Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

ЗАДАЧА О СОПРИКАСАНИИ ДВУХ УПРУГИХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ

С. Г. Михлин

(Ленинград)

1. Пусть даны две различные упругие среды, из которых одна заполняет верхнюю, а другая — нижнюю полуплоскость. Допустим, что эти полуплоскости соприкасаются вдоль полупрямых $x < -a$ и $x > a$, причем трение отсутствует. Далее, допустим, что на участке $-x < a < x$ расположена бесконечно узкая щель, разделяющая обе полуплоскости, и что к каждой из полуплоскостей приложены со стороны щели некоторые нормальные усилия.

Найдем напряжения в обеих полуплоскостях, допуская, что эти напряжения на бесконечности обращаются в нуль.

2. Обозначим через σ_x^1, τ_y^1, σ_y^1 напряжения, а через u_1 и v_1 смещения в верхней полуплоскости. Далее, через λ_1 и μ_1 обозначим постоянные Lamé для верхней полуплоскости. Наконец, следуя Н. И. Мусхелишвили, положим

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda_1 + 3\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$$

Величины, отнесенные на нижней полуплоскости, снабдим индексом 2.

Сформулируем краевые условия нашей задачи. Прежде всего вдоль всей оси x

$$\tau_{xy}^1 = 0, \qquad \tau_{xy}^2 = 0 \qquad (y = 0)$$

Действительно, на участках $x < -a$ и $x > a$, где полуплоскости соприкасаются, трения нет и касательные напряжения поэтому отсутствуют.

Далее, на участке $-a < x < a$ приложены по условию только нормальные усилия, и касательные напряжения, следовательно, также отсутствуют. Обозначим через $p_1(x)$ и $p_2(x)$ нормальные напряжения, действующие на участке $-a < x < a$. Тогда

$$\sigma_y^1 = p_1(x), \qquad \sigma_y^2 = p_2(x) \qquad (y = 0, \ |x| < a) \tag{2}$$

Наконец, на участках соприкасания упругих сред вертикальные нормальные напряжения и вертикальные смещения должны быть одинаковы для обеих сред. Это дает последнюю группу условий

$$\sigma_y^1 = \sigma_y^2, \qquad v_1 = v_2 \qquad (y = 0, \ |x| > a) \tag{3}$$

3. Будем рассматривать для определенности верхнюю полуплоскость.

Все заключения в равной мере будут относиться и к нижней полуплоскости. Введем в рассмотрение функции Гурса $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, где $z = x + iy$.

По известной формуле Н. И. Мусхелишвили [1] легко установить, что при $y = 0$, т. е. вдоль оси x

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = \int (\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1)\, dx \tag{4}$$

Формулу (4) представим в несколько ином виде. Прежде всего по условиям (1) напряжение $\tau_{xy}=0$ при $y=0$. Далее, $z=x=\bar z$ при $y=0$. Полагая

$$\bar z\,\varphi_1'(z)+\psi_1(z)=\theta_1(z) \tag{5}$$

представим (4) в виде

$$\varphi_1(z)+\overline{\theta_1(z)}=\int\sigma_y{}^1\,dx \qquad (y=0) \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что функции $\varphi_1(z)$ и $\theta_1(z)$ регулярны в верхней полуплоскости и на бесконечности растут самое большее логарифмически.

Отделяя в (6) мнимые части, найдем, что мнимые части функций $\varphi_1(z)$ и $\theta_1(z)$ совпадают на границе верхней полуплоскости. Но тогда, как нетрудно убедиться,

$$\operatorname{Im}\varphi_1(z)=\operatorname{Im}\theta_1(z)$$

Отсюда следует, что функции $\varphi_1(z)$ и $\theta_1(z)$ могут отличаться только на действительную постоянную. Но эти функции вообще определяются с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Поэтому мы вправе просто положить

$$\varphi_1(z)=\theta_1(z) \tag{7}$$

Таким образом, напряжения и смещения в верхней полуплоскости выражаются через одну аналитическую функцию $\varphi_1(z)$, регулярную в верхней полуплоскости.

