Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛЫХ ТЕЛ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

А. И. Некрасов

(Москва)

В первой части этой работы рассматривается движение тяжелого тела наклонно к горизонту при постоянной плотности воздуха; появление этой части вызвано тем, что в ней дается этой старой и хорошо известной задаче новый способ математического решения. Во второй части рассматривается движение тяжелого тела по вертикали с большой высоты, когда приходится учитывать изменение плотности воздуха с высотой. Если пользоваться законом изменения плотности воздуха с высотой, принятым для стандартной атмосферы, то задача приводится к квадратурам, которые могут быть взяты лишь приближенно. Желание избежать приближенных квадратур, которые являются мало пригодными для теоретических исследований, побудило Е. В. Красноперова [1] для изменения плотности воздуха с высотой использовать некоторую приближенную формулу, при которой квадратуры делаются выполнимыми. В настоящей работе показано, что при введении новой специальной трансцендентной функции вектор скорости тела может быть получен в конечном виде без квадратур точно для стандартной атмосферы.

Будем предполагать движения тела только поступательным, без вращения вокруг его центра тяжести, со скоростью, не превышающей предела, при котором квадратичный закон сопротивления практически перестает иметь место.

Отнесем движение центра тяжести тела к прямоугольной системе осей координат xOy, где ось y направлена вертикально вниз, а ось x — горизонтально. Так как теория может быть применена как к случаю движения тяжелого тела в воздухе, так и к случаю движения тела, обладающего запасом пловучести, в воде, то мы обозначим проекцию на ось y постоянной силы, действующей на тело, через mq, где для силы тяжести $q=+g$, а в случае запаса пловучести $q=-p$, так что количество mp равно разности между архимедовой силой и весом тела.

Пусть γ — весовая плотность среды. Если $\mathbf{v}$ есть вектор скорости центра тяжести тела, а θ есть угол, образуемый вектором $\mathbf{v}$ с осью x, то естественные уравнения движения центра тяжести тела будут

$$\frac{dv}{dt}=q\sin\theta-\frac{c\gamma S}{P}v^2, \qquad v^2\frac{d\theta}{ds}=q\cos\theta$$

где c есть аэродинамический коэффициент сопротивления тела, S — площадь миделя тела, P — вес тела, ds — элемент траектории центра тяжести тела.

Отсюда мы получим

$$\frac{d(v^2)}{ds} = 2q \sin\theta - \frac{2c\gamma S}{P} v^2, \qquad v^2 \frac{d\theta}{ds} = q \cos\theta$$

Введем обозначения

$$a = \frac{c\gamma S}{P}, \qquad z = v^2, \qquad \eta = \sin\theta \tag{1}$$

тогда предыдущим уравнениям можно придать вид

$$z' = -2az + 2q\eta, \qquad z\eta' = q(1-\eta^2) \tag{2}$$

Взяв производную по s от второго уравнения, мы получим

$$z'\eta' + z\eta'' = -2q\eta\eta', \qquad z' = -2az + 2q\eta$$

Исключая из этих уравнений производную z' и удерживая второе уравнение из уравнений (2), получим

$$z(\eta'' - 2a\eta') = -4q\eta\eta', \qquad z\eta' = q(1-\eta^2)$$

Разделив эти уравнения друг на друга, и интегрируя, найдем

$$\frac{\eta''}{\eta'} - 2a = -\frac{4\eta\eta'}{1-\eta^2}, \qquad \eta' = C(1-\eta^2)^2 e^{2as}$$

Чтобы определить произвольное постоянное C, положим, что при $s=0$ будет $v = v_0$ и $\theta = \theta_0$. Тогда, принимая во внимание, что

$$\eta' = q\frac{1-\eta^2}{z} = q\frac{\cos^2\theta}{v^2}, \qquad \text{мы найдем} \qquad C = \frac{q}{v_0^2\cos^2\theta_0}$$

Таким образом предыдущему интегралу можно придать вид

$$\eta' = \frac{q}{v_0^2\cos^2\theta_0}(1-\eta^2)^2 e^{2as} \tag{3}$$

Из второго из уравнений (2) мы получаем $z = q(1-\eta^2)/\eta'$, т. е.

