Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

О НАИМЕНЬШЕМ ХАРАКТЕРИСТИЧНОМ ЧИСЛЕ

Н. Г. Четаев

(Москва)

В задаче о вычислении характеристичных чисел для линейных дифференциальных уравнений наибольшее практическое значение имеет вопрос о наименьшем характеристичном числе, как это следует из теоремы Ляпунова [1] и моей [2].

1. Пусть в уравнениях

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

коэффициенты p_{sn} являются ограниченными, непрерывными вещественными функциями для положительных значений t.

Теорема[1]. Если при неограниченном увеличении t коэффициенты p_{sr} стремятся к определенным пределам c_{sr}, то наинизшее характеристичное число уравнений (1) совпадает с наинизшим характеристичным числом предельной системы

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1} x_1 + \ldots + c_{sn} x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

Доказательство. Сделаем подстановку

$$z = x_s e^{\eta t} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где η — некоторая постоянная. Заданные уравнения (1) перейдут в систему

$$\frac{dz_s}{dt} = p_{s1} z_1 + \ldots + (p_{ss} + \eta) z_s + \ldots + p_{sn} z_n \tag{3}$$

а предельная система (2) в систему, предельную для уравнений (3):

$$\frac{dz_s}{dt} = c_{s1} z_1 + \ldots + (c_{ss} + \eta) z_s + \ldots + c_{sn} z_n \tag{4}$$

Корни характеристического уравнения системы (4)

$$\| c_{sr} - \delta_{sr} (\varkappa - \eta) \| = 0$$

обозначим через $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$.

Если не существует никаких целых неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$,

[1] Считаю долгом выразить благодарность В. В. Степанову за замечание, улучшившее формулировку теоремы.

равных в сумме 2, для которых уничтожалось бы выражение

$$m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n$$

то будет существовать [1] квадратичная форма W с постоянными коэффициентами, удовлетворяющая уравнению

$$\sum \frac{\partial W}{\partial z_s}\left[c_{s1}z_1 + \ldots + (c_{ss}+\eta)z_s + \ldots + c_{sn}z_n\right] = z_1^2 + \ldots + z_n^2$$

Форма W будет определенно отрицательной, если вещественные части всех корней $\varkappa_s$ отрицательны [1]; для некоторых значений переменных z_s она будет принимать положительные значения, если среди корней $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ существует хотя бы один корень с положительной вещественной частью. [1]

Полная производная по t от такой функции W в силу уравнений (3) будет

$$\frac{dW}{dt} = z_2^2 + \ldots + z_n^2 + \sum_{s,\, r}(p_{sr} - c_{sr})\frac{\partial W}{\partial z_s'} z_r$$

Так как W представляет квадратичную форму с постоянными коэффициентами, то найдется отличное от нуля число ε такое, что при выполнении неравенств

$$|p_{sr} - c_{sr}| < \varepsilon$$

правая часть последнего соотношения будет представлять определенно положительную квадратичную форму переменных z.

Но коэффициенты p_{sr} стремятся к пределу c_{sr} при неограниченном росте t. Поэтому для ε, сколь бы мало оно ни было, найдется такое T, что при $t \geqslant T$ абсолютные величины разностей $p_{sr} - c_{sr}$ будут меньше ε и, следовательно, для всех значений t, превосходящих T, производная dW/dt будет представлять определенно положительную функцию.

А это в силу общих теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости заставляет заключить, что если не существует неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$, равных в сумме 2, для которых уничтожалось бы выражение

$$m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n$$

и если наинизшее характеристичное число (равное взятой с обратным знаком наибольшей вещественной части корней $\varkappa_s$) системы (4) положительно, то невозмущенное движение системы (3) асимптотически устойчиво, а если наинизшее характеристичное число системы (4) отрицательно, то невозмущенное движение системы (3) неустойчиво.

