены эпюры распределения компонент напряжения вдоль осей x и y .

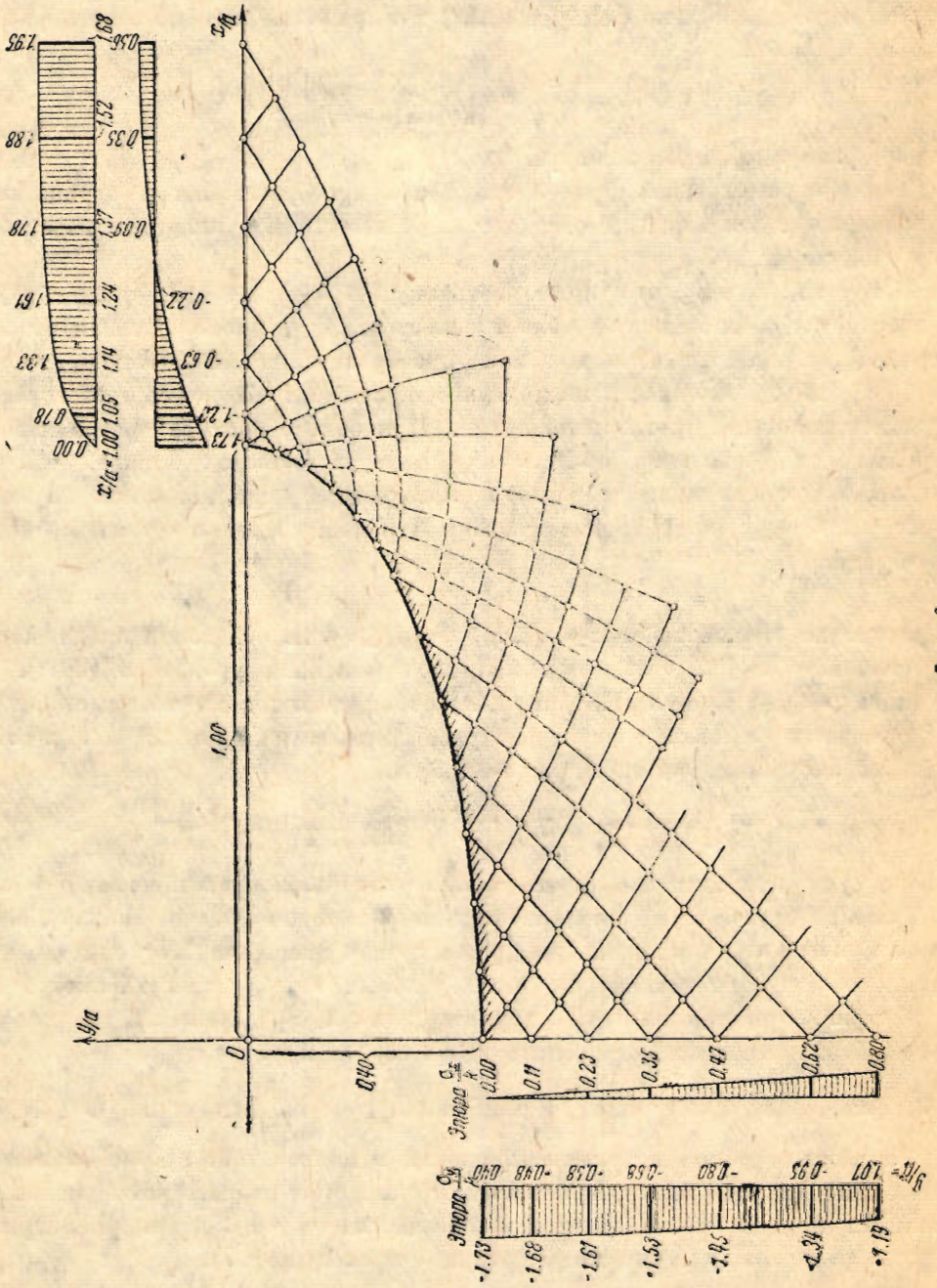
§ 3. Волочение узкой пластической полосы через неподвижную матрицу

Рассмотрим распределение напряжений в полосе при протаскивании ее через неподвижную жесткую матрицу, предполагая процесс установившимся. Толщина полосы после протяжки обозначена через $2b$, ширина матрицы — через a , угол между плоскостями матрицы — через 2γ (фиг. 7).

Симметрия задачи относительно оси x дает возможность ограничиться рассмотрением лишь точек полосы, лежащих в верхней полуплоскости, для которых $y \geq 0$.