$$v = v_0 \cos\theta_0 \frac{e^{-as}}{\sqrt{1-\eta^2}} = v_0\cos\theta_0 \frac{e^{-as}}{\cos\theta} \tag{4}$$

Из уравнения (3) мы будем иметь

$$\frac{d\eta}{(1-\eta^2)^2} - \frac{q}{v_0^2\cos^2\theta_0} e^{2as} ds = 0$$

интегрируя, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\eta}{1-\eta^2} + \frac{1}{4}\log\frac{1+\eta}{1-\eta} - \frac{q}{2av_0^2\cos^2\theta_0} e^{2as} + C_1 = 0$$

или, полагая, что при $s=0$ будет $\eta = \eta_0$,

$$\frac{2\eta}{1-\eta^2} + \log\frac{1+\eta}{1-\eta} - \frac{2q}{av_0^2\cos^2\theta_0} e^{2as} = \frac{2\eta_0}{1-\eta_0^2} + \log\frac{1+\eta_0}{1-\eta_0} - \frac{2q}{av_0^2\cos^2\theta_0}$$

Положим

$$\eta = \sin\theta = \operatorname{th}\frac{w}{2}, \qquad \frac{2q}{av_0^2\cos^2\theta_0} = \lambda \tag{5}$$

Тогда

$$w + \operatorname{sh} w - \lambda e^{2as} = w_0 + \operatorname{sh} w_0 - \lambda$$

Положим еще

$$\lambda(e^{2as} - 1) + w_0 + \operatorname{sh} w_0 = N \tag{6}$$

Таким образом мы получим основное уравнение рассматриваемой задачи

$$w + \operatorname{sh} w = N \tag{7}$$

где N есть возрастающая функция от s.

Рассмотрим уравнение Кеплера для движения планет

$$u - e\sin u = \zeta$$

где u есть эксцентрическая аномалия, ζ — средняя аномалия и e — эксцентриситет планетной орбиты. Полагая в уравнении Кеплера

$$u = iw, \qquad \zeta = iN, \qquad e = -1$$

мы и приведем его к уравнению (7). Отсюда вытекает возможность перенести ряд свойств уравнения Кеплера, в частности, способов его решения, на уравнение (7). Так как

$$\sin\theta = \operatorname{th}\frac{w}{2}, \qquad \cos\theta = \operatorname{ch}^{-1}\frac{w}{2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{sh}\frac{w}{2} \tag{8}$$

то

$$x = \int_0^s \cos\theta\, ds = \int_0^s \frac{ds}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}w}, \quad y = \int_0^s \sin\theta\, ds = \int_0^s \operatorname{th}\frac{w}{2}\, ds,$$

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v} = \frac{1}{v_0\cos\theta_0}\int_0^s \frac{e^{as}\, ds}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}w} \tag{9}$$

Чтобы разыскать экстремум скорости v, возьмем производную по s от выражения (4). Приравнивая эту производную нулю и обращая внимание на формулу (3), найдем

$$\eta(1-\eta^2)\, e^{2as} - \frac{av_0^2\cos^2\theta_0}{q} = 0$$

Для тела, обладающего запасом пловучести, это уравнение примет вид

$$\eta(1-\eta^2)\, e^{2as} + \frac{av_0^2\cos^2\theta_0}{p} = 0$$

Отсюда следует, что это уравнение может иметь место только в том случае, если $\eta < 0$, т. е. в восходящей части подводной траектории тела. Случай наибольшей глубины погружения тела получается при $w = 0$, т. е. когда касательная к траектории центра тяжести тела будет горизонтальна; принимая, что для наибольшей глубины погружения $s = s_1$, мы из уравнения (7) получим $N = 0$, т. е.

$$\lambda e^{2as_1} = \lambda - w_0 - \operatorname{sh} w_0$$

Мы здесь не рассматриваем вопроса об ударе тела о поверхность воды и о самом проникновении тела под поверхность воды.

