

## СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕОРИЕЙ СЕН ВЕНАНА-ЛЕВИ-МИЗЕСА И ТЕОРИЕЙ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

А. А. Ильюшин

(Москва)

Теории пространственного деформирования твердых тел за пределами упругости можно разбить на две группы. Теории первой группы основаны на гипотезе о существовании определенных соотношений между напряжениями и скоростями деформаций тела. Совокупность теорий первой группы будем называть теорией пластичности Сен Венана-Леви-Мизеса, или для краткости, теорией течения [1].

Вторая группа теорий пластичности основывается на гипотезе о существовании зависимости между напряжениями и самими деформациями тела. Основной среди них является теория малых упруго-пластических деформаций Хенки-Мизеса, обобщенное изложение которой дано в нашей работе [2].

Разница между теориями первой и второй групп бесспорно является принципиальной, поскольку в теории Сен Венана-Леви-Мизеса напряженное состояние тела определяется в некоторый момент времени лишь мгновенным распределением скоростей деформаций, в теории же малых упруго-пластических деформаций оно в известной мере зависит от истории развития деформаций из естественного состояния тела. Казалось бы, что физические свойства одного и того же тела не совместимы со столь различными исходными гипотезами и опыт должен был бы дать определенно отрицательный результат для одной из этих теорий. Между тем ни в русской, ни в иностранной литературе нам не известен опыт, который отвергал бы теорию Сен Венана-Леви-Мизеса в тех условиях, в которых хорошо подтверждается теория малых упруго-пластических деформаций. Заметим, что последней, начиная с Роша и Эйхингера [3], Лода [4] и других и кончая недавними работами Лессельса и Мак Грегора [5] и др., посвящено большое количество экспериментальных исследований.

В этой статье исследуются условия, при которых справедлива, т. е. оправдывается опытом, теория малых упруго-пластических деформаций, и дается доказательство прямой и обратной теорем о взаимоотношении этой теории с теорией Сен Венана-Леви-Мизеса.

Прямая теорема состоит в том, что теория малых упруго-пластических деформаций твердых тел является частным случаем теории Сен Венана-Леви-Мизеса.

Обратная теорема утверждает, что при тех частных условиях, при которых опыт подтверждает теорию малых упруго-пластических деформаций, она является единственным следствием теории пластичности Сен Венана-Леви-



Мизеса, т. е. последняя не содержит в себе никаких лишних, не имеющих физического смысла результатов.

Оговорим заранее, что отсюда вовсе не следует, что теория малых упруго-пластических деформаций должна быть отброшена, но вытекает лишь определенный метод контроля правильности ее результатов.

**1. Две основные теории пластичности.** Для ясности дальнейших рассуждений приведем здесь общую формулировку основных законов теории малых упруго-пластических деформаций и теории течения, причем будем рассматривать лишь малые деформации.

Пусть  $x, y, z$  будут координаты точек тела;  $u_x, u_y, u_z$  — компоненты вектора перемещения;  $v_x, v_y, v_z$  — компоненты вектора скорости;  $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$  — компоненты тензора напряжений;  $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$  — компоненты тензора деформаций;  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$  — компоненты тензора скоростей деформаций. Известно, что

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \dots, e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \dots \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \dots, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, \dots \quad (1.2)$$

Девиатором напряжений называется тензор

$$D_s = \begin{pmatrix} X_x - \sigma & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - \sigma & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - \sigma \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

девиаторами деформаций и скоростей деформаций — тензоры

$$D_e = \begin{pmatrix} e_{xx} - e & \frac{1}{2} e_{xy} & \frac{1}{2} e_{xz} \\ \frac{1}{2} e_{yx} & e_{yy} - e & \frac{1}{2} e_{yz} \\ \frac{1}{2} e_{zx} & \frac{1}{2} e_{zy} & e_{zz} - e \end{pmatrix},$$

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{zx} & \frac{1}{2} \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

причем

$$\sigma = \frac{1}{3} (X_x + Y_y + Z_z), \quad e = \frac{1}{3} (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}), \quad \varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \quad (1.5)$$