Предполагается, что при выходе полосы из матрицы (в сечении $x = 0$)

$$\sigma_x = kp = \text{const}, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y < \sigma_x$$



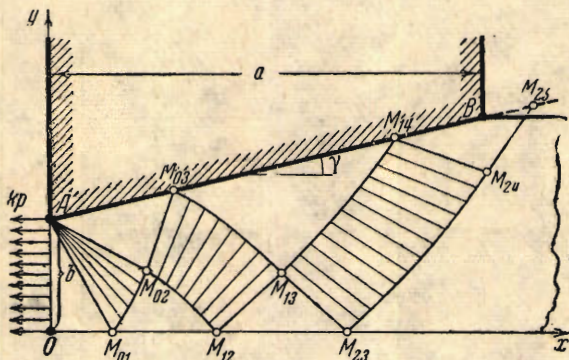
Фиг. 6.

На основании формул (4.3*) и (4.4*) вдоль оси y имеем

$$\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{3} - \arcsin \frac{p}{2}, \quad \psi = 0$$

$$2\sigma_y = k(p - \sqrt{3} \sqrt{4 - p^2}) \quad (3.1)$$

Для получения условий вдоль контактной прямой должны быть сделаны еще некоторые предположения относительно характера трения по контактным плоскостям. Пусть между плоскостями матрицы и пластической полосы может возникать сила трения, максимальная величина которой постоянна¹ и равна kt .



Фиг. 7.

Вдоль контактной прямой на основании формул (4.5*) и (4.6*) имеем

$$\left. \begin{aligned} \psi = \gamma + \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sin \omega}, \quad \xi = \xi(\omega) \\ \eta = \eta(\omega) \end{aligned} \right\} = \Omega(\omega) \pm \gamma \pm \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sin \omega} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n \\ \sigma_t \end{aligned} \right\} = k (\sqrt{3} \cos \omega \mp \sqrt{\sin^2 \omega - t^2}) \quad (3.3)$$

По причине симметрии задачи относительно оси x ясно, что вдоль этой оси

$$\psi = 0 \quad \text{или} \quad \eta = \xi \quad (3.4)$$

Предполагается, что параметры γ и t таковы, что трансцендентное уравнение

$$\Omega(\omega) + \gamma + \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sin \omega} = \Omega\left(\frac{2\pi}{3} - \arcsin \frac{p}{2}\right) \quad (3.5)$$

имеет решение. Обозначим это решение через $\omega_* = \omega_*(p)$, а через $\psi_* = \psi_*(p)$ значение

$$\psi_* = \psi_*(p) = \gamma + \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sin \omega_*(p)}$$

Будем наряду с плоскостью xy (фиг. 7) рассматривать плоскость $\xi\eta$ (фиг. 8). В плоскости xy следует прежде всего исследовать три области: прямо-

¹ Случай сухого трения, когда максимальная величина силы трения пропорциональна нормальному давлению, может быть рассмотрен совершенно аналогично.

угольный треугольник $АОМ_{01}$, гипотенузой которого служит прямая

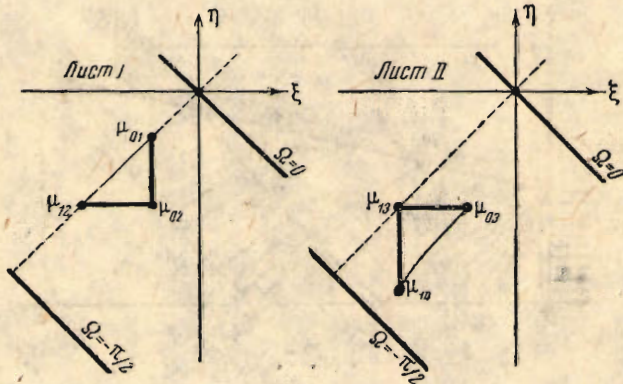
$$y = \frac{-R(\omega_0)}{2 \sin(\omega_0 - \pi/6)} x + b$$

треугольник $АМ_{02}М_{03}$ и некруговой сектор $АМ_{01}М_{02}$, отделенные прямой

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega_* \sin 2\psi_* - R(\omega_*)}{\sqrt{3} \sin \omega_* \cos 2\psi_* - \cos \omega_*} x + b$$

В прямоугольном треугольнике $АОМ_{01}$

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{3} - \arcsin \frac{p}{2}, \quad \psi \equiv 0$$



Фиг. 8.

Характеристиками служат два семейства параллельных прямых

$$y = \frac{\pm R(\omega_0)}{2 \sin(\omega_0 - \pi/6)} x + \text{const}$$

этой области соответствует в плоскости $\xi\eta$ точка μ_{01} .

