

К ВОПРОСУ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЦ ПОТОКА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРЫЛА

И. А. Паничкин

(Москва)

1. Пусть в струе с круглым поперечным сечением расположено крыло постоянного профиля и размаха, равного диаметру сечения струи (фиг. 1).

Поток, обтекающий крыло, принимаем идеальным и установившимся. Завихренную граничную зону во внимание не принимаем.

Для граничных условий задачи считаем, что:

1) давление на граничной поверхности струи всюду постоянно,

2) крыло, находящееся в струе, не вызывает значительной деформации границы струи.

Добавочную скорость частиц потока, находящиеся на границе струи, от присутствия крыла полагаем малой по сравнению со скоростью основного потока настолько, что квадратом этой добавочной скорости можно пренебречь.

На основании этих предположений и представления крыла вихревой схемой Прандтля рассматриваемая пространственная задача сводится к задаче на плоскости. Эту плоскость, перпендикулярную основному потоку и находящуюся на достаточно большом расстоянии за крылом, примем за плоскость переменного $z = x + iy$. На контуре сечения струи, т. е. окружности, радиус которой, не нарушая общности, можно принять равным единице, значение потенциала скоростей должно быть постоянным.

Половина индуктивной скорости в этой плоскости на горизонтальном диаметре, как известно, принимается за индуктивную скорость на крыле¹.

Будем считать, что размах крыла $l = 2$, тогда удлинение $\lambda = 2/l$, где l — хорда крыла.

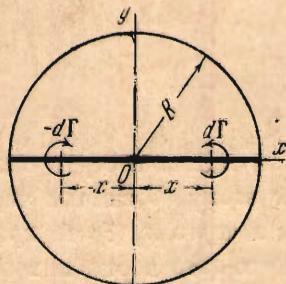
Расположение крыла и координатные оси x, y для струи с круглым поперечным сечением показаны на фиг. 1.

Посредством функции

$$\zeta = i \ln \frac{1 - iz}{1 - z} \quad (1.1)$$

круг единичного радиуса отображается на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ в периодические бесконечные вертикальные полосы, представленные на фиг. 2.

¹ Более подробные сведения по этому вопросу можно найти, например, в книге В. В. Голубева [1].



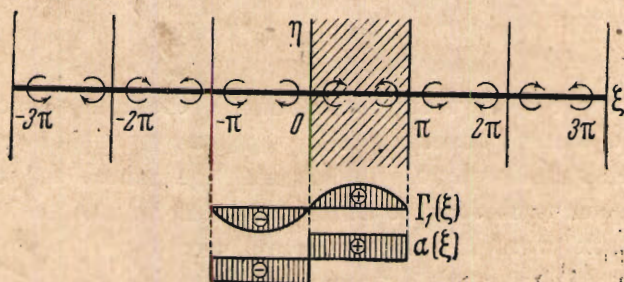
Фиг. 1

Из формулы (1.1) легко получить

$$x = \operatorname{tg} \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad \frac{dx}{d\xi} = \varphi(\xi) = \frac{1}{1 + \sin \xi} = \frac{1+x^2}{2} \quad (1.2)$$

Рассмотрим одну из полос фиг. 2 (например, заштрихованную), на которую функция (1.1) переводит единичный круг, при этом размах крыла $l=2$ переходит в размах крыла, равный π .

Обозначим через $\Gamma(x)$ циркуляцию в сечении крыла, находящегося в струе с круглым поперечным сечением единичного радиуса, а через $\Gamma_1(\xi)$ циркуля-



Фиг. 2

цию крыла в струе с поперечным сечением бесконечной полосы; соответственно этому обозначим через $w(x)$ индуктивную скорость на крыле в плоскости z , а через $w_1(\xi)$ на крыле в плоскости ζ . При этом отображении имеют место (это верно и в общем случае) следующие инварианты:

$$\Gamma(x) = \Gamma_1(\xi) \quad \text{или} \quad \gamma(x) dx = \gamma_1(\xi) d\xi \quad (1.3)$$

где

$$\gamma(x) = \frac{d\Gamma(x)}{dx}, \quad \gamma_1(\xi) = \frac{d\Gamma_1(\xi)}{d\xi}$$

и

$$w(x) dx = w_1(\xi) d\xi \quad (1.4)$$

$$Q_i = \rho \int_{-1}^{+1} \Gamma(x) w(x) dx = \rho \int_0^{\pi} \Gamma_1(\xi) w_1(\xi) d\xi \quad (1.5)$$

где Q_i — индуктивное сопротивление крыла.

