

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В СВЯЗИ С ДВОЙСТВЕННОСТЬЮ РЕШЕНИЯ ТЕОРИИ УДАРНЫХ ВОЛН

Я. И. Левинсон

(Москва)

§ 1. Неоднозначность теоретического решения для движения газа за ударной волной и опытные факты

1. Известно, что с переходом скорости газового потока через скорость звука в потоке при определенных условиях возникают поверхности разрыва гидродинамических элементов, характеризующих состояние движущегося газа, а именно так называемые ударные волны (скачки уплотнения).

На поверхности скачка уплотнения происходит газовый удар. Среда, движущаяся со скоростью V_1 , врывается здесь в среду, обладающую меньшей скоростью V_2 . Скачкообразное уменьшение скорости от значения V_1 до значения V_2 сопровождается необратимым сжатием. Энтропия газа после прохождения им поверхности скачка уплотнения увеличивается, а потери механической энергии в тепло служат источником возникновения особого рода сопротивления, называемого обычно волновым.

2. Величина волнового сопротивления в большой мере зависит от того, насколько велико торможение потока при прохождении его через поверхность ударной волны (скачка). Теоретически, однако, оказываются одинаково возможными две скорости за скачком, отвечающие одной и той же скорости до скачка и одному и тому же углу поворота потока на скачке: большая и меньшая. Существующая теория, таким образом, не дает однозначного решения для одного из самых фундаментальных вопросов газовой динамики. Поскольку эта проблема явилась предметом нашего исследования, остановимся на ней несколько подробнее.

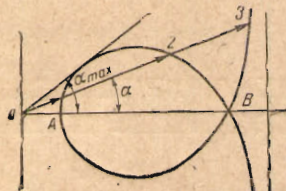
Годографом вектора скорости за скачком является гипоцистоида, уравнение которой, впервые найденное Буземаном, есть

$$\frac{V_{y2}^2}{(V_1 - V_{x2})^2} = \frac{V_{x2} - a^*/V_1}{2V_1/(x+1) + a^*/V_1 - V_{x2}} \quad (1.1)$$

Здесь V_1 — скорость потока до скачка, V_{x2} и V_{y2} — проекции вектора скорости V_2 за скачком на оси x (по направлению скорости V_1) и y (перпендикулярно к направлению скорости V_1), a^* — критическая скорость звука, $x = C_p/C_v$ — показатель адиабаты.

Вид гиподиссоиды, представленной уравнением (1.1), показан для некоторого значения V_1 и a^* на фиг. 1.

Отрезок OB изображает в масштабе чертежа вектор скорости потока до скачка V_1 . Если на скачке поток поворачивает на угол α , то вектор скорости за скачком V_2 найдется как отрезок луча, проведенного из начала координат O под углом α к направлению V_1 до пересечения с кривой.



Фиг. 1

Таких точек пересечения будет три, и соответственно, три математически возможных значения скорости V_2 при одних и тех же значениях V_1 и α .

Одно из этих решений, именно то, которое соответствует бесконечным ветвям гиподиссоиды (точка Z на фиг. 1), должно быть отброшено. В самом деле, в точках, лежащих на бесконечных ветвях, скорость после скачка больше, нежели до скачка. А так как большим скоростям отвечают меньшие значения плотности, то скачки, соответствующие бесконечным ветвям гиподиссоиды, были бы скачками разрежения. Однако строго доказывается, что существование скачков разрежения противоречит второму закону термодинамики. Наиболее общее доказательство этой теоремы принадлежит Цемплу (1908 г.).

Таким образом, бесконечные ветви гиподиссоиды не отвечают физически возможным после скачка состояниям газа и их обычно не вычерчивают при построении годографа скорости.

Что касается двух других решений, отвечающих петле гиподиссоиды (в литературе ее часто называют ударной полярой), то они с точки зрения существующей теории физически равноправны. Теория ударных волн дает, таким образом, двойственное решение для скоростей за скачком.



Фиг. 2

Каждой из двух возможных скоростей за скачком отвечает свой угол β наклона скачка к направлению вектора скорости V_1 , а именно, большей скорости — меньший угол, меньшей скорости — больший. Двойственность решения для углов наклона ударной волны можно было бы видеть на кривой, построенной для некоторого значения V_1 и a^* по уравнению

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{1}{V_1^2 \sin \beta \cos \beta} \left(a^{*2} - \frac{z-1}{z+1} V_1^2 \cos^2 \beta \right) \quad (1.2)$$

3. Как показывает опыт, при обтекании клина с большим двухгранным углом α , а также любого тупого препятствия скачок уплотнения образуется вверх против течения от обтекаемого тела (фиг. 2.)

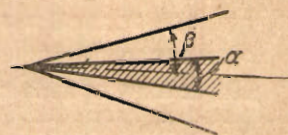
В самой передней точке такого скачка, находящейся перед телом, поверхность скачка перпендикулярна потоку ($\beta = \frac{1}{2}\pi$) и там возникает скорость $V_{2\min}$ (точка A фиг. 1 и 2). По мере удаления от тела угол между элементом поверхности скачка и направлением потока непрерывно уменьшается и вдали от тела практически становится равным углу Маха

$$\epsilon_1 = \arcsin(1/M_1)$$

где M_1 — число Маха, равное V_1/a_1 , причем a_1 — скорость звука в движении до скачка (точка B фиг. 1 и 2).

На таком криволинейном скачке уплотнения пробегается вся гамма возможных скоростей за скачком и отвечающих им углов наклона скачка.

При обтекании сверхзвуковым потоком заостренного тела, например, клина с достаточно малым двугранным углом α , передняя точка скачка уплотнения совмещается с передней (угловой) точкой тела; скачок, как говорят, сидит на теле (фиг. 3).



Фиг. 3

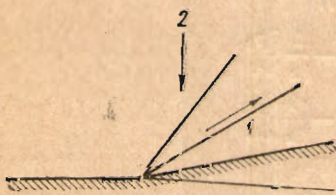
При обтекании такого клина поверхность скачка является плоской; подобный скачок носит название плоского косо́го скачка. В рассматриваемом случае, как показывает опыт, реализуется неизменно лишь одна из двух возможных скоростей V_2 , а именно бо́льшая.

§ 2. Работа П. С. Эпштейна. Дискуссия на римской конференции по большим скоростям в авиации. Метод исследования

4. Двойственность решения для движения газа за ударной волной (скачком) явилась предметом обсуждения на римской конференции по большим скоростям в авиации (1935 г.) при участии Л. Прандтля, Т. Кармана, А. Буземана, М. Руа и др.^[1] Несколькими годами ранее (1931 г.) этой проблеме посвятил свои работы П. С. Эпштейн^[2].

Во всех случаях к решению проблемы пытались подойти с точки зрения общих (механических или термодинамических) критериев устойчивости, стремясь доказать, что движение с бо́льшей из двух возможных скоростей более устойчиво. Эпштейн предложил избрать в качестве критерия устойчивости значение «основной функции» Гамильтона, приняв, что всякая динамическая система стремится к меньшему значению этой функции. М. Руа рекомендовал обратиться к критерию возможного изменения энтропии и руководствоваться принципом, что в природе всегда происходит то явление, которое требует наименьшего изменения энтропии и т. д., и т. п. Однако рациональной теории, которая позволила бы получить численные результаты, предложено не было.