Переходя к рассмотрению второй задачи, возьмем начало координат O у поверхности земли и направим ось z вертикалью вверх. Обозначая через v скорость центра тяжести тела, через S — площадь миделя тела, через c — аэродинамический коэффициент сопротивления тела, через P — вес тела и через ρ — плотность воздуха, имеем

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = -P + \frac{1}{2}c\rho S v^2, \qquad \text{или} \qquad \frac{d(v^2)}{dz} = -2g + 2g\frac{c\rho S}{2P}v^2$$

Обозначим через ρ_0 плотность воздуха у поверхности земли и предположим, что плотность ρ воздуха на высоте z равна

$$\rho = \rho_0 f(z) \tag{10}$$

Тогда мы будем иметь

$$\frac{d(v^2)}{dz} = -2g + 2g\lambda_1 f(z) v^2, \qquad \text{где} \qquad \lambda_1 = \frac{c\rho_0 S}{2P} \tag{11}$$

Из формулы (11) следует, что в этом случае не существует постоянной критической или предельной скорости тела; тем не менее можно разыскивать такие значения переменного z, при которых производная $d(v^2)/dz$ обращается в нуль. Эти значения переменного z соответствуют экстремальным значениям для количества v^2; докажем, что экстремум для v^2 есть максимум. В самом деле, из формулы (11) находим

$$\frac{d^2(v^2)}{dz} = 2g\lambda_1 f'(z_m) v_m^2$$

где z_m и v_m соответствуют экстремальному значению.

Так как плотность ρ воздуха с высотой убывает, то $f'(z_m)$ есть существенно отрицательное количество, и значение v^2 есть действительно максимум.

Предполагая, что тело начинает падение с высоты H при начальной скорости v_0, введем фиктивную высоту h, которую назовем присоединенной высотой, по формуле

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \tag{12}$$

Для стандартной атмосферы функцию $f(z)$ принимают в виде

$$f(z) = (1 - \beta z)^n \qquad \left(\beta = \frac{1}{44\,300} = 0.000022574, \ n = 4.256\right) \tag{13}$$

Введем новые переменные η и y по формулам

$$v^2 = 2g(H+h)\eta, \qquad z = (H+h)(1-y), \qquad y = 1 - \frac{z}{H+h} \tag{14}$$

Уравнение (11) в этих переменных примет вид

$$\frac{d\eta}{dy} = 1 - \lambda(1+ky)^n \eta \tag{15}$$

где

$$\lambda = 2g(H+h)[1 - \beta(H+h)]^n \lambda_1, \qquad k = \frac{\beta(H+h)}{1 - \beta(H+h)} \tag{16}$$

Чтобы проинтегрировать в конечном виде уравнение (15), введем функцию $E(Z)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$(n+1) Z \frac{dE}{dZ} = Z - (1-Z) E \tag{17}$$

Разыскивая интеграл этого уравнения в виде $E(Z) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p Z^p$, получим рекуррентную формулу

$$a_p = \frac{a_{p-1}}{np+p+1} \qquad \left(a_1 = \frac{1}{n+2}\right)$$

Таким образом

$$E(Z)=\frac{Z}{n+2}+\frac{Z^2}{(n+2)(2n+3)}+\frac{Z^3}{(n+2)(2n+3)(3n+4)}+\ldots \tag{18}$$

Мы видим, что при $n \geqslant 0$ функция $E(Z)$ есть целая функция от Z. Введем функцию $f_1(Z)$ по формуле $f_1(Z)=-E(-Z)$, т. е.

$$f_1(Z)=\frac{Z}{n+2}-\frac{Z^2}{(n+2)(2n+3)}+\frac{Z^3}{(n+2)(2n+3)(3n+4)}-\ldots \tag{19}$$

Введем еще функцию $f_2(Z)$ по формуле

$$f_2(Z)=1-\exp\frac{-Z}{n+1} \tag{20}$$

Обе функции $f_1(Z)$ и $f_2(Z)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$(n+1)Z\frac{df_1}{dZ}=Z-(1+Z)f_1, \qquad (n+1)\frac{df_2}{dZ}=1-f_2 \tag{21}$$

