Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

ОБ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПРАНДТЛЯ

И. Н. Векуа

(Тбилиси)

1. Рассмотрим крыло конечного размаха, равного $2a$, симметрично расположенное относительно плоскости yz. Будем предполагать, что направление оси z совпадает с направлением воздушного потока на бесконечности и что ось x направлена перпендикулярно плоскости симметрии крыла. Пусть $(b)\,x$ — хорда профиля крыла, соответствующего абсциссе x, а $\Gamma(x)$ — циркуляция воздушного потока вдоль контура этого профиля. Обозначим через $\alpha(x)$ геометрический угол атаки, а через V — скорость воздушного потока на бесконечности.

На основании симметрии крыла будем иметь

$$\Gamma(x)=\Gamma(-x), \qquad b(x)=b(-x), \ \alpha(x)=\alpha(-x) \qquad (-a \leqslant x \leqslant a) \tag{1.1}$$

В теории крыла доказывается, что $\Gamma(x)$ удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению, принадлежащему Прандтлю (см., например,[1], стр. 194;[3] стр. 164)

$$\frac{8\pi}{mb(x)}\Gamma(x)-\int\limits_{-a}^{a}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}\,dt=4\pi V\alpha(x) \tag{1.2}$$

где m — постоянное число, которое обычно приравнивается 2π; более точное значение этого числа равно 5.5 (см.[1] стр. 194).

Уравнение (1.2) — сингулярное, так как оно содержит интеграл, который надо понимать в смысле главного значения по Коши. Поэтому к нему нельзя непосредственно применить обычную теорию интегральных уравнений. Ниже мы показываем, что уравнение (1.2) может быть заменено уравнением Фредгольма, имеющим настолько простую структуру, что оно эффективно решается во многих практически важных случаях (см. ниже примеры).

2. Ограничимся рассмотрением случая, когда функция $b(x)$ имеет вид

$$b(x)=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{p(x)} \qquad (-a \leqslant x \leqslant a) \tag{2.1}$$

где $p(x)$ — аналитическая функция на сегменте $[-a, a]$, удовлетворяющая условиям

$$p(x)>0, \qquad p(x)=p(-x) \qquad (-a \leqslant x \leqslant a) \tag{2.2}$$

Очевидно, существует тогда односвязная область T, содержащая строго внутри сегмент $[-a, a]$ и ограниченная гладкой замкнутой кривой L, такая, что функция $p(\zeta)$ голоморфна в $T+L$. Удаляя из области T точки сегмента $[-a, a]$, мы получим двусвязную область, которую будем обозначать через T^*. Функция

$$b(\zeta)=\frac{\sqrt{a^2-\zeta^2}}{p(\zeta)} \tag{2.3}$$

очевидно, будет голоморфной в области T^*, причем будем иметь в дальнейшем в виду ту ветвь этой функции, которая удовлетворяет условию[1]

$$b_+(x)=-b_-(x)=b(x)>0 \qquad (-a<x<a) \tag{2.4}$$

3. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma(t)\,dt}{t-\zeta} \tag{3.1}$$

который, очевидно, представляет собой голоморфную функцию всюду на плоскости ζ, за исключением сегмента $[-a, a]$.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что $\Gamma(x)$ — непрерывная в смысле Гельдера функция на сегменте $[-a, a]$ и что ее производная $\Gamma'(x)$ имеет вид

$$\Gamma'(x)=\frac{\Gamma^*(x)}{(a^2-x^2)^{\lambda}}, \qquad \lambda<1 \tag{3.2}$$

где $\Gamma^*(x)$ — функция, непрерывная в смысле Гельдера на сегменте $[-a, a]$. Относительно функции $\alpha(x)$ будем предполагать, что она также непрерывна в смысле Гельдера на сегменте $[-a, a]$. На практике обычно α является постоянной.

Из (3.1) путем дифференцирования по ζ и интегрирования по частям, принимая во внимание (1.1), получим

$$\Phi'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma'(t)\,dt}{t-\zeta}-\frac{a\Gamma(a)}{\pi i(a^2-\zeta^2)} \tag{3.3}$$

В работе [2] Н. Мусхелишвили установлено, что функции $\Phi(\zeta)$ и $\Phi'(\zeta)$, при сделанных выше предположениях относительно $\Gamma(x)$, непрерывно продолжимы до внутренних точек сегмента $[-a, a]$ как со стороны верхней полуплоскости, так и со стороны нижней. На концах сегмента $[-a, a]$ функция $\Phi(\zeta)$ может иметь особенности лишь логарифмического типа, а интегральный член правой части (3.3) в этих точках может иметь особенности, порядок которых меньше единицы.