Точно так же напряжения и смещения в нижней полуплоскости выражаются через одну регулярную функцию $\varphi_2(z)$. Дело сводится к отысканию этих функций.

4. Найдем краевые условия, которым удовлетворяют функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$.

Введем обозначения $\varphi_1'(z)=\Phi_1(z)$, $\varphi_2'(z)=\Phi_2(z)$. Подставим в (6) функцию $\varphi_1(z)$ вместо $\theta_1(z)$ и продифференцируем по k. Мы получим тогда

$$\operatorname{Re}\Phi_1(z)=\frac{1}{2}\sigma_y{}^1 \tag{8}$$

Так как на участке $|x|<a$ напряжение $\sigma_y{}^1$ известно, то это дает краевое условие

$$\operatorname{Re}\Phi_1(z)=\frac{1}{2}p_1(x) \qquad (y=0,\ |x|<a) \tag{9}$$

Точно так же

$$\operatorname{Re}\Phi_2(z)=\frac{1}{2}p_2(x) \qquad (y=0,\ |x|<a) \tag{10}$$

Далее, в силу равенства (8), условие (3) переходит в следующее:

$$\operatorname{Re}\Phi_1(z)=\operatorname{Re}\Phi_2(z) \qquad (y=0,\ |x|>a) \tag{11}$$

Обратимся теперь к условию (3), содержащему смещения. По известной формуле Н. И. Мусхелишвили [1]

$$2\mu_1(u_1+iv_1)=\varkappa_1\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}$$

Будем рассматривать смещения точек границы полуплоскости. Тогда $y=0$, $z=x=\bar{z}$ и последняя формула дает

$$2\mu_1(u_1+iv_1)=\varkappa_1\varphi_1(z)-\overline{\theta_1(z)}=\varkappa_1\varphi_1(z)-\overline{\varphi_1(z)}$$

Отсюда

$$v_1=\frac{\varkappa_1+1}{2\mu_1}\operatorname{Im}\varphi_1(z)$$

и точно так же

$$v_2=\frac{\varkappa_2+1}{2\mu_2}\operatorname{Im}\varphi_2(z)$$

Подставим это во второе условие (3), продифференцируем по x. Обозначив для краткости

$$\frac{\varkappa_1+1}{2\mu_1}=c_1\,,\qquad \frac{\varkappa_2+1}{2\mu_2}=c_2$$

получим краевое условие

$$c_1\operatorname{Im}\Phi_1(z)=c_2\operatorname{Im}\Phi_2(z)\qquad (y=0,\ |x|>a)\tag{12}$$

5. Обозначим через $\rho(x)$ общее значение $\operatorname{Re}\Phi_1(z)$ и $\operatorname{Re}\Phi_2(z)$ на лучах $|x|>a$, $y=0$. Воспользуемся интегралом Шварца, дающим выражение аналитической функции через контурное значение ее действительной части. Как известно, ядро Шварца для верхней полуплоскости равно

$$\frac{1}{\pi i}\,\frac{1+\zeta z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$$

Отсюда, пользуясь условием (9) и определением функции $\rho(x)$, имеем

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{-a}\rho(\zeta)\frac{1+\zeta(z)}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{1+\zeta^2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}p_1(\zeta)\frac{1+\zeta z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{1+\zeta^2}+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{a}^{+\infty}\rho(\zeta)\frac{1+\zeta z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{1+\zeta^2}\tag{13}$$

Формулу (13) можно несколько упростить. Для этого заметим, что $\Phi_1(\infty)=\varphi_1{}'(\infty)=0$, так как функция $\varphi_1(z)$ регулярна в верхней полуплоскости. Но при $z\to\infty$ из (13) следует

$$0=+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{-a}\rho(\zeta)\frac{\zeta d\zeta}{1+\zeta^2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}p_1(\zeta)\frac{\zeta d\zeta}{1+\zeta^2}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{+a}^{+\infty}\rho(\zeta)\frac{\zeta d\zeta}{1+\zeta^2}\tag{14}$$

Складывая это с (13), получим

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{-a}\frac{\rho(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{p_1(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{+a}^{+\infty}\frac{\rho(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\tag{15}$$

Аналогично найдем

$$\Phi_2(z)=\frac{-1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{-a}\frac{\rho(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{p_2(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{+a}^{+\infty}\frac{\rho(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\tag{16}$$

Для краткости обозначим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{p_k(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=A_k(z)\qquad (k=1,\ 2)$$

Функции $A_1(z)$ и $A_2(z)$ — известные, регулярные везде вне $(-a,\ +a)$.