Положим

$$Z=\frac{\lambda}{k}(1+ky)^{n+1} \tag{22}$$

Переходя от переменного y к переменному z, будем иметь

$$Z=2g\frac{\lambda_1}{\beta}(1-\beta z)^{n+1} \tag{23}$$

Важно заметить, что переменное Z не зависит от h и H, т. е. от начальных условий падения тела, и через количество λ_1 зависит от аэродинамики тела; у поверхности земли количество Z имеет наибольшее значение $Z_0=2g\lambda_1/\beta$. Покажем, что уравнение (15) имеет частный интеграл вида

$$\eta=y-\frac{1+ky}{k}f_1(Z)+\frac{1}{k}f_2(Z) \tag{24}$$

В самом деле, дифференцируя равенство (24) по y и пользуясь выражением dZ/dy из формулы (22), найдем

$$\frac{d\eta}{dy}=1-f_1(Z)-(n+1)\frac{\lambda(1+ky)^{n+1}}{k}f_1'(Z)+(n+1)\frac{\lambda(1+ky)^n}{k}f_2'(Z)$$

Выполняя подстановки по формулам (21), после приведений будем иметь

$$\frac{d\eta}{dy}=1+Zf_1(Z)-\frac{\lambda(1+yk)^n}{k}f_2(Z)-\lambda(1+ky)^n y$$

Нетрудно проверить, что подстановка этого выражения в левую часть уравнения (15) и выражения (24) в правую часть того же уравнения приводит к тождеству, т. е. выражение (24) есть действительно частный интеграл уравнения (15). Легко видеть, что общий интеграл уравнения (15) будет

$$\eta=y[1-f_1(Z)]+\frac{1}{k}[f_2(Z)-f_1(Z)]+C\exp\frac{-Z}{n+1} \tag{25}$$

Предположим, что тело начинает падение с высоты $z=H$, имея начальную скорость v_0. Обозначим соответствующие значения переменных η, y и Z через η_0, y_H и Z_H. При этих начальных условиях, как легко видеть из формул (14) и из уравнения (25), произвольная постоянная

$$C=\frac{\beta h f_2(Z_H)-(1-\beta H)\left[f_2(Z_H)-f_1(Z_H)\right]}{\beta(H+h)}\exp\frac{Z_H}{n+1}=N_H\exp\frac{Z_H}{n+1} \tag{26}$$

Здесь обозначение N_H вводится для удобства записи в дальнейшем.

Таким образом общий интеграл уравнения (15), удовлетворяющий начальным условиям, будет иметь вид

$$\eta=y\left[1-f_1(Z)\right]+\frac{1}{k}\left[f_2(Z)-f_1(Z)\right]+N_H\left[1-f_2(Z-Z_H)\right] \tag{27}$$

Можно показать, что все выражения, стоящие в квадратных скобках суть положительные количества.

Переходя к изучению свойств функций $f_2(Z)$ и $f_1(Z)$, заметим, что функция $f_2(Z)$ есть хорошо известная показательная функция. В промежутке от $Z=0$ до $Z=+\infty$ функция $f_2(Z)$ монотонно возрастает от 0 до $+1$, причем возрастание идет сначала быстро, а потом очень медленно; следовательно, третья квадратная скобка формулы (27) всегда положительна. Не так просто обстоит дело с функцией $f_1(Z)$, которая является новой трансцендентной функцией. Из первого дифференциального уравнения (11) следует, что

$$f_1(Z)=\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\sqrt[n+1]{Z}}\exp\frac{-Z}{n+1}\int_0^Z\sqrt[n+1]{x}\exp\frac{x}{n+1}\,dx$$

Полагая $x=Z\tau_1$, будем иметь

$$f_1(Z)=\frac{Z}{n+1}\exp\frac{-Z}{n+1}\int_0^1\sqrt[n+1]{\tau_1}\exp\frac{Z\tau_1}{n+1}\,d\tau_1$$

Вводя для удобства обозначение и новую переменную по формулам

$$\alpha=\frac{Z}{n+1},\qquad \tau_1=1-\tau \tag{28}$$

мы можем предыдущей формуле придать вид

$$f_1(Z)=\alpha e^{-\alpha}\int_0^1\sqrt[n+1]{\tau_1}\,e^{\alpha\tau_1}\,d\tau_1=\alpha\int_0^1\sqrt[n+1]{1-\tau}\,e^{-\alpha\tau}\,d\tau \tag{29}$$

Так как $1-\tau<\sqrt[n+1]{1-\tau}<1$ в промежутке от 0 до $+1$, то

$$\alpha\int_0^1(1-\tau)\,e^{-\alpha\tau}\,d\tau=1-\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}<f_1(Z)<\alpha\int_0^1 e^{-\alpha\tau}\,d\tau=1-e^{-\alpha} \tag{30}$$