Интенсивностью напряжений  $\sigma_i$  называется второй инвариант девиатора  $D_s$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 6(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2)} =$$

$$= \sqrt{3} \sqrt{(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2 - (X_x - \sigma)(Y_y - \sigma) - (Y_y - \sigma)(Z_z - \sigma) - (Z_z - \sigma)(X_x - \sigma))}$$



Интенсивностью деформаций — второй инвариант девиатора  $D_e$ : (1.7)

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{4}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2) - (e_{xx} - e)(e_{yy} - e) - (e_{yy} - e)(e_{zz} - e) - (e_{zz} - e)(e_{xx} - e)}$$

и интенсивностью скоростей деформаций — второй инвариант девиатора  $D_\epsilon$ :

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + (\epsilon_{yy} - \epsilon_{zz})^2 + (\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{4}(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2) - (\epsilon_{xx} - \epsilon)(\epsilon_{yy} - \epsilon) - (\epsilon_{yy} - \epsilon)(\epsilon_{zz} - \epsilon) - (\epsilon_{zz} - \epsilon)(\epsilon_{xx} - \epsilon)}$$

(1.8)

Для малых деформаций имеют место соотношения

$$v_x = \frac{\partial u_x}{\partial \lambda}, \quad v_y = \frac{\partial u_y}{\partial \lambda}, \quad v_z = \frac{\partial u_z}{\partial \lambda}, \quad \epsilon = \frac{\partial e}{\partial \lambda}, \quad D_\epsilon = \frac{\partial}{\partial \lambda} D_e \quad (1.9)$$

Величина  $\lambda$ , частные производные по которой от перемещений мы называем скоростями, может быть, в частности, и время  $t$ , но вообще есть независимая от координат переменная, характеризующая последовательность различных напряженных состояний тела; она может быть, например, параметром, характеризующим совокупность нагрузок, действующих на тело. Будем считать, что  $\lambda = 0$ , когда тело находится в естественном ненапряженном и недеформированном состоянии и не убывает во времени ( $d\lambda/dt \geq 0$ ).

Установим еще понятие количества деформаций сдвига  $\vartheta_i$  как интеграл по  $\lambda$  от интенсивности скорости деформаций:

$$\vartheta_i = \int_0^\lambda \epsilon_i d\lambda \quad (1.10)$$

Аналогичная этой величина впервые была рассмотрена Одквистом. Для нее имеем очевидное неравенство

$$\vartheta_i \geq \epsilon_i \quad (1.11)$$

в то время как для среднего относительного удлинения  $e$  всегда справедливо равенство

$$e = \int_0^\lambda \epsilon d\lambda \quad (1.12)$$

Формулируем теперь основные законы теории Сен Венана-Леви-Мизеса.

Первый закон. *Объемная деформация любого элемента тела является упругой, т. е. среднее гидростатическое напряжение  $\sigma$  является функцией объемного расширения  $\Theta = 3e$ .*

С достаточной точностью эту функцию можно считать линейной

$$\sigma = 3ke \quad (1.13)$$

В частности, при  $k = \infty$  отсюда вытекает условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$



Второй закон. Девiator напряжений пропорционален девиатору скоростей деформаций:

$$\mathbf{D}_s = 2\mu' \mathbf{D}_e = 2\mu' \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{D}_e \quad (1.14)$$

или в скалярном виде

$$X_x - \sigma = 2\mu' (\varepsilon_{xx} - \varepsilon), \dots, \quad X_y = \mu' \varepsilon_{xy}, \dots \quad (1.15)$$

Третий закон. Интенсивность напряжений для каждого материала есть вполне определенная функция количества деформаций сдвига и интенсивности скоростей деформаций:

$$\sigma_i = F(\partial_i; \varepsilon_i), \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial \partial_i} \geq 0 \quad (1.16)$$

Материалы, удовлетворяющие последнему закону, можно назвать изотропно упрочняющимися, так как сопротивление их растет по мере роста количества деформаций сдвига.

Эффект Баушингера, конечно, не охватывается соотношением (1.16) так же, как не охватывается и другими известными теориями пластичности.