Отсюда из вида примененной нами подстановки мы должны заключить, что наименьшие характеристичные числа совокупности функций $z_1, \ldots, z_n$, когда $x_1, \ldots, x_n$ понимаются за решения как заданных уравнений (1), так и ее предельной системы (2), могут равняться нулю лишь при одном определенном значении постоянной η.

А это и доказывает теорему.

Вопрос об устойчивости невозмущенного движения ($x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$) для уравнений (1) разрешается знаком наименьшего характеристического числа; это сохраняется, если заданные уравнения правильны и в них дополнительно существуют члены X_s, начинающиеся в своих разложениях по целым положительным степеням $x_1, \ldots, x_n$ с членов не ниже второго измерения. Эти обстоятельства делают приведенную теорему практически полезной, так как задача об устойчивости сводится при помощи нее к алгебраическому уравнению

$$f(\lambda) = \| c_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = (-1)^n (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n) = 0$$

Согласно теореме Гурвица [3] можно высказать, что необходимое и достаточное условие для положительности наименьшего характеристичного числа уравнений (1) с коэффициентами p_{sr}, стремящимися к определенным пределам c_{sr} при неограниченном росте t, состоит из неравенств

$$\Delta_j > 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

где Δ_j суть главные диагональные миноры матрицы

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

2. Для каждого значения независимой переменной t уравнение

$$\Delta(\lambda) = \| p_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = 0$$

имеет n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, изменяющихся с изменением времени t.

Если ни для какого положительного t не существует целых неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$, равных в сумме 2, для которых уничтожается выражение

$$m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$$

то для таких значений t будет существовать квадратичная форма

$$V = \sum_{s, r} a_{sr} x_s x_r \qquad (a_{sr} = a_{rs})$$

с ограниченными коэффициентами, зависящими от t, удовлетворяющая уравнению в частных производных первого порядка:

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_s} (p_{s1} x_2 + \ldots + p_{sn} x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

в котором t играет роль параметра.

Форма V будет отрицательна, если вещественные части всех корней λ_s отрицательны; для некоторых значений переменных x_s она будет принимать положительные значения, если среди корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ существует хотя бы один корень с положительной вещественной частью. Ее полная производная по времени в силу уравнений (1) есть

$$\frac{dV}{dt} = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Дискриминант квадратичной формы, стоящей в правой части последнего соотношения, есть

$$D = \| a_{sr}' + \delta_{sr} \|, \qquad \text{где} \quad a_{sr}' = \frac{da_{sr}}{dt}$$

Пусть для всех положительных значений t все главные диагональные миноры $D_1, \ldots, D_n$ дискриминанта D не меньше некоторого положительного числа; производная по известному критерию Сильвестра будет тогда определенно положительной квадратичной формой переменных $x_1, \ldots, x_n$. При этих условиях, если V представляет определенно отрицательную квадратичную форму, то невозмущенное движение устойчиво; если V еще и допускает бесконечно малый высший предел, то устойчивость невозмущенного движения будет асимптотической. Если же форма V допускает бесконечно малый высший предел и может принимать положительное значение, то невозмущенное движение неустойчиво.

Эти предложения, обобщая теорему предыдущего п. 1, могут быть полезны для некоторых прикладных задач об устойчивости движения.

Поступила в редакцию
25 II 1945

Институт механики
Академии Наук СССР

N. G. ČETAJEV.—THE SMALLEST CHARACTERISTIC NUMBER

In the equations

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \cdots + p_{sn} x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

let the coefficients p_{sn} be bounded continuous real functions of the value t for $t \geqslant 0$.

The author proves the theorem: If for t approaches infinity, the coefficients p_{sr} tend to the definite limits c_{sr}, then the smallest characteristic number of system (1) coincides with the smallest characteristic number of the limit system

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1} x_1 + \cdots + c_{sn} x_n \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения, п. 13.
2. Четаев Н. Г. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII.
3. Hurwitz A. Mathematische Annalen. 1895. Bd. 46.