В заключении упомянем о взглядах, высказанных в упомянутой дискуссии Л. Прандтлем. В связи с работой Эпштейна Прандтль обратил внимание на недопустимость применения теорем о минимуме каких-либо количеств к случаям, когда количества, минимум которых определяется, становятся бесконечно большими. Прандтль указал (и с ним нельзя не согласиться) на предпочтительность перед применением общих критериев устойчивости непосредственного исследования возмущения состояния равновесия. При этом Прандтль высказал предположение, что при более косом положении плоскости скачка возмущения распространяются (в бо́льшей мере) во внешнюю область, а при более перпендикулярном ее положении возмущения распространяются внутрь волновой области и могут каким-нибудь образом нарушить скачок (фиг. 4). Сам Прандтль называет эти соображения



Фиг. 4

«несколько примитивными»; им нельзя, впрочем, отказать в некоторой интуитивной убедительности.

5. Для исследования устойчивости двух возможных режимов движения за ударной волной в настоящей работе применен метод малых колебаний.

Устойчивость движения исследуется в нашей задаче следующим образом.

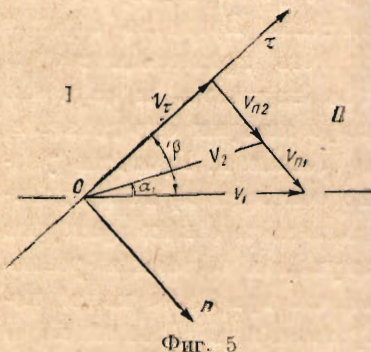
На стационарный сверхзвуковой поток, в котором предполагается наличие плоской поверхности разрыва (косого скачка уплотнения), накладываются малые нестационарные возмущения. Рассматривается, таким образом, распространение одного движения (волны) в другом, основном движении. Проходя через поверхность разрыва, волны, распространяющиеся в потоке, вызовут и колебания этой поверхности. Если указанные возмущения будут затухать с течением времени или если они будут иметь характер малых периодических колебаний, то соответствующее основное движение (и отвечающее ему положение плоскости скачка) считается по отношению к заданным возмущениям устойчивым. Если же возмущения будут неограниченно возрастать с течением времени, основное движение считается неустойчивым.

Наложённые возмущения должны быть гидродинамически возможны. Они должны поэтому удовлетворять соответствующим системам дифференциальных уравнений — своей для движения до поверхности разрыва и своей — для движения за этой поверхностью. Они должны, кроме того, удовлетворять определенным краевым условиям на поверхности разрыва.

§ 3. Дифференциальные уравнения малых колебаний и краевые условия на поверхности ударной волны

6. Направим ось абсцисс τ вдоль фронта стационарной поверхности разрыва и ось ординат n — по нормали к нему (фиг. 5).

Плоское течение совершенного газа при адиабатическом характере этого течения определяется в областях непрерывного изменения его параметров (т. е. по одну и по другую стороны от поверхности разрыва) системами дифференциальных уравнений в частных производных, которые в принятой системе осей имеют вид



$$\begin{aligned} \frac{dV_{\tau k}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p_k}{\partial \tau} \\ \frac{dV_{nk}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p_k}{\partial n} \\ \frac{d\rho_k}{dt} &= -\rho_k \left(\frac{\partial V_{\tau k}}{\partial \tau} + \frac{\partial V_{nk}}{\partial n} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_k} p_k^{\frac{1}{\gamma}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $k=1, 2$ и

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_{\tau k} \frac{\partial}{\partial \tau} + V_{nk} \frac{\partial}{\partial n} \quad (3.2)$$

На основное движение, которое будем считать установившимся, наложим малые нестационарные возмущения; иными словами, дадим параметрам основ-

ного движения V_τ , V_{nk} , ρ_k , ρ_k внезапные приращения $V_{\tau k'}$, $V_{nk'}$, ρ_k' , ρ_k' , квадратами которых можно пренебречь.

Новые значения параметров движущегося газа $V_\tau + V_{\tau k'}$, $V_{nk} + V_{nk'}$, $\rho_k + \rho_k'$, $\rho_k + \rho_k'$ должны удовлетворять уравнениям (3.1).

Будем полагать, далее, что основное (стационарное) движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью.

Ограничиваясь первым порядком малости, получим для возмущенного движения из уравнений (3.1)

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\tau k'}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \rho_k'}{\partial t}, & \frac{dV_{nk'}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \rho_k'}{\partial n} \\ \frac{d\rho_k'}{dt} &= -\rho_k \left(\frac{\partial V_{\tau k'}}{\partial \tau} + \frac{\partial V_{nk'}}{\partial n} \right), & \frac{d}{dt} (\rho_k' - a_k^2 \rho_k') &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

которые по исключению из двух последних уравнений ρ_k' в подробной записи примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\tau k'}}{\partial t} + V_{nk} \frac{\partial V_{\tau k'}}{\partial \tau} + V_{nk} \frac{\partial V_{\tau k'}}{\partial n} &= -\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \rho_k'}{\partial \tau} \\ \frac{\partial V_{nk'}}{\partial t} + V_\tau \frac{\partial V_{nk'}}{\partial \tau} + V_{nk} \frac{\partial V_{nk'}}{\partial n} &= -\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial \rho_k'}{\partial n} \\ \frac{\partial \rho_k'}{\partial t} + V_\tau \frac{\partial \rho_k'}{\partial \tau} + V_{nk} \frac{\partial \rho_k'}{\partial n} &= -\rho_k a_k^2 \left(\frac{\partial V_{\tau k'}}{\partial \tau} + \frac{\partial V_{nk'}}{\partial n} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

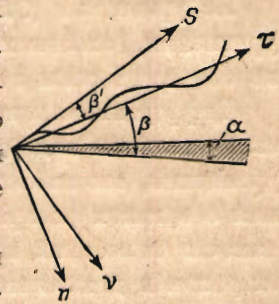
где $k=1$ для движения до поверхности разрыва и $k=2$ для движения за поверхностью разрыва.

Коэффициенты этих линеаризованных уравнений не зависят ни от времени, ни от координат и являются просто некоторыми числами.

Малые величины $V_{\tau k'}$, $V_{nk'}$, ρ_k' , ρ_k' , будем называть колебаниями соответствующих параметров.

7. Значения параметров газового потока по одну и по другую стороны от поверхности разрыва связаны между собой на этой поверхности соотношениями в конечной форме, вытекающими из основных законов механики: постоянства массы, сохранения энергии и равенства импульса сил изменению количества движения. В возмущенном движении эти соотношения должны быть записаны не по отношению к поверхности стационарного разрыва τn , а для поверхности разрыва sv , отзывающейся своими колебаниями на распространяющиеся через нее колебания газового потока (фиг. 6).

Из указанных соотношений могут быть получены краевые условия на поверхности ударной волны (скачка), которым должны удовлетворять решения для колебаний в обеих областях непрерывного изменения параметров движущегося газа, найденные путем интегрирования систем дифференциальных уравнений (3.4) порознь для $k=1$ и для $k=2$.