На основании (1.15) выражение (1.16) для интенсивности напряжений можно преобразовать к виду

$$\sigma_i = 3\mu' \varepsilon_i, \quad \mu' = \frac{F(\partial_i, \varepsilon_i)}{3\varepsilon_i} \quad (1.17)$$

и, следовательно, все шесть компонент напряжений выражаются через шесть компонент скоростей деформаций или через три компоненты вектора скорости

$$X_x - \sigma = \frac{2\sigma_i(\partial_i, \varepsilon_i)}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon), \dots, \quad X_y = \frac{\sigma_i(\partial_i, \varepsilon_i)}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{xy}, \dots \quad (1.18)$$

Принимая во внимание дифференциальные уравнения равновесия Коши и граничные условия, мы можем считать теорию Сен Вена-Леви-Мизеса формулированной.

Переходим к законам теории малых упруго-пластических деформаций.

Первый закон тождествен первому закону теории течения (1.13)

$$\sigma = 3ke \quad (1.13)$$

Второй закон. Девiator напряжений пропорционален девиатору деформаций:

$$\mathbf{D}_s = 2\mu'' \mathbf{D}_e \quad (1.19)$$

Третий закон. Интенсивность напряжений есть вполне определенная для каждого материала функция интенсивности деформаций

$$\sigma_i = \Phi(e_i), \quad \frac{d\sigma_i}{de_i} \geq 0 \quad (1.20)$$

Отсюда вытекают соотношения, аналогичные (1.17), (1.18):

$$\mu'' = \frac{\Phi(e_i)}{3e_i}, \quad X_y - \tau = \frac{2\sigma_i}{3e_i} (e_{yx} - e), \dots, \quad X_y = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{xy}, \dots \quad (1.21)$$



Уравнения (1.13), (1.21) можно разрешить относительно деформаций и записать совокупность законов малой упруго-пластической деформации в виде формул, аналогичных закону Гука и представляющих его обобщение, впервые указанное Хенки

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [X_x - \nu(Y_y + Z_z)] + \frac{\varphi}{3G} \left[ X_x - \frac{1}{2}(Y_y + Z_z) \right] \dots, \\ e_{xy} &= \frac{1}{G} X_y + \frac{\varphi}{G} X_y, \dots \end{aligned} \quad (1.22)$$

причем  $E$  — модуль Юнга,  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона и

$$\varphi = \frac{3Ge_i - \sigma_i}{\sigma_i} \quad (1.23)$$

2. Опытная проверка теории малых упруго-пластических деформаций и тензор подобия  $\Pi$ . Рассмотрим симметричный тензор

$$\Pi = \frac{D_s}{\sigma_i} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

который, как будет видно из нижеследующего, целесообразно назвать тензором подобия. Его компоненты

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{X_x - \sigma}{\sigma_i}, & p_{22} &= \frac{Y_y - \sigma}{\sigma_i}, & p_{33} &= \frac{Z_z - \sigma}{\sigma_i} \\ p_{12} &= \frac{X_y}{\sigma_i}, & p_{23} &= \frac{Y_z}{\sigma_i}, & p_{31} &= \frac{Z_x}{\sigma_i} \end{aligned} \quad (2.2)$$

на основании (1.7) являются однородными функциями нулевой степени относительно напряжений, причем первый инвариант равен нулю, а второй, составленный аналогично интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , равен единице, т. е.

$$3p = p_{11} + p_{22} + p_{33} = 0 \quad (2.3)$$

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(p_{11} - p_{22})^2 + (p_{22} - p_{33})^2 + (p_{33} - p_{11})^2 + 6(p_{12}^2 + p_{23}^2 + p_{31}^2)} = 1$$

Тензор подобия, следовательно, имеет лишь четыре независимых компоненты. Тензорные поверхности (гиперболоиды) девиаторов  $D_s$  и  $\Pi$  совпадают с точностью до масштаба, а диаграммы Мора подобны.

Таким образом, как нетрудно видеть, тензор подобия  $\Pi$  вполне определяется заданием его трех главных направлений и одного соотношения между компонентами  $p_{m,n}$ , не являющегося следствием (2.3), например, заданием отношения двух диаметров кругов диаграммы Мора.