Заставим точку z стремиться к некоторой точке одного из лучей $x<-a$ или $x>a$ действительной оси. В формулах (14) и (15) перейдем к пределу, отделим мнимые части и подставим в (12). Опуская подробности вычислений, приведем только результат

$$\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|>a}\frac{\rho(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-x}=-\frac{c_1A_1(x)+c_2A_2(x)}{c_1+c_2}\qquad (|x|>a)\tag{17}$$

Расходящийся интеграл в (17) следует понимать в смысле его главного значения по Коши.

Уравнение (17) — сингулярное интегральное с неизвестной функцией $\rho(x)$.

Введем обозначения

$$x=\frac{1}{t},\qquad \zeta=\frac{1}{\tau},\qquad \frac{1}{\tau}\rho\left(\frac{1}{\tau}\right)=\omega(\tau),\qquad a=\frac{1}{\alpha}$$

Уравнение (17) тогда примет вид

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{1}{t\,(c_1+c_2)}\left[c_1A_1\left(\frac{1}{t}\right)+c_2A_2\left(\frac{1}{t}\right)\right]\tag{18}$$

Отметим, что правая часть в (18) непрерывна при $t=0$, так как $A_1(z)$ и $A_2(z)$ обращаются в нуль при $z=\infty$.

Уравнение (18) можно решить по способу T. Carleman[2, 3]. Его решение имеет вид

$$\omega(t)=\frac{1}{\pi i\sqrt{\alpha^2-t^2}}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{f(\tau)\sqrt{\alpha^2-\tau^2}}{\tau-t}\,d\tau+\frac{C}{\sqrt{\alpha^2-t^2}}\tag{19}$$

Здесь для краткости через $f(\tau)$ обозначена правая часть уравнения (18). Постоянная C может быть определена из тех или иных дополнительных условий.

6. Отметим интересный частный случай, когда $p_1(x)\equiv p_2(x)$. Формулы (9) — (11) показывают, что в этом случае $\operatorname{Re}\Phi_1(z)$ и $\operatorname{Re}\Phi_2(z)$ совпадают на всей оси x. Рассмотрим функцию

$$\overline{\Phi}_2(z)=\overline{\Phi_2(\bar z)}\tag{20}$$

регулярную в верхней полуплоскости и равную нулю на бесконечности.

Очевидно,

$$\operatorname{Re}\overline{\Phi}_2(z)=\operatorname{Re}\Phi_2(z)=\operatorname{Re}\Phi_1(z)\qquad \text{при}\quad y=0$$

и так как обе функции $\overline{\Phi}_2(z)$ и $\Phi_1(z)$ равны нулю на бесконечности и регулярны в верхней полуплоскостм, то

$$\overline{\Phi}_2(z) \equiv \Phi_1(z) \tag{21}$$

Отсюда следует

$$\Phi_2(z) = \overline{\Phi_1(\bar{z})} \tag{22}$$

Далее, при

$$\operatorname{Im}\overline{\Phi}_2(z) = -\operatorname{Im}\Phi_2(z) \tag{23}$$

Подставив это в (12), получим

$$c_1 \operatorname{Im}\Phi_1(z) + c_2 \operatorname{Im}\overline{\Phi}_2(z) = 0 \qquad (y=0,\ |x|>a)$$

Сравнивая с (21), найдем

$$\operatorname{Im}\Phi_1(z) = \operatorname{Im}\Phi_2(z) = 0 \qquad (y=0,\ |x|>a) \tag{24}$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае вертикальные смещения точек границы на участках соприкосновения полуплоскостей остаются постоянными.

Чтобы решить задачу, нам достаточно найти только одну функцию $\Phi_1(z)$. Она определяется краевыми условиями (9) и (24).