Из неравенства (30) следует, что при $Z=0$, т. е. при $\alpha=0$, будет $f_1(Z)=0$, а при $Z=+\infty$ будет $f_1(Z)=+1$; всегда должно быть $f_1(Z)<1$ и $f_1(Z)<f_2(Z)$, так как $f_2(Z)=1-e^{-\alpha}$. Из последних неравенств следует, что две первые квадратные скобки формулы (27) будут всегда положительны. Разлагая в формуле (29) количество $e^{-\alpha\tau_1}$ в ряд, выполняя интегрирование и возвращаясь к переменному Z, будем иметь новое разложение для функции $f_1(Z)$ в виде

$$f_1(Z)=Z\varphi(Z)\exp\frac{-Z}{n+1} \tag{31}$$

где

$$\varphi(Z) = \frac{1}{n+2} + \frac{Z}{(2n+3)(n+1)} + \frac{Z^2}{2!\,(3n+4)(n+1)^2} + \frac{Z^3}{3!\,(4n+5)(n+1)^3} + \ldots \quad (32)$$

Хотя ряд для $\varphi(Z)$ и знакоположительный, но вычислять его весьма удобно, так как его члены убывают быстрее, чем члены ряда (19).

Перейдем после этого к решению задачи об определении времени падения тела. Согласно первой из формул (14), имеем

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{\eta}\sqrt{2g(H+h)}.$$

Так как $Z = Z_0(1-\beta z)^{n+1}$, то

$$-\beta\frac{dz}{dt} = \frac{1}{n+1} Z_0^{-\frac{1}{n+1}} Z^{-\frac{n}{n+1}} \frac{dz}{dt}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{n+1} Z_0^{-\frac{1}{n+1}} \frac{dz}{dt} = \beta\sqrt{\eta}\sqrt{2g(H+h)}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{k\eta}} Z^{-\frac{n}{n+1}} \frac{dz}{dt} = (n+1)\beta\sqrt{\frac{2g(H+h)}{k}}\, Z_0^{-\frac{1}{n+1}} \quad (33)$$

Из формулы (27) находим

$$k\eta = ky[1-f_1(Z)] + [f_2(Z) - f_1(Z)] + kN_H \exp\frac{Z_H}{n+1} \exp\frac{-Z}{n+1}$$

или

$$k\eta = (1+ky)[1-f_1(Z)] - \left(1 - kN_H \exp\frac{Z_H}{n+1}\right)[1-f_2(Z)] \quad (34)$$

Поэтому, определяя из формулы (22) значение $1+ky$, подставляя это выражение в (33) и вынося первый член разности в виде множителя, находим

$$k\eta = \left(\frac{k}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n+1}} Z^{\frac{1}{n+1}} [1-f_1(Z)]\,[1-a\Phi_2(Z)]$$

Здесь введено обозначение

$$\left(1 - kN_H \exp\frac{Z_H}{n+1}\right)\left(\frac{k}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{n+1}} = a, \qquad Z^{-\frac{1}{n+1}} \frac{1-f_2(Z)}{1-f_1(Z)} = \Phi_2(Z) \quad (35)$$

Вставляя это выражение в дифференциальное уравнение (33), будем иметь

$$\frac{Z^{-\frac{2n+1}{2n+1}}}{\sqrt{1-f_1(Z)}\,\sqrt{1-a\Phi_2(Z)}} \frac{dZ}{dt} = (n+1)\beta\left(\frac{k}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2n+2}} \sqrt{\frac{2g(H+h)}{k}}\, Z_0^{\frac{1}{n+1}}$$

Но из формул (16) находим

$$\left(\frac{k}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2n+2}} = Z_0^{-\frac{1}{2n+2}} \frac{1}{\sqrt{1-\beta(H+h)}}, \qquad \sqrt{\frac{2g(H+h)}{k}} = \sqrt{\frac{2g[1-\beta(H+h)]}{\beta}} \quad (36)$$