Пусть  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  обозначают главные напряжения,  $p_1, p_2, p_3$  — главные компоненты  $\Pi$

$$p_n = \frac{\sigma_n - \sigma}{\sigma_i} \quad (n=1, 2, 3) \quad (2.4)$$



Для диаметров кругов Мора **II** имеем (фиг. 1) с точностью до знаков соответственно

$$d_1 = p_1 - p_2, \quad d_2 = p_2 - p_3, \quad d_3 = p_3 - p_1, \quad d_1 + d_2 + d_3 = 0, \quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 2$$

Поэтому, если дано отношение двух диаметров

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_2} = k \quad (2.5)$$

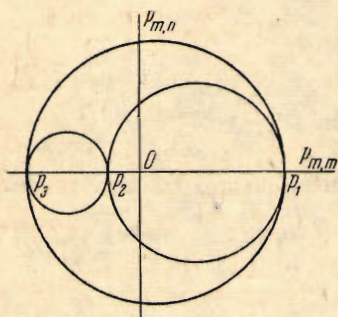
то все они определяются

$$d_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+k+k^2}}, \quad d_2 = \pm \frac{k}{\sqrt{1+k+k^2}}, \quad d_3 = \pm \frac{-1-k}{\sqrt{1+k+k^2}} \quad (2.6)$$

Пусть тело деформируется под действием нагрузок, совокупность которых изменяется во времени вместе с параметром  $\lambda$  и обращается в ноль при  $\lambda = 0$ . Тензор **II** в общем случае будет различен для различных точек тела и значений параметра  $\lambda$ :

$$\mathbf{II} = \mathbf{II}(\lambda; x, y, z) \quad (2.7)$$

Анализируя различные экспериментальные работы, в которых были установлены и подтверждены основные законы теории малых упруго-пластических деформаций (1.19), (1.20), приходим к выводу, что эти результаты могли иметь место в том и только в том случае, если тензор **II** не изменяется по мере изменения нагрузок на тело, т. е. не зависит от параметра  $\lambda$ . Таким образом



Фиг. 1.

$$\frac{\partial \mathbf{II}}{\partial \lambda} = 0 \quad \left( \frac{\partial p_{m,n}}{\partial \lambda} = 0 \right) \quad (2.8)$$

Геометрически это условие эквивалентно следующему: главные оси тензора **II**, а следовательно, и девиатора напряжений  $\mathbf{D}_s$ , по мере изменения нагрузок не изменяют своей ориентации во всех точках тела и соответствующая ему диаграмма Мора остается неизменной; диаграмма Мора для компонент девиатора напряжений изменяется подобно самой себе, т. е. отличается от диаграммы **II** лишь масштабным множителем  $\sigma_i$ , изменяющимся вместе с  $\lambda$ . При этом, очевидно, диаграмма Мора для [напряжений  $X_x, \dots, X_y, \dots$  получается из таковой для  $\mathbf{D}_s$  лишь простым переносом кругов Мора по оси абсцисс на величину  $\sigma$ .

Простейшим примером, когда тензор подобия **II** не зависит от  $\lambda$ , является случай упругой деформации. Пусть каждая из действующих нагрузок, прилагаемых к телу, изменяется пропорционально параметру  $\lambda$ . Тогда, как известно, напряжения в любой точке будут пропорциональны  $\lambda$ , их интенсивность также пропорциональна  $\lambda$  и, следовательно, тензор **II** не будет зависеть от  $\lambda$ .

Опыты Роша и Эйхингера [3], Люда и Надаи [4], Тейлора [5], Лессельса и Мак Грегора [3] и др. над различными металлами в общем случае плоского напряженного состояния установили, что круги Мора для напряжений и дефор-



маций остаются подобными в процессе пластической деформации и величины

$$X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2 + 3X_y^2 \\ e_{xx}^2 + e_{xx} e_{yy} + e_{yy}^2 + \frac{1}{4} e_{xy}^2$$