В секторе $АМ_{01}М_{02}$

$$\Omega(\omega) + \psi = \Omega\left(\frac{2\pi}{3} - \arcsin \frac{p}{2}\right), \quad y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} x + b \quad (*)$$

Эти формулы определяют функции

$$\omega = \omega(x, y; p), \quad \psi = \psi(x, y; p)$$

Сетка характеристик состоит из семейства кривых, которые находятся путем интегрирования уравнений (2.13*), и из пучка прямых $\omega = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, проходящих через точку A ; этой области отвечает в плоскости $\xi\eta$ отрезок характеристики $\mu_{01}\mu_{02}$.

На основании построенного решения будут, в частности, известны уравнение дуги $М_{01}М_{12}$ и значения $x = x(\psi; p)$, $y = y(\psi; p)$ вдоль этой дуги.

В треугольнике $АМ_{02}М_{03}$ имеет место равномерное напряженное состояние

$$\omega \equiv \omega_*, \quad \psi \equiv \gamma + \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sin \omega_*}$$

Характеристиками служат два семейства параллельных прямых

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega_* \sin 2\psi_* \pm R(\omega_*)}{\sqrt{3} \sin \omega_* \cos 2\psi_* - \cos \omega_*} x + \text{const}$$

Этой области соответствует в плоскости $\xi\eta$ одна точка μ_{02} .

Отметим, что углы между характеристиками в треугольниках AOM_{01} и $AM_{02}M_{03}$ постоянны, но различны, а в секторе $AM_{01}M_{02}$ эти углы постоянны вдоль каждой прямолинейной характеристики, но непрерывно изменяются вдоль криволинейных характеристик.

На листе I плоскости $\xi\eta$ наносится прямоугольный треугольник $\mu_{01}\mu_{02}\mu_{12}$, одним из катетов которого является уже проведенный ранее отрезок характеристики $\xi = \Omega(\omega_0)$, а гипотенузой служит прямая (3.4).

В этом треугольнике $\mu_{01}\mu_{02}\mu_{12}$ (на листе I) может быть построено решение уравнений (2.7*) по смешанным данным¹:

вдоль отрезка характеристики $\mu_{01}\mu_{02}$

$$\Omega(\omega) + \psi = \Omega(\omega_0), \quad 2\psi = \Omega(\omega_0) - \eta \quad (3.6)$$

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} x + b, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} \frac{\partial x}{\partial \psi}$$

вдоль прямолинейного отрезка $\mu_{01}\mu_{12}$

$$y = 0$$

Формулы (3.6) следуют из решения (*), построенного в секторе $AM_{01}M_{02}$ а последняя формула утверждает, что отрезок $\mu_{01}\mu_{12}$ соответствует оси x .

Построенные функции $x = x(\xi, \eta; p)$, $y = y(\xi, \eta; p)$ отображают прямоугольный треугольник $\mu_{01}\mu_{02}\mu_{12}$ в криволинейный треугольник $M_{01}M_{02}M_{12}$ на плоскости xy .

В криволинейной трапеции $M_{02}M_{03}M_{13}M_{12}$

(**)

$$\Omega(\omega) - \psi = \Omega(\omega_*) - \gamma - \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sin \omega_*}, \quad y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} x + \Phi(\psi)$$

Произвольную функцию $\Phi(\psi)$ нетрудно найти, зная функции x и y в треугольнике $\mu_{01}\mu_{02}\mu_{12}$ и, следовательно, $x = x(\xi; p)$, $y = y(\xi; p)$ вдоль отрезка характеристики $\mu_{01}\mu_{02}$. Эти функции могут быть представлены в виде $x = x^*(\psi; p)$, $y = y^*(\psi; p)$, так как

$$\xi = 2\psi + \Omega(\omega_*) - \gamma - \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sin \omega_*}$$

в криволинейной трапеции $M_{02}M_{03}M_{13}M_{12}$, а вместе с тем и на дуге $M_{02}M_{12}$.

Отсюда следует, что

$$\Phi(\psi) = y^*(\psi; p) - \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} x^*(\psi; p)$$

Написанные формулы (**), в результате нахождения произвольной функции $\Phi(\psi)$, определяют $\omega = \omega(x, y; p)$, $\psi = \psi(x, y; p)$ во всей указанной выше области.

Сетка характеристик состоит из семейства непараллельных прямых и семейства кривых, которые находятся интегрированием уравнений (2.11*).

На основании построенного решения будут известны уравнение дуги $M_{03}M_{13}$ и значения $x = \bar{x}(\psi; p)$, $y = \bar{y}(\psi; p)$ вдоль нее.