Фиг. 6

Упомянутые выше соотношения таковы:

а) уравнение непрерывности, вытекающее из закона постоянства массы,

$$\rho_1 (N - V_{v1}) = \rho_2 (N - V_{v2}) = m \quad (3.5)$$

где N — скорость перемещения поверхности разрыва;

б) уравнение импульса в проекции на направление нормали к скачку

$$p_2 - p_1 = m (V_{v1} - V_{v2}) \quad (3.6)$$

в) уравнение импульса в проекции на направление скачка

$$0 = m (V_{s2} - V_{s1}) \quad \text{или} \quad V_{s1} = V_{s2} \quad (3.7)$$

г) формула Ранкина — Гюгоньо, в основе которой лежит закон сохранения энергии

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(z+1)p_2 - (z-1)p_1}{(z+1)p_1 - (z-1)p_2} \quad (3.8)$$

Из геометрических соотношений (фиг. 6) имеем

$$\begin{aligned} V_{vk} &= (V_\tau + V_{zk'}) \sin \beta' + (V_{nk} + V_{nk'}) \cos \beta' \\ V_{sk} &= (V_\tau + V_{zk'}) \cos \beta' - (V_{nk} + V_{nk'}) \sin \beta' \end{aligned} \quad (k=1, 2) \quad (3.9)$$

где $\beta' = \beta'(z, t)$ — угол между касательной s к возмущенной поверхности разрыва и направлением фронта стационарного разрыва τ .

Полагая по малости угла β' , что $\cos \beta' = 1$ и $\sin \beta' = \beta'$, перепишем эти формулы (ограничиваясь в них точностью до малых первого порядка) в виде

$$V_{vk} = V_{nk} + V_{nk'} + V_\tau \beta', \quad V_{sk} = V_\tau + V_{zk'} + V_{nk} \beta' \quad (k=1, 2) \quad (3.10)$$

Заметим, кроме того, что в стационарном движении скорость перемещения поверхности разрыва равна нулю; поэтому в возмущенном движении эта скорость $N = N'$ — малой величине.

Из уравнений (3.5) — (3.8) с помощью соотношений (3.10) получим четыре уравнения, связывающие значения на поверхности разрыва происходящих по обе ее стороны колебаний с колебаниями самой поверхности разрыва.

Дифференциальные уравнения малых колебаний были получены (в их окончательном виде) для функций V_τ' , V_{nk}' и p' . Исключив p_1' и из краевых уравнений, мы избежим необходимости высказывать какие-либо предположения о законах распространения за скачком энтропийных волн (т. е. о зависимости колебаний плотности от колебаний давления). Что касается колебаний энтропии в движении до скачка, то их мы вправе считать отсутствующими (т. е. полагать $p_1' = a_1^2 p_1''$), поскольку в этом движении колебания задаются нами; если же мы захотели бы допустить существование энтропийных колебаний до скачка, то должны были бы задать и закон этих колебаний, что усложнило бы вывод, но не придало бы им большей общности.

Поступив таким образом, будем иметь окончательно следующие три краевые уравнения, в которых под $V_{\tau k'}$, $V_{nk'}$ и $p_{k'}$ следует иметь в виду значения соответствующих колебаний на возмущенной поверхности разрыва:

$$(V_{n1} - V_{n2})\beta' = V_{\tau 1}' - V_{\tau 2}' \quad (3.11)$$

$$\rho_1 (V_{n1} - V_{n2}) (N' - V_{\tau} \beta') = \rho_1 (2V_{n1} - V_{n2}) V_{n1}' - \rho_1 V_{n1} V_{n2}' + \\ + \left[\frac{V_{n1} (V_{n1} - V_{n2})}{a_1^2} + 1 \right] p_1' - p_2' \quad (3.12)$$

$$[a_1^2 + (x-1) V_{n1} (V_{n1} - V_{n2})] (\rho_2 - \rho_1) (N' - V_{\tau} \beta') = \\ = [a_1^2 + (x-1) V_{n1} (V_{n1} - V_{n2})] (\rho_2 V_{n2}' - \rho_1 V_{n1}') + \\ + \left\{ \frac{V_{n1} (V_{n1} - V_{n2})}{a_1^2} [(x-1) V_{n1} + (x+1) V_{n2}] - x (V_{n1} - V_{n2}) \right\} p_1' - \\ - [(x-1) V_{n1} - (x+1) V_{n2}] p_2' \quad (3.13)$$

§ 4. Кинематические условия совместности движения

8. На поверхности разрыва обуславливается кинематическая совместность происходящих по обе ее стороны движений и «склеиваются» решения, найденные для каждого из этих движений интегрированием соответствующих систем дифференциальных уравнений. В краевые уравнения входят два параметра возмущенной поверхности разрыва: скорость ее [перемещения N' и угол β' между направлением касательной в некоторой ее точке и направлением фронта разрыва в стационарном движении. Оба параметра могут быть выражены с помощью одной и той же функции $\varphi'(\tau, t)$.

Для поверхности разрыва в стационарном движении $n = 0$. После сообщения потоку малых возмущений поверхность разрыва придет в колебание и ее ординаты n будут некоторыми функциями абсциссы τ и времени t , так что для возмущенного движения можно записать

$$n = \varphi'(\tau, t) \quad (4.1)$$

Скорость перемещения поверхности разрыва найдется из формулы

$$N' = \frac{\partial f}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad f = n - \varphi'(\tau, t) \quad (4.2)$$

Ограничиваясь первым порядком малости, из (4.2) получим

$$N' = \frac{\partial \varphi'(\tau, t)}{\partial t} \quad (4.3)$$

Для угла β' имеем очевидное соотношение $\text{tg } \beta' = \partial n / \partial \tau$, откуда, полагая по малости β' , что $\text{tg } \beta' = \beta'$ и приняв во внимание (4.1), найдем

$$\beta' = \frac{\partial \varphi'(\tau, t)}{\partial \tau} \quad (4.4)$$

9. Из краевых уравнений (3.12) и (3.13) могут быть исключены параметры поверхности разрыва. Таким путем будет установлена непосредственная связь между колебаниями в движениях до и после скачка в виде

$$G_1 V_{n1}' + H_1 p_1' = G_2 V_{n2}' + H_2 p_2' \quad (4.5)$$

Здесь V_n' и p' суть значения колебаний в точках возмущенной поверхности, где $n = \varphi'(\tau, t)$ есть малая величина, G и H суть постоянные коэффициенты, зависящие от параметров основного движения.

В пределах одной области движения зависимость колебаний от времени должна представляться, само собой разумеется, одной и той же функцией времени как для колебаний скорости, так и для колебаний давления, — в непрерывном поле скоростей действуют обычные акустические законы.

Зададим в движении до скачка гармонические колебания, т. е. такие колебания, которые выражаются с помощью тригонометрических (или показательной) функций.

Значения на поверхности скачка гармонических колебаний в движении до скачка могут быть (при ограничении первым порядком малости) представлены в виде

$$V_{n1}' = f_{v n1}(0, \tau) e^{ikt}, \quad p_1' = f_{p1}(0, \tau) e^{ikt} \quad (4.6)$$

Отвечающие (4.6) значения на поверхности скачка колебаний в движении за скачком представим первоначально в наиболее общем виде:

$$V_{n2}' = v_{pn2}(\varphi'(\tau, t), \tau, t), \quad p_2' = \mu_{p2}(\varphi'(\tau, t), \tau, t) \quad (4.7)$$

По подстановке (4.6) и (4.7) в (4.5) будем иметь тождество

$$\xi(\tau) e^{ikt} = \eta(\varphi'(\tau, t), \tau, t) \quad (4.8)$$

где левая часть относится к колебаниям до скачка и правая — к колебаниям за скачком.