связаны одним и тем же соотношением, не зависящим от характера напряженного состояния. Математически эти законы тождественны уравнениям

$$D_s = 2\mu^n D e, \quad \sigma = \Phi(e_i)$$

так как в рассматриваемом случае имеем

$$X_x = Y_x = Z_x = 0, \quad e_{xx} = e_{yy} = 0, \quad e_{zz} = -(e_{xx} + e_{yy})$$

$$\sigma_i = \sqrt{X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2 + 3X_y^2} \quad (2.9)$$

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_{xx}^2 + e_{xx} e_{yy} + e_{yy}^2 + \frac{1}{4} e_{xy}^2}$$

и формулы (1.21) дают уравнения

$$\sigma_i = \Phi(e_i), \quad \frac{X_x - \sigma}{\sigma_i} = \frac{2}{3} \frac{e_{xx} - e}{e_i}, \dots, \frac{X_y}{\sigma_i} = \frac{1}{3} \frac{e_{xy}}{e_i}, \dots \quad (2.10)$$

являющиеся условием подобия кругов Мора для напряжений и деформаций.

Опыты проводились над тонкостенными трубами, подвергаемыми действию осевой силы  $P$ , вызывающей напряжение  $X_x$ , внутреннего давления  $q$ , вызывающего тангенциальное напряжение  $Y_y$ , и крутящего момента  $M$ , вызывающего касательные напряжения  $X_y$ . Они обладают одной замечательной особенностью, которая была отмечена большинством исследователей: если машина для испытаний сконструирована так, что нагрузки  $P$ ,  $q$ ,  $M$  в процессе отдельного опыта возрастают пропорционально одной из них, что получается, например, если все они осуществляются за счет постоянных гидравлических передач давления  $q$  из общего резервуара, то как бы ни изменялись эти нагрузки от одного опыта к другому, зависимость  $\sigma_i$  от  $e_i$  остается неизменной и диаграммы Мора для напряжений и деформаций подобными.

Принимая давление  $q$  за параметр  $\lambda$ , можем записать основное условие, при котором оказываются справедливы законы малых пластических деформаций, в виде

$$q = \lambda, \quad P = \lambda P^*, \quad M = \lambda M^* \quad (2.11)$$

причем в процессе одного опыта числа  $P^*$ ,  $M^*$  остаются постоянными. Во всех тех случаях, когда особенности конструкции машины давали возможность нарушения указанного условия, экспериментаторы обнаруживали, что основные законы пластичности нарушаются тем больше, чем сильнее изменяются  $P^*$ ,  $M^*$ . Это существенное обстоятельство, конечно, не могло быть отмечено на приборах, которые автоматически сохраняли постоянными в процессе опыта числа  $P^*$ ,  $M^*$ . Поэтому даже в недавних работах американских авторов оно вызывает некоторое удивление исследователей. Между тем оно пред-



ставляется довольно ясным: изменение чисел  $P^*$ ,  $M^*$ , а следовательно, и положение главных осей напряжений и отношение их  $\sigma_1/\sigma_2$  определяются по произволу экспериментатора заданием их лишь в рассматриваемый момент времени, в то время как положение главных осей деформаций и их отношения зависят от всего предшествующего процесса деформирования.

Если обозначим  $a$ ,  $h$  средний радиус и толщину стенки тонкостенной трубы, то осевое, тангенциальное и касательное напряжения, вызываемые в ней силами (2.11), будут соответственно

$$\frac{P}{2\pi ah} = \lambda \frac{P^*}{2\pi ah}, \quad \frac{qa}{h} = \lambda \frac{a}{h}, \quad \frac{M}{2\pi a^2 h} = \lambda \frac{M^*}{2\pi a^2 h} \quad (2.12)$$

Как известно из опытов с металлами, наложение произвольного среднего гидростатического давления  $\sigma'$  не влияет на поведение их за пределами упругости, вызывая лишь упругую объемную деформацию, и потому можно принять, что напряжения в рассматриваемых нами опытах имеют следующие значения

$$X_x = \sigma' + \lambda \frac{P^*}{2\pi ah}, \quad Y_y = \sigma' + \lambda \frac{a}{h}, \quad X_y = \lambda \frac{M^*}{2\pi a^2 h}, \quad Z_z = \sigma' \quad (2.13)$$