Определение функции $\Phi_1(z)$ сведено, таким образом, к решению задачи Гильберта.

Обозначим через $q(x)$ значение $\operatorname{Im}\Phi_1(z)$ на участке $|x|<a$ действительной оси. Функция $\Phi_1(x)$ очень просто выражается через $q(x)$, именно

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{q(\zeta)}{\zeta - z}\,dz \tag{25}$$

Действительно, функция (25) регулярна в верхней полуплоскости и равна нулю на бесконечности.

Далее, пусть x — действительное число и $|x|>a$. Если при этом $z \to x$, то в (25) можно, очевидно, перейти к пределу под знаком интеграла, и мы получаем

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{q(\zeta)}{\zeta - x}\,d\zeta$$

Последний интеграл — действительный. Таким образом, условие (24) выполнено. Наконец, пусть x — действительное число, $|x|<a$, и $z \to x$. Пользуясь теоремой о предельных значениях интеграла типа Коши, получим

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{q(\zeta)}{\zeta - x}\,d\zeta + iq(x) \tag{26}$$

и отсюда ясно, что при $-a<x<a$ величина $\operatorname{Im}\Phi_1(x) = q(x)$.

Остается подобрать $q(x)$ так, чтобы удовлетворить условию (9).

Отделяя в (26) действительные части и пользуясь (9), получим сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{q(x)}{\zeta - x}\,d\zeta = \frac{1}{2}\,p_1(x) \tag{27}$$

Его решение можно написать по аналогии с (19)

$$q(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{p_1(\zeta)\sqrt{x^2-\zeta^2}}{\zeta-x}\,dx + \frac{C'}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{28}$$

где C' — произвольная постоянная, определяемая из дополнительного условия.

7. С помощью приема, который мы использовали в n° 5, можно решить и общую задачу. Введем функцию $\Phi_2(z)$ по формуле (20) и положим

$$\Omega(z) = c_1\Phi_1(z) + c_2\Phi_2(z) \tag{29}$$

Функция $\Omega(z)$ регулярна в верхней полуплоскости и равна нулю на бесконечности. Она удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\Omega(z) = 0 && (y=0,\ |x|>a) \\ &\operatorname{Re}\ \Omega(z) = \frac{1}{2}\left(c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x)\right) && (y=0,\ |x|<a) \end{aligned} \tag{30}$$

Первое из них следует из (12), а второе — из (9) и (10).

Определив $\Omega(z)$ по способу n° 6, положим $y=0$, $z=x$. В силу (11),

$$\rho(x) = \operatorname{Re}\Phi_1(x) = \operatorname{Re}\Phi_2(x) = \frac{\operatorname{Re}\Omega(x)}{c_1+c_2} \tag{31}$$

Зная $\rho(x)$, восстановим $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ по формулам (15) и (16).

Совершенно аналогично решается задача о соприкасании упругих полуплоскостей и в том случае, когда щелей не одна, а несколько. Формулы, определяющие решение, при этом усложняются.

Поступила в редакцию
25 VIII 1944

S. G. MICHLIN. — THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF CONTACT OF TWO SEMI-INFINITE ELASTIC MEDIA

Two semi-infinite media of different elastic properties are in contact without friction along the x-axis.

The normal components of the displacement vector as well as of the stress vector in both media associated with the x-axis are assumed to be given and continuous for $x > a$ and $x < -a$.

Within the range $-a < x < a$ of the x-axis the contact of the media vanishes as if they were separated by an infinitesimal slit. Along this range, the values of the applied normal stresses on each side of the slit may be given differently in both media.

For these boundary conditions the problem of distribution of stresses and displacements in the media is solved in quadratures.

The solution can also be attended to a number of slits separating the media along the x-axis.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. Изд. АН СССР. 1935.
2. T. Carlemann. Sur la résolution des certaines équations intégrales. Arkiv för Mathematik, Astronomi och Physik. T. 16. 1922.
3. Михлин С. Г. О напряжениях в породе над угольным пластом. Известия ОТН АН СССР. № 7—8. 1942.