Левая часть тождества (4.8) не зависит от $\varphi'(\tau, t)$, поэтому правая его часть также не может зависеть от $\varphi'(\tau, t)$. Таким образом получим

$$\xi(\tau) e^{ikt} = \eta(\tau, t) \quad (4.9)$$

Тождеством (4.9) доказывается:

а) что если колебания в потоке до скачка были гармоническими, то они останутся такими же и в потоке за скачком, т. е. на скачке гармонический тип волны не нарушается;

б) что колебания в обоих движениях выражаются одинаковыми функциями времени; они происходят, таким образом, с одинаковой круговой частотой, т. е. синхронно;

в) что колебания в обоих движениях выражаются также одинаковыми функциями координаты τ ; длина волны вдоль фронта скачка, таким образом, не меняется при переходе за скачок.

Разрыв (скачок) может иметь место только в отношении длины волны вдоль нормали к скачку (и, разумеется, в отношении амплитуды колебаний).

Тем же приемом нетрудно доказать, что и поверхность разрыва будет подвержена гармоническим колебаниям с той же длиной волны вдоль τ и с той же круговой частотой k .

Полученная теорема чрезвычайно облегчает поиски решений для колебаний поверхности скачка, т. е. функции $\varphi'(\tau, t)$, и для колебаний в потоке за скачком, если заданы колебания в потоке до скачка; они выражаются тождественными функциями координаты τ и времени t .

Доказательство базировалось на анализе краевых уравнений. Оно справедливо поэтому лишь при соблюдении нашей гипотезы о качественной стороне явления, положенной в основу вывода, согласно которой малым колебаниям в движении до скачка отвечают малые колебания в движении за скачком и малые колебания поверхности скачка. Его достаточность должна быть поэтому, в соответствии с обычными приемами математической физики, подтверждена в каждом отдельном случае возможностью удовлетворить краевым уравнениям решениями соответствующих систем дифференциальных уравнений.

§ 5. Волны, скользящие вдоль фронта скачка, и волны, нормальные к фронту скачка. Проявление неустойчивости

10. Некоторые предположения о физической природе факторов, могущих вызвать неустойчивость тех или иных режимов движения за скачком уплотнения, подсказали целесообразность сведения общей задачи к исследованию устойчивости указанных режимов отдельно по отношению к гармоническим волнам, скользящим вдоль фронта скачка, и отдельно по отношению к гармоническим волнам, распространяющимся в направлении нормали к скачку. Первые будем называть тангенциальными, вторые — нормальными. Как будет показано в дальнейшем, неустойчивость проявляется только под воздействием нормальных волн.

Для тангенциальных волн ищем решения систем дифференциальных уравнений (3.14) в виде

$$\begin{aligned} V_{\tau k}' &= f_{v\tau k}(n) \exp[i\lambda_k(\tau - V_{\tau}t)] \\ V_{nk}' &= f_{vnk}(n) \exp[i\lambda_k(\tau - V_{\tau}t)] \quad (k = 1, 2) \\ p_k' &= f_{pk}(n) \exp[i\lambda_k(\tau - V_{\tau}t)] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Задача приведет к решению уравнения для $f_{v\tau}$

$$\frac{d^2 f_{v\tau k}}{dn^2} + \lambda_k^2 \frac{a_k^2}{V_{nk}^2 - a_k^2} f_{v\tau k} = 0 \quad (5.2)$$

после чего остальные искомые функции определяются по цепочке

$$f_{pk} = \frac{i\rho_k V_{nk}}{\lambda_k} \frac{df_{v\tau k}}{dn}, \quad \frac{df_{vnk}}{dn} = -\frac{i}{\lambda_k} \frac{d^2 f_{v\tau k}}{dn^2} \quad (5.3)$$

Вводя обозначение

$$\frac{a_k^2}{V_{nk}^2 - a_k^2} = V_k^{\circ 2} \quad (5.4)$$

получим окончательно

$$\begin{aligned} V_{\tau k}' &= [A_k \exp(i\sigma_k n) + B_k \exp(-i\sigma_k n)] \exp[i\lambda_k(\tau - V_{\tau}t)] \\ V_{nk}' &= V_k^{\circ} [A_k \exp(i\sigma_k n) - B_k \exp(-i\sigma_k n)] \exp[i\lambda_k(\tau - V_{\tau}t)] \\ p_k' &= -\rho V_{nk} V_{nk}' \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $k=1$ для колебаний до скачка и $k=2$ для колебаний за скачком, причем

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_1}{V_1^\circ}, \quad \lambda_2 = \frac{\sigma_2}{V_2^\circ} \quad (5.6)$$

а из условия синхронности колебаний в обоих движениях и одинаковости длины волны вдоль τ

$$\lambda_2 = \lambda_1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\sigma_2}{V_2^\circ} = \frac{\sigma_1}{V_1^\circ}$$

Значения колебаний на поверхности разрыва, где $n = \varphi'(\tau, t)$ есть малая величина, могут быть записаны с точностью до малых первого порядка в виде

$$\begin{aligned} V_{\tau k}' &= C_k \exp [i\lambda_k (\tau - V_\tau t)] \\ V_{nk}' &= D_k \exp [i\lambda_k (\tau - V_\tau t)] \quad (k=1, 2) \\ p_k' &= -\rho_k V_{nk} V_{nk}' \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь введены обозначения

$$A_k + B_k = C_k, \quad A_k - B_k = D_k \quad (k=1, 2)$$

Положив

$$\varphi'(\tau, t) = E \exp [i\lambda_1 (\tau - V_\tau t)] \quad (5.8)$$

получим по подстановке в краевые уравнения (3.11)–(3.13) соответствующих значений колебаний и по сокращении на общий множитель $\exp [i\lambda_1 (\tau - V_\tau t)]$ три неоднородных алгебраических уравнения, из которых однозначно найдутся E , а также C_2 и D_2 (и, стало быть, A_2 и B_2).

Таким образом будет доказано, что найденные решения дифференциальных уравнений удовлетворяют краевым условиям на поверхности разрыва.

Устойчивость движения по отношению к заданным колебаниям определится из условия мнимости или действительности λ_1 , т. е. отношения σ_1 / V_1° или, при действительных значениях σ_1 (которые только и рассматриваются), мнимостью или действительностью V_1° . Но так как всегда $V_{n1} > a_1$ (это есть условие существования ударной волны), то величина

$$V_1^\circ = \frac{a_1}{\pm \sqrt{V_{n1}^2 - a_1^2}} \quad (5.9)$$

всегда действительна.

Итак, под воздействием тангенциальных волн поверхность разрыва будет подвержена малым периодическим колебаниям по времени. Тангенциальные волны, таким образом, не вызывают проявления неустойчивости скачка, каковы бы ни были параметры движения за скачком.