интенсивность напряжений равна

$$\sigma_i = \lambda \sigma_i^*, \quad \sigma_i^* = \sqrt{\frac{P^{*2}}{4\pi^2 h^2 a^2} - \frac{P^*}{2\pi h^2} + \frac{a^2}{h^2} + \frac{3M^{*2}}{4\pi^2 a^4 h^2}} \quad (2.14)$$

и среднее нормальное напряжение

$$\sigma = \sigma' + \frac{\lambda}{3} \left( \frac{a}{h} + \frac{P^*}{2\pi ah} \right) \quad (2.15)$$

Компоненты тензора подобия  $\Pi$  имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{3\sigma_i^*} \left( \frac{P^*}{\pi ah} - \frac{a}{h} \right), & p_{12} &= \frac{1}{\sigma_i^*} \frac{M^*}{2\pi a^2 h} \\ p_{22} &= \frac{1}{3\sigma_i^*} \left( \frac{2a}{h} - \frac{P^*}{2\pi ah} \right), & p_{13} &= 0 \\ p_{33} &= -\frac{1}{3\sigma_i^*} \left( \frac{a}{h} + \frac{P^*}{2\pi ah} \right), & p_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Условия справедливости законов малой упруго-пластической деформации, как уже говорилось выше, имеют вид

$$\frac{\partial P^*}{\partial \lambda} = \frac{\partial M^*}{\partial \lambda} = 0$$

или, на основании (2.16)

$$\frac{\partial p_{m,n}}{\partial \lambda} = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (2.8)$$

т. е. сводятся к требованию, чтобы тензор подобия  $\Pi$  не зависел от параметра  $\lambda$ .



3. Теория малых пластических деформаций является частным случаем теории пластического течения Сен Венана-Леви-Мизеса. Пусть некоторое тело при активной пластической деформации получает напряжения и деформации, изменяющиеся вместе с параметром  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} X_x &= X_x(\lambda; x, y, z), \dots, X_y = X_y(\lambda; x, y, z), \dots, \\ \sigma_i &= \sigma_i(\lambda; x, y, z) \\ e_{xx} &= e_{xx}(\lambda; x, y, z), \dots, e_{xy} = e_{xy}(\lambda; x, y, z), \dots \\ e_i &= e_i(\lambda, x; y, z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Согласно теории малых упруго-пластических деформаций этот процесс описывается уравнениями (1.20), (1.21) и условиями (2.8). Следовательно, имеем

$$\frac{e_{xx} - e}{e_i} = \frac{3}{2} p_{11}, \dots, \frac{e_{xy}}{e_i} = 3p_{12} \dots \quad (3.2)$$

Рассмотрим два деформированных состояния, соответствующие двум различным значениям параметра  $\lambda$  (фиг. 2):

$$\lambda' = \lambda, \quad \lambda'' = \lambda + \delta\lambda$$

Так как левые части равенств (3.2) зависят от  $\lambda$ , но правые не зависят, то по свойству пропорций имеем

$$\frac{e_{xx}'' - e''}{e_i''} = \frac{e_{xx}' - e'}{e_i'} = \frac{(e_{xx}'' - e'') - (e_{xx}' - e')}{e_i'' - e_i'} = \frac{3}{2} p_{11}, \dots$$

или, что то же, на основании (1.19), (1.21) и (2.1)

$$\frac{D_{e_i}''}{e_i''} = \frac{D_{e_i}}{e_i'} = \frac{D_{e_i}'' - D_{e_i}'}{e_i'' - e_i'} = \frac{3}{2} \Pi \quad (3.3)$$

Сближая значения  $\lambda'$  и  $\lambda''$ , будем стремиться  $\delta\lambda$  к нулю; деля на  $\delta\lambda$  числителей и знаменателей последних дробей, получаем

$$\frac{\partial(e_{xx} - e) / \partial\lambda}{\partial e_i / \partial\lambda} = \frac{3}{2} p_{11}, \dots, \frac{\partial D_{e_i} / \partial\lambda}{\partial e_i / \partial\lambda} = \frac{3}{2} \Pi \quad (3.4)$$