Для того чтобы на границе единичного круга, а также на полосе при $\xi=0$ и $\xi=\pi$ сохранялось постоянное значение потенциала скоростей, нужно на плоскости ζ сделать отображение сбегающих вихрей крыла так, как указано на фиг. 2.

2. Для крыла в плоскости z имеет место уравнение Прандтля

$$\Gamma(x) = \frac{cVt}{2} \left[\alpha^* + \frac{w(x)}{V} \right] \quad (-1 \leq x \leq +1) \quad (2.1)$$

где V — скорость основного потока, α^* — геометрический угол атаки, и

$$c = \left(\frac{dC_y}{dx} \right)_{x=\infty} \approx 2\pi$$

Пользуясь инвариантами (1.3) и (1.4), уравнение (2.1) для крыла в заштрихованной полосе (фиг. 2) плоскости ζ можно привести к виду

$$\Gamma_1(\xi) = \pi V t \left[\alpha^* + \frac{\omega_1(\xi)}{V} (1 + \sin \xi) \right] \quad (2.2)$$

или

$$\frac{\Gamma_1(\xi)}{\Gamma_\infty} \frac{1}{1 + \sin \xi} = \frac{1}{1 + \sin \xi} + \frac{2\pi\omega_1}{\lambda} \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma_\infty} \quad (0 \leq \xi \leq \pi) \quad (2.3)$$

$$\Gamma_\infty = C_v \frac{V t}{2} = \pi V t \alpha^* \quad (2.4)$$

Кроме крыла, находящегося между $\xi = 0$ и $\xi = \pi$, рассмотрим крыло между $\xi = -\pi$ и $\xi = 0$, где циркуляция и угол атаки имеют отрицательное значение. Для этих двух крыльев уравнение (2.3) будет иметь вид

$$\frac{\Gamma_1(\xi)}{\Gamma_\infty} \frac{1}{1 + |\sin \xi|} = \pm \frac{1}{1 + |\sin \xi|} + \frac{2\pi\omega_1(\xi)}{\lambda} \frac{1}{\Gamma_\infty} \quad (-\pi \leq \xi \leq +\pi) \quad (2.5)$$

где знаки $-$ и $+$ берутся соответственно для $-\pi \leq \xi \leq 0$ и $0 \leq \xi \leq +\pi$.

Это уравнение, определенное на интервале $-\pi \leq \xi \leq +\pi$, продолжим вне этого интервала периодически с периодом, равным 2π .

Для решения уравнения (2.5) мы применим ряды Фурье. Имеем

$$\frac{1}{1 + |\sin \xi|} = \frac{b_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \cos 2m\xi, \quad \mp \frac{1}{1 + |\sin \xi|} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n+1} \sin (2n+1)\xi \quad (2.6)$$

где

$$b_{2m} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2mu \, du}{1 + \sin u} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

$$\beta_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin (2n+1)u \, du}{1 + \sin u} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

Распределение циркуляции в плоскости ζ будем искать в виде

$$\Gamma(x) = \Gamma_1(\xi) = \Gamma_\infty \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin (2n+1)\xi \quad (2.9)$$

Тогда индуктивная скорость в плоскости ζ в какой-либо точке отрезка $0 \leq \xi \leq \pi$ от всех отображенных вихрей и вихрей основного крыла, находящегося в интервале от $\xi = 0$ до $\xi = \pi$, будет

$$\omega_1(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_1(t) \, dt}{t - \xi} = -\frac{1}{4} \Gamma_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_{2n+1} \sin (2n+1)\xi \quad (2.10)$$