11. Для волн, распространяющихся в движении до скачка нормально к его фронту, ищем решения системы (3.14) при $k=1$ в виде

$$\begin{aligned} V_{\tau 1}' &= f_{v\tau 1}(\tau) \exp [i\lambda_1 (n - V_{n1} t)] \\ V_{n1}' &= f_{vn1}(\tau) \exp [i\lambda_1 (n - V_{n1} t)] \\ p_1' &= f_{p1}(\tau) \exp [i\lambda_1 (n - V_{n1} t)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Указанные решения могут быть записаны сразу по аналогии с решениями для тангенциальных волн в движении до скачка путем замены в них букв τ на n и обратно, а именно

$$\begin{aligned} V_{n1}' &= [A_1 \exp(i\sigma_1\tau) + B_1 \exp(-i\sigma_1\tau)] \exp[i\lambda_1(n - V_{n1}t)] \\ V_{z1}' &= V_1^\circ [A_1 \exp(i\sigma_1\tau) - B_1 \exp(-i\sigma_1\tau)] \exp[i\lambda_1(n - V_{n1}t)] \\ p_1' &= -\rho_1 V_{z1}' \end{aligned} \quad (5.11)$$

причем здесь попрежнему $\lambda_1 = \sigma_1 / V_1^\circ$, но

$$V_1^\circ = \frac{a_1}{\pm \sqrt{V_\tau^2 - a_1^2}} \quad (5.12)$$

В целях сокращения записи положим для задаваемых нами колебаний в движении до скачка $B_1 = 0$. Тогда в соответствии с теоремой о синхронности колебаний в движениях до и после скачка и об идентичности для тех и других колебаний функций, определяющих их зависимость от координаты τ , мы должны будем для движения за скачком искать решения системы (3.4) при $k=2$ в виде

$$\begin{aligned} V_{\tau 2}' &= f_{v\tau 2}(n) \exp\left[i\sigma_1\left(\tau - \frac{V_{n2}}{V_1^\circ} t\right)\right] \\ V_{n2}' &= f_{vn2}(n) \exp\left[i\sigma_1\left(\tau - \frac{V_{n2}}{V_1^\circ} t\right)\right] \\ p_2' &= f_{p2}(n) \exp\left[i\sigma_1\left(\tau - \frac{V_{n2}}{V_1^\circ} t\right)\right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем окончательные выражения для функций $f_2(n)$, которые при этом получаются:

$$\begin{aligned} f_{v\tau 2}(n) &= A_2 \exp(i\lambda_{21}n) + B_2 \exp(i\lambda_{22}n) \\ f_{vn2}(n) &= \frac{\lambda_{21}}{\sigma_1} A_2 \exp(i\lambda_{21}n) + \frac{\lambda_{22}}{\sigma_1} B_2 \exp(i\lambda_{22}n) \\ f_{p2}(n) &= -\rho_2 \left[\left(V_\tau^\circ + V_{n2} \frac{\lambda_{21}}{\sigma_1} \right) A_2 \exp(i\lambda_{21}n) + \left(V_\tau^\circ + V_{n2} \frac{\lambda_{22}}{\sigma_1} \right) B_2 \exp(i\lambda_{22}n) \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Здесь введено обозначение

$$V_\tau^\circ = V_\tau - \frac{V_{n2}}{V_1^\circ} \quad (5.15)$$

а λ_{21} и λ_{22} представляют собой два значения λ_2 согласно формуле

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_1}{a_2^2 - V_{n2}^2} \left[V_\tau^\circ V_{n2} \pm a_2 \sqrt{V_\tau^{\circ 2} + V_{n2}^2 + a_2^2} \right] \quad (5.16)$$

На колеблющейся поверхности разрыва, где $n = \varphi'(\tau, t)$ есть малая величина, будем иметь значения (ϵ точностью до малых первого порядка):

для колебаний до скачка

$$\begin{aligned} V_{z1}' &= V_1^\circ A_1 \exp \left[i\sigma_1 \left(\tau - \frac{V_{n1}}{V_1^\circ} t \right) \right] \\ V_{n1}' &= A_1 \exp \left[i\sigma_1 \left(\tau - \frac{V_{n1}}{V_1^\circ} t \right) \right] \\ p_1' &= -\rho_1 V_1 V_1^\circ A_1 \exp \left[i\sigma_1 \left(\tau - \frac{V_{n1}}{V_1^\circ} t \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

для колебаний за скачком

$$\begin{aligned} V_{z2}' &= (A_2 + B_2) \exp \left[i\sigma_1 \left(\tau - \frac{V_{n1}}{V_1^\circ} t \right) \right] \\ V_{n2}' &= \frac{1}{\sigma_1} (\lambda_{21} A_2 + \lambda_{22} B_2) \exp \left[i\sigma_1 \left(\tau - \frac{V_{n1}}{V_1^\circ} t \right) \right] \\ p_2' &= -\rho_2 \left[\left(V_{z^\circ} + V_{n2} \frac{\lambda_{21}}{\sigma_1} \right) A_2 + \left(V_{z^\circ} + V_{n2} \frac{\lambda_{22}}{\sigma_1} \right) B_2 \right] \exp \left[i\sigma_1 \left(\tau - \frac{V_{n1}}{V_1^\circ} t \right) \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

Предоставляем и в этом случае читателям убедиться, что при

$$\varphi'(\tau, t) = E \exp \left[i\sigma_1 \left(\tau - \frac{V_{n1}}{V_1^\circ} t \right) \right]$$

краевые уравнения удовлетворяются найденными решениями для колебаний в обеих областях потока и из них могут быть однозначно найдены E , A_2 и B_2 .

Устойчивость движения по отношению к заданным колебаниям определится при действительных значениях σ_1 мнимостью или действительностью V_1° .

Для рассматриваемых нормальных волн величина V_1° согласно (5.12) будет действительной при $V_z > a_1$ и мнимой при $V_z < a_1$.

В первом случае колебания имеют характер малых периодических движений, во втором случае они беспрестанно возрастают с течением времени.

Поэтому те движения, при которых $V_z > a_1$, оказываются устойчивыми и по отношению к нормальным волнам, а для движений, при которых $V_z < a_1$, выявляется неустойчивость.

§ 6. Косая ударная волна. Критерия ее устойчивости. Граничная кривая устойчивых режимов движения

12. Известно, что для любой, и в том числе криволинейной, ударной волны должно соблюдаться неравенство

$$V_{n1} \geq a_1 \quad (6.1)$$

требующее, чтобы проекция скорости потока перед скачком на направление нормали к скачку была не меньше скорости звука в невозмущенном потоке.

Так как

$$V_{n1} = V_1 \sin \beta, \quad \frac{a_1}{V_1} = \frac{1}{M_1} = \sin \varphi_1 \quad (6.2)$$

(где M_1 и φ_1 — число и угол Маха), то неравенству (6.1) эквивалентно условие

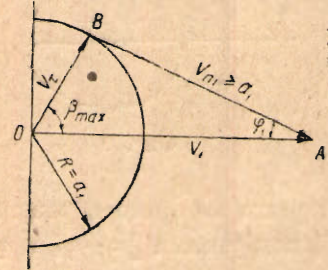
$$\sin \beta \geq \sin \varphi_1 \quad \text{или} \quad \beta \geq \varphi_1 \quad (6.3)$$

устанавливающее нижнюю границу для угла наклона ударной волны: этот

угол не может быть меньше угла Маха, отвечающего данной скорости V_1 и заданным начальным условиям a^* .

13. Для стационарной косої ударной волны соблюдение условий (6.1) и (6.3) является необходимым, но недостаточным. Ограничение, наложенное на форму ударной волны, потребовало определенного ограничения в отношении скоростей, каковое и было нами получено из условия устойчивости в виде

$$V_{\tau} \geq a_1 \quad (6.4)$$



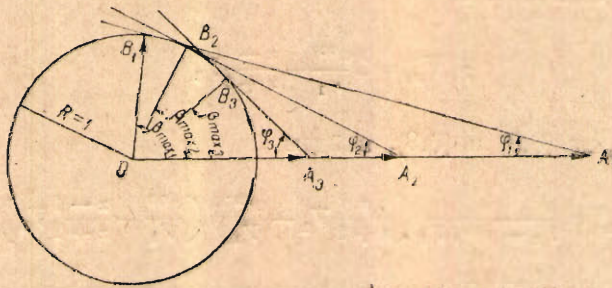
Фиг. 7

Таким образом, для стационарного косої скачка проекция скорости потока на направление скачка должна быть не меньше скорости звука в невозмущенном потоке.