Таблицы специальных функций $f_2(Z)$ и $f_1(Z)$

Z	$f_2(Z)$	$f_1(Z)$	Z	$f_2(Z)$	$f_1(Z)$	Z	$f_2(Z)$	$f_1(Z)$
0.00	0.00000	0.00000	0.50	0.09074	0.07655	1.00	0.17326	0.14675
0.01	0.00190	0.00160	0.51	0.09247	0.07802	1.01	0.17482	0.14809
0.02	0.00380	0.00319	0.52	0.09420	0.07948	1.02	0.17640	0.14944
0.03	0.00570	0.00478	0.53	0.09592	0.08094	1.03	0.17796	0.15077
0.04	0.00760	0.00637	0.54	0.09764	0.08239	1.04	0.17952	0.15211
0.05	0.00946	0.00796	0.55	0.09936	0.08384	1.05	0.18108	0.15344
0.06	0.01135	0.00954	0.56	0.10106	0.08530	1.06	0.18264	0.15477
0.07	0.01322	0.01112	0.57	0.10278	0.08675	1.07	0.18418	0.15610
0.08	0.01510	0.01270	0.58	0.10447	0.08820	1.08	0.18574	0.15743
0.09	0.01698	0.01427	0.59	0.10618	0.08963	1.09	0.18730	0.15875
0.10	0.01884	0.01585	0.60	0.10788	0.09108	1.10	0.18883	0.16007
0.11	0.02072	0.01741	0.61	0.10957	0.09252	1.11	0.19038	0.16140
0.12	0.02258	0.01898	0.62	0.11127	0.09395	1.12	0.19192	0.16271
0.13	0.02442	0.02055	0.63	0.11296	0.09539	1.13	0.19345	0.16186
0.14	0.02630	0.02211	0.64	0.11464	0.09682	1.14	0.19500	0.16534
0.15	0.02812	0.02367	0.65	0.11632	0.09825	1.15	0.19652	0.16665
0.16	0.02998	0.02522	0.66	0.11800	0.09968	1.16	0.19804	0.16796
0.17	0.03184	0.02678	0.67	0.11968	0.10109	1.17	0.19958	0.16926
0.18	0.03365	0.02833	0.68	0.12136	0.10252	1.18	0.20108	0.17058
0.19	0.03548	0.02989	0.69	0.12302	0.10393	1.19	0.20262	0.17187
0.20	0.03735	0.03142	0.70	0.12470	0.10536	1.20	0.20412	0.17317
0.21	0.03915	0.03296	0.71	0.12636	0.10678	1.21	0.20563	0.17448
0.22	0.04097	0.03450	0.72	0.12802	0.10819	1.22	0.20715	0.17576
0.23	0.04282	0.03602	0.73	0.12968	0.10960	1.23	0.20867	0.17705
0.24	0.04464	0.03758	0.74	0.13132	0.11101	1.24	0.21016	0.17835
0.25	0.04646	0.03911	0.75	0.13298	0.11241	1.25	0.21167	0.17963
0.26	0.04826	0.04064	0.76	0.13464	0.11381	1.26	0.21315	0.18092
0.27	0.05007	0.04216	0.77	0.13626	0.11522	1.27	0.21466	0.18220
0.28	0.05188	0.04369	0.78	0.13792	0.11661	1.28	0.21614	0.18349
0.29	0.05367	0.04521	0.79	0.13956	0.11801	1.29	0.21763	0.18477
0.30	0.05548	0.04673	0.80	0.14118	0.11938	1.30	0.21913	0.18604
0.31	0.05728	0.04820	0.81	0.14282	0.12079	1.31	0.22060	0.18733
0,32	0.05906	0.04976	0.82	0.14446	0.12217	1.32	0.22208	0.18859
0.33	0.06086	0.05127	0.83	0.14608	0.12356	1.33	0.22356	0.18986
0.34	0.06262	0.05277	0.84	0.14770	0.12495	1.34	0.22504	0.19113
0.35	0.06442	0.05428	0.85	0.14934	0.12633	1.35	0.22652	0.19239
0.36	0.06620	0.05578	0.86	0.15094	0.12771	1.36	0.22800	0.19366
0.37	0.06797	0.05728	0.87	0.15256	0.12908	1.37	0.22945	0.19493
0.38	0.06975	0.05878	0.88	0.15416	0.13045	1.38	0.23092	0.19619
0.39	0.07155	0.06027	0.89	0.15578	0.13183	1.39	0.23237	0.19744
0.40	0.07328	0.06177	0.90	0.15738	0.13319	1.40	0.23384	0.19872
0.41	0.07504	0.06326	0.91	0.15898	0.13456	1.41	0.23530	0.19995
0.42	0.07680	0.06475	0.92	0.16058	0.13593	1.42	0.23675	0.20120
0.43	0.07856	0.06623	0.93	0.16216	0.13729	1.43	0.23820	0.20245
0.44	0.08032	0.06771	0.94	0.16376	0.13865	1.44	0.23963	0.20370
0.45	0.08205	0.06919	0.95	0.16536	0.14001	1.45	0.24108	0.20494
0.46	0.08380	0.07067	0.96	0.16694	0.14136	1.46	0.24254	0.20618
0.47	0.08555	0.07214	0.97	0.16852	0.14271	1.47	0.24397	0.20742
0.48	0.08728	0.07361	0.98	0.17012	0.14406	1.48	0.24542	0.20866
0.49	0.08902	0.07508	0.99	0.17168	0.14541	1.49	0.24685	0.20989