Подставляя выражения (2.6), (2.9) и (2.10) в уравнение (2.5), будем иметь

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \cos 2m\xi \right) \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin (2n+1)\xi = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n+1} \sin (2n+1)\xi - \frac{\pi}{2\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_{2n+1} \sin (2n+1)\xi \end{aligned}$$

Полученное выражение должно быть тождеством для любого значения ξ . Это будет иметь место всегда, если коэффициенты a_{2n+1} ($n=0, 1, 2, \dots$) в разложении циркуляции в ряд являются решением бесконечной системы уравнений

$$a_{2n+1} \left[(2n+1) \frac{\pi}{\lambda} + b_0 - b_{4n+1} \right] = \quad (2.11)$$

$$= 2\beta_{2n+1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} (b_{2n+2m+2} - b_{2n-2m}) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

где штрих у знака суммы означает, что члены с индексами $m=n$ из этой суммы исключаются. В развернутом виде система (2.11) имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 \left(\frac{\pi}{\lambda} + b_0 - b_2 \right) &= 2\beta_1 + a_3 (b_4 - b_2) + a_5 (b_6 - b_4) + \dots, \\ a_3 \left(3 \frac{\pi}{\lambda} + b_0 - b_6 \right) &= 2\beta_3 + a_1 (b_4 - b_2) + a_5 (b_8 - b_6) + \dots, \\ a_5 \left(5 \frac{\pi}{\lambda} + b_0 - b_{10} \right) &= 2\beta_5 + a_1 (b_8 - b_6) + a_3 (b_{12} - b_{10}) + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

Решение этой системы затрудняется вычислением коэффициентов b_{2m} , β_{2m+1} ($m=0, 1, 2, \dots$), определяемых соответственно формулами (2.7) и (2.8).

Указанное затруднение можно обойти, если вместо точных значений коэффициентов рассмотреть их приближенные значения, вполне достаточные для практических целей. Для этого воспользуемся приближенным соотношением

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{1 + \sin \xi} \approx \frac{1}{2} + a \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right)^2 + b \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right)^4 = \varphi_1(\xi) \quad (2.12)$$

где

$$a = \frac{4-\pi}{\pi^2} = 0.086974, \quad b = \frac{4(\pi-2)}{\pi^4} = 0.046878$$

Легко проверить, что

$$\varphi(0) = \varphi_1(0), \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi'(0) = \varphi_1'(0), \quad \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Если мы подставим в формулу (2.7) вместо функции $\varphi(u)$ полином $\varphi_1(u)$, то после интегрирования найдем

$$b_0 = \frac{22-\pi}{15} = 1.25723, \quad b_{2m} = \frac{\alpha}{m^2} \left(1 + \frac{\beta}{m^2} \right) \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\pi} = 0.31831, \quad \beta = \frac{12(2-\pi)}{\pi^3} = -0.44181$$

Аналогичным путем из (2.8) получим

$$\beta_{2n+1} = \frac{p}{2n+1} \left[1 + \frac{q}{(2n+1)^2} + \frac{r}{(2n+1)^4} \right] \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

где

$$p = \frac{\lambda}{\pi} = 1.27324, \quad q = \frac{2(8-5\pi)}{\pi^2} = -1.56194, \quad r = \frac{96(\pi-2)}{\pi^4} = 1.12508$$

Пользуясь формулами (2.13) и (2.14), систему уравнений (2.11), при оставлении конечного числа неизвестных a_{2n+1} ($n = 0, 1, 2, \dots, k$) и того же числа уравнений, удобно решать методом последовательных приближений.

Последовательность решений сходится настолько быстро, что практически уже достаточно второго приближения.

3. Придадим формуле (2.9), определяющей распределение циркуляции в струе, несколько иной вид.