С целью геометрической интерпретации полученного результата сделаем следующее построение.

Из произвольной точки O отложим отрезок OA , изображающий в некотором масштабе скорость невозмущенного потока V_1 . Проведем из этой же точки O как из центра окружность, изображающую в выбранном масштабе скорость звука a_1 (отвечающую скорости V_1 и заданным начальным условиям).

Наибольший угол наклона скачка β (β_{\max}), совместимый при данных V_1 и a^* с существовавшим стационарным косої скачком, найдется как угол между направлением V_1 (отрезком OA) и радиусом OB , проведенным к точке касания окружности с лучом AB (фиг. 7.)



Фиг. 8

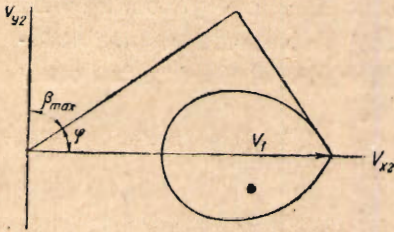
Уменьшим масштаб чертежа фиг. 7 в a_1 раз. Тогда вместо скорости V_1 на чертеже будет отложено число Маха, а радиус окружности будет равен единице. Пользуясь такой безразмерной диаграммой, можно для любого числа Маха определить максимальный угол наклона косої скачка (фиг. 8).

14. Так как $V_{\tau} = V_1 \cos \beta$, то неравенство (6.4) может быть заменено следующим эквивалентным неравенством:

$$\cos \beta \geq \sin \varphi_1 \quad \text{или} \quad \beta \leq \frac{1}{2} \pi - \varphi_1 \quad (6.5)$$

устанавливающим верхнюю границу для угла наклона косої ударной волны: этот угол не может быть больше угла, дополняющего до $\frac{1}{2} \pi$ угол Маха, отве-

чающий данной скорости невозмущенного потока V_1 и данным начальным условиям a^* .



Фиг. 9

Геометрическая интерпретация высказанного предложения представлена на фиг. 9.

15. Неравенства (6.3) и (6.5) могут быть объединены в одном

$$\varphi_1 \leq \beta \leq \frac{1}{2}\pi - \varphi_1 \quad (6.6)$$

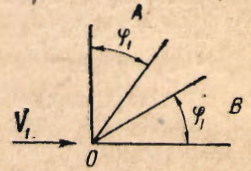
На чертеже фиг. 10 возможные направления косога скачка ограничены сектором AOB , стороны которого образованы лучами OA и OB , наклоненными к направлению V_1 под углами $\frac{1}{2}\pi - \varphi_1$ и φ_1

16. Воспользовавшись известными соотношениями, можно получить еще одну формулировку критерия устойчивости — для скоростей за скачком — в виде неравенства

$$V_{x2} \geq 2 \frac{a^{*2}}{V_1} - \frac{x-1}{x+1} V_1 \quad (6.7)$$

Имеем уравнение годографа скорости за скачком

$$\frac{V_{y2}^2}{(V_1 - V_{x2})^2} = \frac{V_{x2} - a^{*2}/V_1}{2V_1/(x+1) + a^{*2}/V_1 - V_{x2}} \quad (6.8)$$



Фиг. 10

На границе устойчивости

$$V_{x2} = 2 \frac{a^{*2}}{V_1} - \frac{x-1}{x+1} V_1 \quad (6.9)$$

Исключив V_{x2} из (6.8) и (6.9), найдем

$$V_{y2}^2 = \frac{4}{V_1 - a^{*2}/V_1} \left(\frac{x}{x+1} V_1 - \frac{a^{*2}}{V_1} \right) \left(\frac{a^{*2}}{V_1} - \frac{x-1}{x+1} V_1 \right) \quad (6.10)$$

Уравнения (6.9) и (6.10) суть параметрические уравнения граничной кривой, отсекающей в плоскости скоростей (при заданных начальных условиях, т. е. a^* , и любых значениях V_1) неустойчивые режимы движения за косым скачком.

Кривая, представленная уравнениями (6.9) и (6.10), нанесена на фиг. 11 на диаграмму семейства ударных поляр для всевозможных значений V_1 .

Существенно заметить, что зона неустойчивых режимов охватывает значительную область тех значений числа Маха, с которыми как раз и приходится встречаться в современных технических задачах.

17. Связь между углом наклона скачка β и углом поворота потока на скачке α может быть представлена формулой

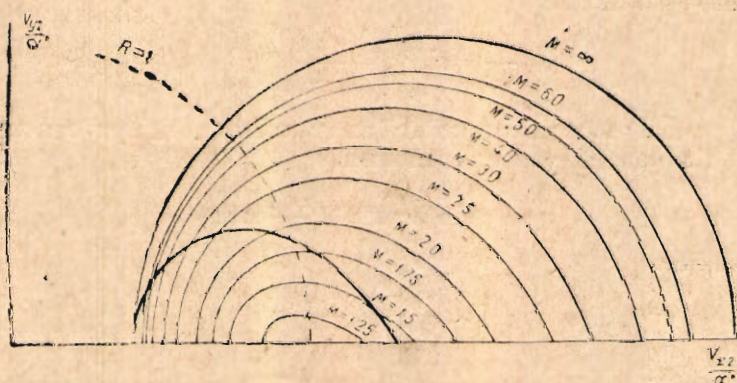
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta \left(\frac{\frac{1}{2}(x+1)M_1^2}{2 + \frac{1}{2}(x-1)M_1^2 + M_1^2 \cos^2 \beta} - 1 \right) \quad (6.11)$$

Для стационарного косо́го скачка должно соблюдаться неравенство (6.5), которое по сопоставлении с формулой (6.11) приводит к критерию устойчивости в виде

$$|\operatorname{tg} \alpha| \leq \operatorname{tg} \varphi_1 \left(\frac{\frac{1}{2}(z+1)M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(z-1)M_1^2 + M_1^2 \sin^2 \varphi_1} - 1 \right) \quad (6.12)$$

Выразив здесь $\sin \varphi_1$ и $\operatorname{tg} \varphi_1$ через M_1 , пользуясь (6.2), после несложных преобразований получим окончательно

$$|\operatorname{tg} \alpha| \leq \frac{M_1^2 - 2}{\{M_1^2(z-1)/2 + 2\} \sqrt{M_1^2 - 1}} \quad (6.13)$$



Фиг. 11

§ 7. Наименьшие значения числа Маха, совместимые с существованием стационарного косо́го скачка. Приближенное решение Кармана, формула Буземана, работы Тейлора и Махвола

18. Исследование таких движений, при которых в одних областях потока скорости являются сверхзвуковыми, а в других — дозвуковыми, сопряжено со значительными трудностями. Поэтому в большинстве решенных задач газовой динамики накладывается существенное ограничение, — предполагается, что ни в одной точке поля нет скорости, меньшей скорости звука. В этом предположении, в частности, построены теории крыла в плоско-параллельном сверхзвуковом потоке (Акерета, Буземана). Для выполнения указанного условия необходимо, чтобы скачок сидел на передней кромке крыла. Если же скачок является криволинейным и образуется впереди крыла, то за ним обязательно будет некоторая зона дозвуковых скоростей.