Продолжение

Z	$f_2(Z)$	$f_1(Z)$	Z	$f_2(Z)$	$f_1(Z)$	Z	$f_2(Z)$	$f_1(Z)$
1.50	0.24827	0.21114	5.00	0.61375	0.53582	15.00	0.94238	0.86970
1.60	0.26260	0.22332	5.20	0.62818	0.54919	15.50	0.94761	0.87630
1.70	0.27634	0.23539	5.40	0.64206	0.56210	16.00	0.95237	0.88245
1.80	0.28999	0.24719	5.60	0.65543	0.57457	16.50	0.95669	0.88814
1.90	0.30336	0.25877	5.80	0.66829	0.58666	17.00	0.96061	0.89446
2.00	0.31650	0.27021	6.00	0.68068	0.58889	17.50	0.96419	0.89840
2.10	0.32937	0.27499	6.20	0.69260	0.60950	18.00	0.96744	0.90310
2.20	0.34202	0.29247	6.40	0.70408	0.62053	18.50	0.97039	0.90698
2.30	0.35442	0.29639	6.60	0.71512	0.63129	19.00	0.97302	0.91146
2.40	0.36659	0.31395	6.80	0.72577	0.64131	19.50	0.97552	0.91520
2.50	0.37852	0.32442	7.00	0.73600	0.65123	20.00	0.97775	0.91854
2.60	0.21108	0.33465	7.20	0.74586	0.66076	21.00	0.98161	0.92490
2.70	0.40172	0.34487	7.40	0.75534	0.67000	22.00	0.98479	0.93038
2.80	0.41300	0.35479	7.60	0.76448	0.67903	23.00	0.98753	0.93526
2.90	0.42406	0.36457	7.80	0.77327	0.68768	24.00	0.98961	0.93958
3.00	0.43492	0.37420	8.00	0.78174	0.69610	25.00	0.99140	0.94345
3.10	0.44556	0.38362	8.20	0.78989	0.70570	26.00	0.99289	0.94688
3.20	0.45602	0.39295	8.40	0.79774	0.71207	27.00	0.99412	0.94995
3.30	0.46627	0.40206	8.60	0.80529	0.71962	28.00	0.99514	0.95254
3.40	0.47631	0.41105	8.80	0.80256	0.72700	29.00	0.99598	0.95500
3.50	0.48619	0.41988	9.00	0.80955	0.73403	30.00	0.99668	0.95724
3.60	0.49588	0.42856	9.20	0.82629	0.74173	31.00	0.99726	0.95908
3.70	0.50537	0.43709	9.40	0.83278	0.74767	32.00	0.99773	0.96095
3.80	0.51469	0.44545	9.60	0.83902	0.75410	33.00	0.99812	0.96253
3.90	0.52383	0.45372	9.80	0.84504	0.76035	34.00	0.99845	0.96403
4.00	0.53281	0.46184	10.00	0.85082	0.76638	35.00	0.99872	0.96548
4.10	0.53340	0.47823	10.50	0.86436	0.78066	36.00	0.99894	0.96674
4.20	0.55026	0.47767	11.00	0.87666	0.79382	37.00	0.99912	0.96798
4.30	0.55873	0.48537	11.50	0.88786	0.80627	38.00	0.99927	0.96860
4.40	0.56706	0.49293	12.00	0.89803	0.81750	40.00	0.99950	0.97080
4.50	0.57520	0.50041	12.50	0.90730	0.82338	42.00	0.99966	0.97266
4.60	0.58322	0.50572	13.00	0.91571	0.83764	44.00	0.99977	0.97398
4.70	0.59107	0.51493	13.50	0.92335	0.84656	46.00	0.99984	0.97555
4.80	0.59878	0.52200	14.00	0.93031	0.85522	48.00	0.99989	0.97658
4.90	0.60635	0.52898	14.50	0.93663	0.86260	50.00	0.99993	0.97782