Полагая в формуле (2.9) величину $\xi = \frac{1}{2}\pi$, получим значение циркуляции в среднем сечении крыла

$$\Gamma(0) = \Gamma_1 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \Gamma_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1} \quad (3.1)$$

Подставляя значение Γ_∞ из формулы (3.1) в формулу (2.9), получим относительное распределение циркуляции

$$\Gamma^* = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(0)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin(2n+1)\xi}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1}} \quad (3.2)$$

где, как следует из первой формулы (1.2),

$$\xi = \frac{1}{2}\pi + 2 \operatorname{arctg} x$$

Приводим некоторые значения ξ для соответствующих значений x

$\xi =$	0	$\frac{1}{16}\pi$	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	$\frac{15}{16}\pi$	π
$x =$	-1	-0.821	-0.670	-0.414	0	0.414	0.670	0.821	1

Для численного примера были приняты значения удлинения крыла $\lambda = 4, 6, 8$. Для этих значений определялись коэффициенты a_{2n+1} ($n = 0, 1, 2, \dots, 5$) из уравнений (2.11), а по значениям этих коэффициентов согласно формуле (3.2) находились значения циркуляции Γ^* по размаху крыла, приведенные в табл. 1.

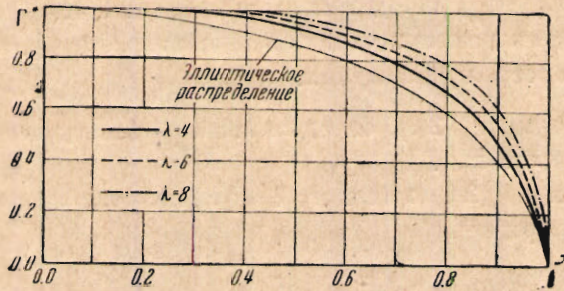
Таблица 1

$\lambda \backslash x$	0	0,414	0,670	0,821	1
4	1	0,965	0,812	0,659	0
8	1	0,983	0,849	0,719	0
6	1	1,000	0,881	0,768	0

По данным табл. 1 на фиг. 3 построены кривые Γ^* в зависимости от x для разных значений λ и для сравнения построено эллиптическое распределение циркуляции по размаху крыла.

Как видно из фиг. 3, распределение циркуляции по размаху крыла, с учетом влияния границ потока с круглым поперечным сечением, получается боль-

ше, нежели эллиптическое распределение и возрастает с увеличением удлинения крыла.



Фиг. 3

4. Определим теперь индуктивный угол скоса потока на крыле в какой-либо его точке x .

На основании формул (2.1) и (2.4) будем иметь

$$\frac{\Delta\alpha(x)}{C_{y\infty}} = -\frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{\Gamma(x)}{\Gamma_\infty} \right], \quad \text{где } \Delta\alpha(x) = \frac{\omega(x)}{V} \quad (4.1)$$

Придадим формуле (4.1) несколько иной вид, для чего воспользуемся выражением подъемной силы крыла P и формулой (2.4)

$$\begin{aligned} P &= C_y t \rho V^2 = \rho V \int_{-1}^{+1} \Gamma(x) dx = \rho V \int_0^\pi \frac{\Gamma_1(\xi) d\xi}{1 + \sin \xi} = \\ &= \rho V \Gamma_\infty \int_0^\pi \left[\frac{1}{1 + \sin \xi} + \frac{2\pi}{\lambda \Gamma_\infty} \omega_1(\xi) \right] d\xi = 2\rho V \Gamma_\infty \left[1 - \frac{\pi}{2\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1} \right] \end{aligned}$$

Откуда находим

$$C_y = C_{y\infty} \left[1 - \frac{\pi}{2\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1} \right] \quad (4.2)$$

Подставляя в формулу (4.1) вместо $C_{y\infty}$ его значение из формулы (4.2), получим

$$\frac{\Delta\alpha}{C_y} = \frac{\Delta\alpha(x)}{C_y} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1 - \Gamma(x)/\Gamma_\infty}{1 - \frac{\pi}{2\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1}} \quad (4.3)$$

где ξ и $\Gamma(x)$ определены согласно (3.3) и (2.9).

Заметим, что формула (4.3) дает индуктивный угол скоса потока на крыле в струе с круглым поперечным сечением, вызываемый как самим крылом, так и влиянием границ потока.