или на основании (1.10)

$$\frac{e_{xx} - e}{e_i} = \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon}{\partial e_i / \partial\lambda} = \frac{3}{2} p_{11}, \dots, \frac{D_{e_i}}{e_i} = \frac{D_{e_i}}{\partial e_i / \partial\lambda} \quad (3.5)$$

По определению  $e_i$  (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} e_i^2 &= -(e_{xx} - e)(e_{yy} - e) - (e_{yy} - e)(e_{zz} - e) - (e_{zz} - e)(e_{xx} - e) + \\ &+ \frac{1}{4} (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2) \end{aligned}$$

и, следовательно, дифференцируя по  $\lambda$ , получим

$$\frac{3}{2} e_i \frac{\partial e_i}{\partial\lambda} = -(e_{xx} - e)(\varepsilon_{yy} - \varepsilon) - (\varepsilon_{xx} - \varepsilon)(e_{yy} - e) - \dots + \frac{1}{2} (\varepsilon_{xy} e_{xy} + \dots)$$



или, внося из (3.5) значения деформаций  $e_{xx} - \varepsilon$  и т. д., имеем

$$\frac{3}{2} e_i \frac{\partial e_i}{\partial \lambda} = \frac{2e_i}{\partial e_i / \partial \lambda} \left[ -(\varepsilon_{xx} - \varepsilon)(\varepsilon_{yy} - \varepsilon) - \dots + \frac{1}{4}(\varepsilon_{xy}^2 + \dots) \right] \quad (3.6)$$

Но выражение, стоящее в квадратной скобке, согласно (1.9) равно  $\frac{3}{4} \varepsilon_i^2$ , и потому имеем

$$\frac{\partial e_i}{\partial \lambda} = \varepsilon_i \quad (3.7)$$

причем нет надобности ставить знак  $\pm$ , так как вследствие активности процесса пластической деформации  $\partial e_i / \partial \lambda \geq 0$ .

Полученный результат является решающим: не только скорости деформаций равны производным по  $\lambda$  от самих деформаций, но из условия (2.8) вытекает также, что и интенсивность скоростей деформаций равна производной от интенсивности деформаций, хотя каждая из них является иррациональной функцией своих аргументов.

Теперь имеем



Фиг. 2.

Из (1.11) получаем

$$\frac{e_{xx} - e}{e_i} = \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon}{\varepsilon_i} = \frac{3}{2} P_{11}, \dots \quad (3.8)$$

$$\frac{D_e}{e_i} = \frac{D_e}{\varepsilon_i}$$

$$\varepsilon_i = \int_0^{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \lambda} d\lambda = e_i \quad (3.9)$$

и, следовательно, закон малых упруго-пластических деформаций (1.21) можем переписать в виде

$$X_x - \sigma = \frac{2\sigma_i(\varepsilon_i)}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon), \dots, X_y = \frac{\sigma_i(\varepsilon_i)}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{xy}, \dots \quad (3.10)$$

что совпадает с (1.18), т. е. с законом пластического течения теории Сен-Венана-Леви-Мизеса.

Отсюда вытекает и другое, существенное для теории малых деформаций следствие: при тех условиях, при которых эта теория верна ( $\partial \Pi / \partial \lambda = 0$ ), за естественное состояние тела, т. е. за начало отсчета деформаций и интенсивности деформаций, можно брать любое промежуточное нулевое состояние, т. е., например, точку  $O'$  (фиг. 2).

Пусть деформации, отсчитываемые от нулевого состояния  $O'$ , будут  $e_{1x1}, \dots, e_{xy1}, \dots$  и интенсивность остаточных деформаций в нулевом состоянии будет  $e_{i0}$ ; тогда формулы (1.21) можно преобразовать к виду

$$X_x - \sigma = \frac{2\Phi_1(e_{i0}, e_{i1})}{3e_{i1}} (e_{xx1} - e_1), \dots, X_y = \frac{\Phi_1(e_{i0}, e_{i1})}{3e_{i1}} e_{xy1}, \dots \quad (3.11)$$

причем новая характеристика материала  $\Phi_1$  определяется через известную  $\Phi$



уравнением

$$\Phi_1(e_{i0}, e_{i1}) = \Phi(e_{i0} + e_{i1}) \quad (3.12)$$

Несложное доказательство указанного следствия вполне аналогично изложенному выше доказательству основной теоремы, и потому мы его опускаем.