Из сказанного должно быть ясно, насколько важно для определения границ применимости найденных решений знать наименьшие числа Маха, при которых возможен стационарный косо́й скачок, и не только для определения границы, но и для выполнения многих численных подсчетов.

19. Вопрос о минимальных значениях числа Маха, совместимых с существованием косо́го скачка, был разобран ранее Т. Карманом в его работе «Проблемы сопротивления в сжимаемой жидкости»^[1].

Соотношение между углом поворота потока на скачке и углом наклона скачка Карман представляет в виде

$$\frac{\alpha_1^2}{V_1^2} = \sin^2 \beta - \frac{z+1}{2} \sin \alpha \frac{\sin \beta}{\cos(\beta-\alpha)} \quad (7.1)$$

(Формула 7.1 может быть получена из формулы 6.11).

Исследуя это равенство, Карман обнаруживает, что выражение в правой части равенства имеет вполне определенное максимальное значение для заданного значения α , как бы мало ни было это последнее. Ограничиваясь рассмотрением малых углов α , Карман заменяет равенство (7.1) следующим приближенным равенством

$$\frac{\alpha_1^2}{V_1^2} = \sin^2 \beta - \frac{z+1}{2} \alpha \operatorname{tg} \beta \quad (7.2)$$

При отыскании максимума этого выражения, т. е. при отыскании значения $M_{1 \min}^2$, Карман получает соотношение

$$\sin \beta \cos^2 \beta = \frac{z+1}{4} \alpha$$

или приближенно

$$\beta \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt[3]{\frac{z+1}{4} \alpha} \quad (7.3)$$

С помощью (7.3) Карман находит из (7.2) следующее выражение для минимальных значений числа Маха

$$M_{1 \min}^2 = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{z+1}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} \quad (7.4)$$

По поводу этой формулы Карман замечает, что при числах Маха, меньших предельного значения (7.4), никакой ударной волны у передней части тела возникнуть не может; в общем случае стационарная ударная волна может возникнуть где-нибудь впереди тела, причем за ударной волной движение будет иметь скорость меньшую, чем скорость звука.

20. Буземан^[1] пользуется в своей теории сверхзвукового крыла следующей приближенной формулой для определения максимального угла наклона крыла к направлению невозмущенного потока, при котором движение везде имеет скорость, большую скорости звука (и, стало быть, скачок сидит на передней кромке крыла)

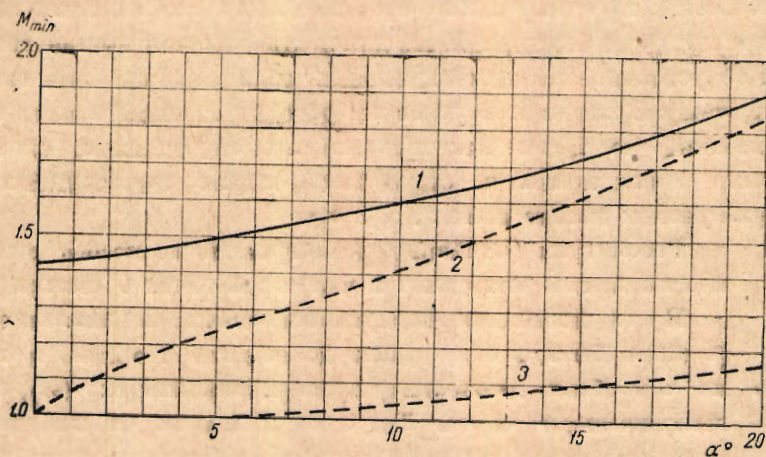
$$|\alpha_{\max}| = \frac{0.776 (M_1^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{z+1 M_1^2} \quad (7.5)$$

Формула Буземана (7.5) аналогична формуле Кармана (7.4), отличаясь от последней численным коэффициентом и сомножителем M_1^2 в знаменателе.

Тейлор и Маккол произвели уточненный расчет наименьших чисел Маха, совместимых с существованием скачка на теле, для клина и для конуса,

исходя из тех же, что и Карман (а также Буземан), оснований. Для конуса значения $M_{1\min}$, как и следовало ожидать, оказались при тех же значениях параметра α меньшими, чем для клина. Для конуса эксперимент показал хорошее совпадение с теорией. Для клина эксперимент отсутствует. Кривая (2) для клина и кривая (3) для конуса, рассчитанные Тейлором и Макколлом, нанесены пунктиром на график фиг. 12.

21. Карман и Буземан исходили при получении приведенных выше формул из условия, что стационарный косой скачок может всегда образоваться у вершины обтекаемого угла, лишь бы этот угол не превышал предельного угла соответствующей поляры. Та поляра, для которой указанные углы в точности равны, отвечает наименьшему числу Маха, совместимому с существованием стационарного косого скачка у вершины.



Фиг. 12

Как показало наше исследование, указанное условие является достаточным лишь при больших значениях числа Маха. Что касается того диапазона чисел Маха, который как раз представляет наибольший практический интерес, то здесь может быть указана другая, более высокая граница наименьших чисел Маха, совместимых с существованием стационарного косого скачка, — из условия устойчивости движения.

Для этого в выражении (6.13) следует взять знак равенства, соответствующий границе устойчивости. Таким образом получим формулу

$$\frac{M_{1\min}^2 - 2}{[M_{1\min}^2 (z - 1) / 2 + 2] \sqrt{M_{1\min}^2 - 1}} = |\operatorname{tg} \alpha| \quad (7.6)$$

Для исчезающе малых значений угла α из формулы (7.6) получим $(M_{1\min})_{\min} = \sqrt{2}$. По Карману при $\alpha \rightarrow 0$ $M_{1\min} \rightarrow 1$.

Приближенные значения числа Маха $M_{1\min}$ для значений α , равных 5, 10 и 20°, соответственно будут 1.5; 1.6 и 1.9.

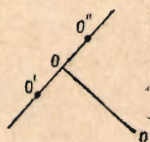
Кривая $M_{1\min} = f(\alpha)$, представленная уравнением (7.6), показана на графике фиг. 12 сплошной линией.

Для решения обратной задачи — определения наибольшего значения угла α , допускающего (из условия устойчивости) существование стационарного косо́го скачка при заданном числе Маха, формула имеет вид

$$|\operatorname{tg} \alpha_{\max}| = \frac{M_1^2 - 2}{\left[\frac{x-1}{2} M_1^2 + 2 \right] \sqrt{M_1^2 - 1}} \quad (7.7)$$

§ 8. Некоторые замечания

22. Основное движение полагается неустойчивым, если хотя бы одно частное решение систем дифференциальных уравнений (3.4), удовлетворяющее крайевым условиям, отвечает безгранично возрастающим с течением времени колебаниям. В этом смысле неустойчивость нормальных волн при $V_\tau < a_1$ представляется бесспорной. Но для подтверждения выставленного нами положения об устойчивости тангенциальных волн должна быть еще обоснована недопустимость задания в условиях рассматриваемой задачи аperiodических колебаний по τ , так как при мнимых значениях σ_1 оказались бы неустойчивыми и эти волны и, стало быть, всякое сверхзвуковое течение (ибо в сверхзвуковом потоке всегда $V_{n1} > a_1$).