¹ Существование и единственность решений смешанных краевых задач могут быть установлены обычными в теории гиперболических уравнений методами. По этому поводу см. сноску на стр. 224.

На листе II плоскости $\xi\eta$ наносится прямоугольный треугольник $\mu_{03}\mu_{13}\mu_{14}$; вершины μ_{03}, μ_{13} этого треугольника имеют те же координаты, что и точки μ_{02}, μ_{12} а гипотенузой его служит¹ кривая (3.2).

В треугольнике $\mu_{03}\mu_{13}\mu_{14}$ (на листе II) решение уравнений (2.7*) может быть найдено по смешанным данным²:

вдоль отрезка характеристики $\mu_{03}\mu_{13}$ (3.7)

$$\Omega(\omega) - \psi = \Omega(\omega_*) - \gamma - \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sin \omega_*}, \quad 2\psi = \xi - \Omega(\omega_*) + \gamma + \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\sin \omega_*}$$

$$y - y^*(\psi; p) = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} [x - x^*(\psi; p)], \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega) \frac{\partial x}{\partial \psi}}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega}$$

вдоль отрезка кривой $\mu_{03}\mu_{14}$

$$y = x \operatorname{tg} \gamma + b$$

Последнее равенство утверждает, что кривой $\mu_{03}\mu_{14}$ соответствует контактная прямая.

Найденные функции $x = x(\xi, \eta; p)$, $y = y(\xi, \eta; p)$ отображают треугольник $\mu_{03}\mu_{13}\mu_{14}$ в криволинейный треугольник $M_{03}M_{13}M_{14}$ на плоскости xy .

Приведенные рассуждения могут быть продолжены до тех пор, пока рассматриваемые в плоскости $\xi\eta$ области не выйдут за пределы полосы

$$-\frac{\pi}{2} \leq \Omega \leq 0$$

В этом состоит существенное отличие исследуемой задачи от задачи о распределении напряжений в пластической полосе при плоском деформированном состоянии, в которой подобного ограничения нет.

Обращая функции $x = x(\xi, \eta; p)$, $y = y(\xi, \eta; p)$, построенные в треугольнике $\mu_{03}\mu_{13}\mu_{14}$, получим $\xi = \xi(x, y; p)$, $\eta = \eta(x, y; p)$, а следовательно, и функции

$$\omega = \omega(x, y; p), \quad \psi = \psi(x, y; p)$$

Нормальная компонента давления вдоль контактной прямой определяется формулой (3.3) при

$$\omega = \omega[x, x \operatorname{tg} \gamma + b; p]$$

Заметим, что построенное решение зависит от параметра p : величина его влияет на сетку характеристик.

Величина p , определяющая напряжение натяжения, необходимое для вольнения полосы, связана с шириной a матриц при помощи условия равновесия полосы