**4. При условии независимости тензора  $\Pi$  от  $\lambda$  теория малых пластических деформаций является единственным следствием теории течения. Доказательство идет в обратном порядке.**

Числители и знаменатели дробей

$$\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon}{\varepsilon_i} = \frac{3}{2} p_{11}, \dots$$

$$\frac{D\varepsilon}{\varepsilon_i} = \frac{3}{2} \Pi$$

вытекающих из (1.18) при условии  $\partial \Pi / \partial \lambda = 0$ , могут быть проинтегрированы по  $\lambda$  без изменения их величин, после чего получим

$$\frac{e_{xx} - e}{\varepsilon_i} = \frac{3}{2} p_{11}, \dots$$

$$\frac{D_e}{\varepsilon_i} = \frac{3}{2} \Pi \quad (4.1)$$

Из формулы (3.6), которая вытекает из определения величины  $e_i$ , следует теперь соотношение

$$\varepsilon_i = \frac{\partial_i}{e_i} \frac{\partial e_i}{\partial \lambda}$$

которое на основании (1.11) приводит к интегральному уравнению

$$\varepsilon_i = \int_0^\lambda \frac{\partial_i}{e_i} \frac{\partial e_i}{\partial \lambda} d\lambda \quad (4.2)$$

имеющему, учитывая определение (1.9), единственное решение

$$\varepsilon_i = e_i$$

После этого формулы (1.18) легко преобразуются к виду (1.21), что и доказывает теорему.

Теория Сен Вена-Леви-Мизеса сама по себе подвергалась значительно меньше экспериментальной проверке, чем теория малых деформаций. Доказанные выше теоремы позволяют утверждать теперь обратное, т. е. что совокупность опытных фактов, подтверждающих ее, больше, так как все факты, устанавливающие теорию малых пластических деформаций, подтверждают и теорию течения, а условие

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0 \quad \left( \frac{\partial p_{m,n}}{\partial \lambda} = 0 \right)$$



для нее не является необходимым, во всяком случае для материалов с изотропным упрочнением и, в частности, для идеально пластических ( $\sigma_i = \text{const}$ ).

Вопрос о том, как должна быть усовершенствована теория пластичности, чтобы она охватывала эффект Баушингера и некоторые другие, остается пока открытым; он безусловно заслуживает внимания механиков и физиков. Можно предвидеть, что при построении более совершенной теории тензор подобия  $\Pi$  должен играть весьма существенную роль.

Поступила в редакцию  
16 II 1945

Институт механики  
Академии Наук СССР

**A. A. ILYUSHIN.—RELATION BETWEEN THE THEORY OF ST. VENANT-LEVY-MISES AND THE THEORY OF SMALL ELASTICO-PLASTIC DEFORMATIONS**

The author proves that the validity of the generalized theory of small elasto-plastic deformations provides the general condition

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0$$

where  $\Pi$  is a so-called tensor of similitude determined by formula (2.1) and  $\lambda$  is a value independent of  $x, y, z$ , but characterizing the sequence of the different stressed states of the body.

From this two statements arise: 1) The theory of the small elasto-plastic deformations is a particular case of the St. Venant-Lévy-Mises theory of flow; and 2) For the condition  $\partial \Pi / \partial \lambda = 0$  the Hencky-Mises theory of small deformations follows from the theory of flow.

Moreover, the above-mentioned condition leads to new expressions for the laws of the theory of small plastic deformations, since every intermediate stressed state after unloading may be taken as an initial state.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Элементы математической теории пластичности. 1944.
2. Ильюшин А. А. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII.
3. Ros M. u. Eichinger A. Proc. of the 2d Intern. Congress of Appl. Mech. Zürich. 1926.
4. Nadai A. and Lode W. Proc. of the 2d Intern. Congress of Appl. Mech. Zürich. 1926.
5. Lessels J. M. and MacGregor C. W. Certain Phases of the Combined Stress Problem. Proc. of the 5th Intern. Congress of Appl. Mech. Cambridge. Mass. U. S of A. 1939.