Фиг. 13

Рассмотрим устойчивость безграничного косо́го скачка. Поместим начало координат в некоторой точке O скачка (фиг. 13).

Пусть колебания поверхности скачка в зависимости от τ (а стало быть, в силу ранее доказанной теоремы, и колебания по τ в обоих движениях) пропорциональны $\exp(\delta\tau)$, где δ есть действительное число. Тогда с удалением от выбранного начала координат вдоль τ колебания будут в одном из направлений неограниченно возрастать и, начиная от некоторой точки O' или O'' (в зависимости от выбора положительного направления оси τ и знака δ), предположение о малости колебаний окажется недопустимым уже в начальный момент времени. А так как выбор начала координат и положительного направления оси совершенно произволен, то нельзя указать никакой зоны, в пределах которой было бы допустимо предположение о малости колебаний в начальный момент времени. Короче говоря, в силу безличности координаты τ в задаче о безграничном косо́м скачке допустимо рассматривать лишь ограниченные колебания по τ ; задание же аperiodического закона колебаний по τ поставило бы физическое явление в зависимость от произвола в выборе начала координат и положительного направления оси τ и было бы по сути дела несовместимо с примененным методом малых колебаний.

23. Дифференциальные уравнения малых колебаний (3.4) являются линейными с постоянными коэффициентами. Это дает нам право сразу написать их частные решения в предположении пропорциональности всех колебаний мнимому экспоненциальному множителю $\exp(i\sigma\tau + i\lambda n + i\omega t)$. Из уравнений системы (3.4) тогда найдем, что

$$v = -V_\tau \sigma - V_n \lambda \pm a \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2} \quad (8.1)$$

откуда следует, что при действительных значениях как σ , так и λ (т. е. при периодических колебаниях по обеим координатам) ν также действительно. Поэтому неустойчивыми по времени могут быть лишь такие возмущения в адиабатическом потоке сжимаемого газа, которые хотя бы по одной координате являются аperiодическими. Так как по условиям нашей задачи σ может быть только действительным числом, то для возможности аperiодических колебаний во времени необходимо наличие мнимой части λ .

Рассмотрим чисто мнимые значения λ и ν , предполагая $\sigma^2 > |\lambda^2|$. Уравнение (8.1) распадется при этом на два:

$$\nu = -V_n \lambda \quad V_c \sigma = \pm a \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}$$

Из второго уравнения, решив его относительно λ , найдем

$$\lambda = \pm \sigma \frac{\sqrt{V_c^2 - a^2}}{a} = \pm \frac{\sigma}{V_0}$$

Тогда в силу первого уравнения (8.2)

$$\nu = \pm \frac{\sigma}{V_0} V_n$$

причем по условию ν есть мнимое число, а σ — действительное. Следовательно, V_0 есть мнимое число, т. е. $V_c < a_1$.

Колебания будут при этом пропорциональны

$$\exp(i\sigma\tau + i\lambda n + i\nu t) = \exp\left[i\sigma\tau \pm i\frac{\sigma}{V_0}(n - V_n t)\right]$$

Мы пришли, таким образом, к рассмотрению волн, названных нами ранее нормальными.

24. Начиная с некоторого, достаточно большого значения скорости невозмущенного потока V_1 , в зоне устойчивых режимов движения с точки зрения предлагаемой теории могут оказаться оба движения за скачком, отвечающие одному и тому же углу поворота потока α : с большим и с меньшим наклоном ударной волны. Это объясняется тем, что с увеличением скорости V_1 , особенно вблизи V_{\max} , значения угла Маха быстро уменьшаются и в пределе, при $V_1 = V_{\max}$, угол Маха обращается в нуль; поэтому граница устойчивости $\beta \leq \frac{3}{2}\pi - \varphi_1$ удаляется настолько, что допустимыми оказываются оба решения. Экспериментальный материал для столь больших чисел Маха отсутствует и в настоящее время этот вопрос прикладного значения, пожалуй, не имеет; его исследование тем не менее было бы не лишено теоретического интереса.

25. Устойчивость движения за скачком была исследована нами путем строгой теории без учета присутствия за скачком тела. Для того чтобы в решении учесть наличие тела, следовало бы ввести дополнительные граничные условия, а именно потребовать равенства нулю на поверхности тела перпендикулярных к этой поверхности колебаний скорости. Не учитывалась нами также вязкость, свойственная реальным газам, могущие иметь место при реальных течениях отклонения от адиабатичности и т. д. Учет все

этих факторов чрезвычайно усложнил бы задачу. Ни одна теория не может учесть всего многообразия условий, отличающих реальные явления. Она выбирает только те из них, которые могут считаться главными, определяющими ход процесса. Последнее же слово здесь принадлежит опыту, предугадывания для которого даются теорией.

Поступила в редакцию
28.VIII 1944.

Военная воздушная академия
имени Жуковского

J. I. LEVINSON.—L'ÉTUDE DE LA STABILITÉ DES COURANTS SUPERSONIQUES DE GAZ EN RELATION AVEC UNE DOUBLE SOLUTION DE LA THÉORIE DES ONDES DE CHOC

La théorie d'à présent ne donne pas d'unique solution analogue pour l'une des questions les plus essentielles de la dynamique gazeuse, notamment pour le mouvement de gaz au delà de l'onde de choc. Théoriquement deux valeurs de vitesse au delà de l'onde de choc sont également possibles, et de plus à chacune des deux vitesses possibles correspond son propre angle d'inclinaison de l'onde de choc dans la direction du vecteur de la vitesse du courant non troublé.

Pour éviter cette double solution l'auteur a étudié la stabilité du mouvement au delà de l'onde de choc profitant de la méthode des petites oscillations. Les résultats essentiels des recherches sont suivants:

Pour la stabilité d'une onde de choc oblique il est nécessaire que la projection de vitesse du courant sur la direction de l'onde de choc V_x ne soit pas plus petite que la vitesse du son dans le courant non troublé (a). Ensuite ce criterium de stabilité se réduit à une forme suivante:

L'angle d'inclinaison d'onde de choc oblique (β) ne peut pas être plus grand qu'un angle qui l'augmente jusqu'à l'angle de Mach correspondant à la vitesse du courant non troublé. (Les formules 6.4, 6.6, 6.7, fig. 8—11). Dans le plan des vitesses sur le diagramme de Bouseman une courbe est présentée qui limite les régimes instables du mouvement (fig. 12). On trouve pour chaque valeur de l'angle de retour du courant après l'onde de choc les plus petites valeurs du nombre de Mach (réduites de la condition de la stabilité) qui sont compatibles à la présence de la stable onde de choc oblique (formule 7.6). Ensuite les résultats de l'auteur sont comparés avec ceux de Karman (formule 7.4, fig. 13) qui de même a fait l'analyse de cette question, mais sur une base toute autre. La théorie proposée par l'auteur a expliqué les faits observés dans l'expérience (la réalisation de la plus grande vitesse des deux vitesses possibles au delà de l'onde de choc) et, en outre, elle a mis en avant une série de nouveaux thèses dont l'analyse expérimental aurait dû présenter un intérêt considérable au point de vue de la science et de la pratique.

ЛИТЕРАТУРА

1. Газовая динамика. Доклады на конференции по большим скоростям в авиации, состоявшейся в Риме 30/XI—6/X 1935 г. М.—Л. ГОИТИ. 1939.
2. Proceedings of the National Academy of Sciences. 1931 [P. 532].