$$kpb = -\operatorname{tg} \gamma \int_0^a \sigma_n dx + \int_0^a \tau_{tn} dx$$

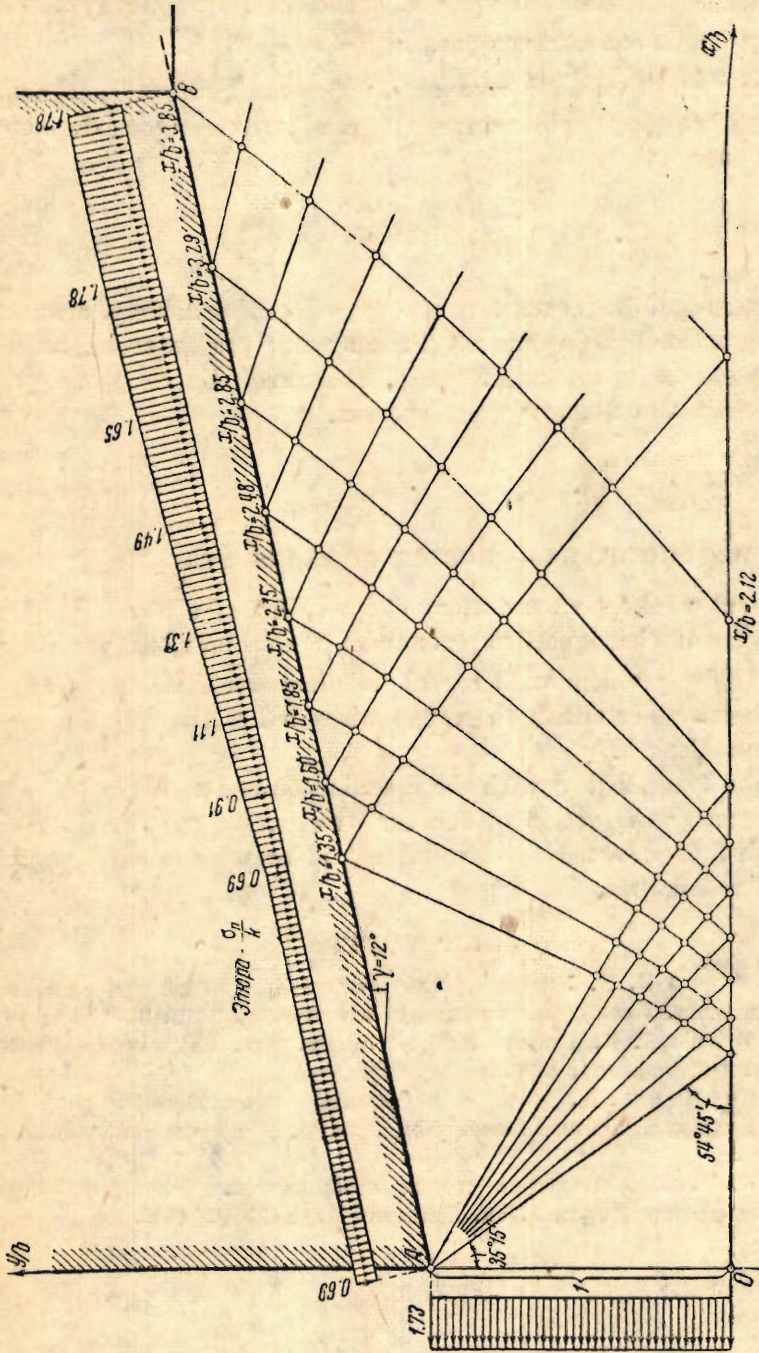
Полагая $\tau_{tn} = kt = \text{const}$ и принимая во внимание формулу (3.3), получим

$$p = at - \operatorname{tg} \gamma \int_0^a (\sqrt{3} \cos \omega - \sqrt{\sin^2 \omega - t^2}) d\xi \quad (3.8)$$

где $\alpha = a/b$. Параметр p входит в подинтегральное выражение.

¹ Подчеркиваем, что линия $\mu_{03}\mu_{14}$ на фиг. 8 есть кривая.

² См. сноску на стр. 229.



Фиг. 9.

В качестве примера приведено численное решение рассмотренной задачи для $t=0.2$ приближенным методом Массо.

На фиг. 9 нанесена сетка характеристик, построенная по координатам узловых точек, и представлена эпюра распределения нормальной компоненты напряжения вдоль контактной прямой. Значение α , соответствующее заданному значению $p = \sqrt{3}$, оказывается равным $\alpha = a/b = 3.85$.

Сравнение результатов в задачах о волочении пластической полосы через неподвижную матрицу при плоском деформированном и плоском напряженном состояниях дает

$$p = 1.73, \quad \alpha = \begin{cases} 3.85 \\ 3.60 \end{cases} \quad \text{или} \quad \alpha = 3.85, \quad p = \begin{cases} 1.80 \\ 1.73 \end{cases}$$

Верхние цифры относятся к плоскому деформированному, а нижние к плоскому напряженному состояниям. Расхождение результатов для величин α и p , как видно из приведенных цифр, невелико. Более резко различаются самые давления вдоль контактных прямых.

Поступила в редакцию
3 III 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

W. W. SOKOLOVSKY.—PROBLEM OF PLANE STRESSED STATES

The present work¹ gives solutions of problems of a plane plastic stressed state by means of the equations examined in our previous work [1]. The examination of the problem with regard to plane stressed and plane deformed states enables us to establish the range wherein lies the solution for prismatic bodies of finite length.

Paragraphs 1 and 2 deal with the distribution of stresses in the plastic zones around slots under the action of contour stresses.

Paragraph 3 is devoted to the problem of drawing a narrow plastic strip through a fixed matrix.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Уравнения пластического равновесия при плоском напряженном состоянии. Прикладная математика и механика. 1945. Т. IX. Вып. 1.
2. Соколовский В. В. Статика сплошной среды. Изд. Академии Наук СССР. 1942.
3. Надаи А. Пластичность. 1936.
4. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Математический сборник. Т. 1 (43). № 4 1936.
5. Михлин С. Г. Математическая теория пластичности. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд. Академии Наук СССР. 1938.

¹ The asterisk accompanying formulae numbers indicates a reference to the author's previous work (This journal, vol. IX, n 1, p. 111).