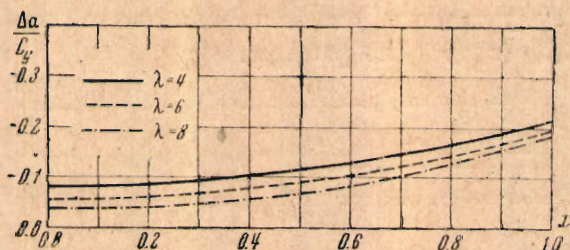
Результаты вычислений $\Delta\alpha/C_y$ по формуле (4.3) для принятых выше удлинений приведены в табл. 2.

Таблица 2

$\lambda \backslash x$	0	0,414	0,670	0,821	1
4	-0.0788	-0.0835	-0.100	-0.124	-0.211
6	-0.0557	-0.0602	-0.0766	-0.105	-0.196
8	-0.0385	-0.0435	-0.0551	-0.0801	-0.185

По данным этой таблицы построены кривые на фиг. 4.

Как видно из фиг. 4, суммарный индуктивный угол скоса потока (как от



Фиг. 4

самого крыла, так и от влияния границ потока на крыло) значительно возрастает от середины крыла к его концам.

5. Переходим к определению индуктивного сопротивления крыла.

Отношение индуктивного сопротивления элемента длины крыла dx к dx в какой-нибудь точке x будет

$$\frac{dQ_i}{dx} = C_{xi}(x) \frac{\rho V^2}{2} t = \rho V \Gamma_\infty(x) \Delta \alpha(x) = -\frac{\rho \Gamma_\infty^2}{\pi t} N(x) \quad (5.1)$$

где

$$N = N(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma_\infty} \left[1 - \frac{\Gamma(x)}{\Gamma_\infty} \right] \quad (5.2)$$

На основании формул (4.2) и (5.1) находим

$$C_{xi}(x) = -\frac{1}{2\pi} C_{y\infty}^2 N(x) = -f(\lambda) C_y^2 N(x) \quad (5.3)$$

где

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{\pi}{2\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1} \right]^{-2}$$

Приводим значения $f(\lambda)$ в зависимости от λ для рассматриваемых удлинений:

$$\begin{array}{ccc} \lambda = & 4 & 6 & 8 \\ f(\lambda) = & 0.2797 & 0.2414 & 0.2201 \end{array}$$

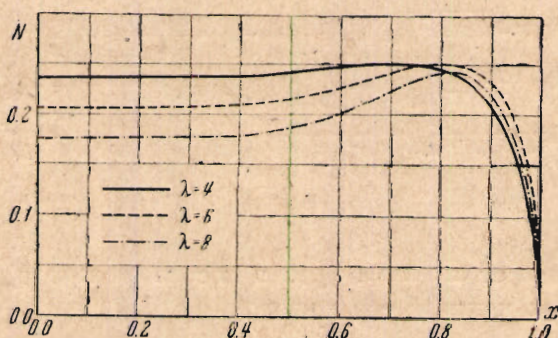
Значения N в зависимости от x и λ , вычисленные по формуле (5.2), приведены в табл. 3.

Таблица 3

$\lambda \backslash x$	0	0,414	0,670	0,821	1
4	0.234	0.239	0.225	0.243	0
6	0.208	0.210	0.238	0.250	0
8	0.175	0.179	0.219	0.242	0

По данным этой таблицы построены кривые на фиг. 5.

Коэффициент индуктивного сопротивления всего крыла легко найти интегрированием $C_{xi}(x)$ (5.3) по размаху.



Фиг. 5

Заметим здесь, что этот суммарный коэффициент индуктивного сопротивления крыла будет состоять, во-первых, из коэффициента индуктивного сопротивления самого крыла и, во-вторых, из коэффициента индуктивного сопротивления от влияния границ потока.

Поступила в редакцию
28 VIII 1944

I. A. PANICHKIN. — CONCERNING THE INFLUENCE OF THE BOUNDARY OF A FLOW WITH CIRCULAR CROSS SECTION ON THE AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF A WING

For a rectangular wing in a flow with circular cross section, the author gives the distributions of circulation, angle of downwash and drag induced by the wing itself as well as those exerted by the boundary of flow.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Голубев В. В. Теория крыла аэроплана конечного размаха. Труды ЦАГИ. 1931. Вып. 29.