Поэтому, полагая

$$\Phi_1(Z) = Z^{\frac{2n+1}{2n+2}} \sqrt{1 - f_1(Z)} \tag{37}$$

приходим к выражению

$$\frac{1}{\Phi_1(Z)\sqrt{1 - a\Phi_2(Z)}} \frac{dZ}{dt} = (n+1)\sqrt{2g\beta}\, Z_0^{\frac{1}{2n+2}}$$

Заменяя в выражении (35) для постоянного количества a радикал из k/λ его значением по формуле (36), будем иметь

$$a = \left(1 - kN_H \exp\frac{Z_H}{n+1}\right) Z_0^{\frac{1}{n+1}} \left[1 - \beta(H+h)\right] \tag{38}$$

Таким образом для времени падения тела с условной высоты Z_H на условную высоту Z находим

$$t = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2g\beta}} Z_0^{-\frac{1}{2n+2}} \int\limits_{Z_H}^{Z} \frac{dZ}{\Phi_1(Z)\sqrt{1-a\Phi_2(Z)}} \tag{39}$$

Для времени падения тела на землю $t = T$ в этой формуле верхний предел у интеграла будет $Z = Z_0$. Интегралы (39) уже приходится брать численно.

Таблицы значений функций $f_1(Z)$ и $f_2(Z)$, составленные И. К. Боровским, приведены на стр. 204 и 205. Функции $\Phi_2(Z)$ и $\Phi_1(Z)$ приходится вычислять по формулам (35) и (37).

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Тело весом в 4 кг падает с высоты 5000 м, имея начальную скорость, равную 241 м / сек.; определить скорость тела у самой поверхности земли, если дано, что $\log S = \bar{3}.58529$ и $c = 0.24$. Мы имеем $\log \lambda_1 = \bar{6}.92497$; отсюда найдем, что $Z_H = 3.8968$ и $Z_0 = 7.3126$, и будем иметь

$$f_2(Z_0) = 0.75123, \quad f_1(Z_0) = 0.66982, \quad f_2(Z_H) = 0.52355, \quad f_1(Z_H) = 0.44838$$

Что касается количества N_H, то оно будет равно $N_H = -0.17641$. Отсюда получим, что для $v_0 = 241$ м / сек. будет $\eta = 0.60972$, т. е. по формуле $v^2 = 2g(H+h)\eta$ определим, что при наличии начальной скорости в 241 м / сек тело, пролетев в воздухе 5000 м, будет иметь у поверхности земли скорость, равную 308.6 м / сек. Заметим, однако, что в этой задаче значения скоростей настолько значительны, что они лежат на границе возможности применения квадратичного закона сопротивления воздуха.

Поступила в редакцию
25 февраля 1945

Институт механики
Академии Наук СССР

A. I. NEKRASOV.—MOTION OF HEAVY SOLIDS IN A MEDIUM IN ACCORDANCE WITH THE QUADRATIC LAW OF RESISTANCE

At the beginning of the paper the author submits a new mathematical solution for the well-known problem of the motion of a heavy solid on an incline, atmospheric pressure being constant.

The main section of the work treats of the motion of heavy bodies vertically from great heights. If the usual law of the distribution of density in accordance with the height of the atmosphere is accepted, the problem will be reduced to the quadratures, which can be calculated only approximately.

In this work, the author introduces a new transcendental function by means of which he derives the vector of velocity in a final form.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красноперов Е. В. Техника воздушного флота. 1935. № 1