На основании известных свойств интегралов типа Коши, из (3.1) и (3.3) путем предельного перехода получим

$$\Gamma(x)=\Phi_+(x)-\Phi_-(x) \tag{3.4}$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt=\pi i\left[\Phi_+'(x)+\Phi_-'(x)\right]+\frac{2a\Gamma(a)}{a^2-x^2} \tag{3.5}$$

[1] Символы $f_+(x)$ и $f_-(x)$ будут обозначать вообще предельные значения функции $f(\zeta)$, определенной в окрестности сегмента $[-a, a]$, когда точка ζ приближается к точке x этого сегмента соответственно из верхней или нижней полуплоскости.

В силу (3.4), (3.5) и (2.4), уравнение (1.2) примет вид

$$\Phi_+'(x)+\frac{8i}{m}\frac{\Phi_+(x)}{b_+(x)}+\Phi_-'(x)+\frac{8i}{m}\frac{\Phi_-(x)}{b_-(x)}=4iV\alpha(x)+\frac{2ia\Gamma(a)}{\pi(a^2-x^2)} \tag{3.6}$$

Введем новую функцию

$$F(\zeta)=\left[\Phi'(\zeta)\frac{8i}{m}\frac{\Phi(\zeta)}{b(\zeta)}\right]\sqrt{a^2-\zeta^2} \tag{3.7}$$

которая, очевидно, голоморфна в T^* и непрерывно продолжима до внутренних точек сегмента $[-a, a]$ как со стороны верхней, так и со стороны нижней полуплоскости. В точках $-a$, $+a$ эта функция может иметь особенность, но лишь порядка, меньшего единицы [2]. Тогда (3.6) примет вид

$$F_+(x)-F_-(x)=4iV\alpha(x)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{2ia\Gamma(a)}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \tag{3.8}$$

Согласно формуле Коши имеем

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{F_+(t)-F_-(t)}{t-\zeta}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{F(t)}{t-\zeta}dt \tag{3.9}$$

где ζ — точка, принадлежащая области T^*.

Но в силу (3.7) и (3.8), формула (3.9) дает

$$F(\zeta)=\frac{2V}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\alpha(t)\sqrt{a^2-t^2}}{t-\zeta}dt+\frac{a\Gamma(a)}{\pi^2}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\frac{dt}{t-\zeta}+ \tag{3.10}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,\Phi'(t)}{t-\zeta}dt+\frac{4}{m\pi}\int_L\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{b(t)}\frac{\Phi(t)}{t-\zeta}dt$$

Используя формулу и теорему Коши, легко получим

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\frac{dt}{t-\zeta}=\frac{\pi i}{\sqrt{a^2-\zeta^2}},\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,\Phi'(t)}{t-\zeta}dt=0 \tag{3.11}$$

Далее, в силу (2.1) и (3.1), будем иметь

$$\int_L\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{b(t)}\frac{\Phi(t)}{t-\zeta}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\Gamma(\sigma)\,d\sigma\int_L\frac{p(t)\,dt}{(t-\zeta)(\sigma-t)}=$$
$$=\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{p(t)\,dt}{t-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{p(t)\,dt}{\sigma-t}\right]=-\int_{-a}^{a}\frac{p(\sigma)-p(\zeta)}{\sigma-\zeta}\Gamma(\sigma)\,d\sigma \tag{3.12}$$

В силу (3.1) и (3.112) из (3.10) получим

$$F(\zeta)=\frac{2V}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\alpha(t)\sqrt{a^2-t^2}}{t-\zeta}dt+\frac{ia\Gamma(a)}{\pi\sqrt{a^2-\zeta^2}}-\frac{4}{m\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(\sigma)-p(\zeta)}{\sigma-\zeta}\Gamma(\sigma)\,d\sigma \tag{3.13}$$

Отсюда путем предельного перехода получим формулу, которой мы воспользуемся ниже, —

$$F_+(x)+F_-(x)=\frac{4V}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\alpha(t)\sqrt{a^2-t^2}}{t-x}dt-\frac{8}{m\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(\sigma)-p(x)}{\sigma-x}\Gamma(\sigma)\,d\sigma \tag{3.14}$$

Из (3.7) имеем

$$\Phi_+'(x)+\frac{8i}{mb(x)}\Phi_+(x)=\frac{F_+(x)}{\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad \Phi_-'(x)-\frac{8i}{mb(x)}\Phi_-(x)=-\frac{F_-(x)}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{3.15}$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\begin{aligned}\Phi_+(x)&=\Phi_+(0)\,e^{-i\theta(x)}+\int_0^x e^{i[\theta(t)-\theta(x)]}\frac{F_+(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}\\ \Phi_-(x)&=\Phi_-(0)\,e^{i\theta(x)}-\int_0^x e^{-i[\theta(t)-\theta(x)]}\frac{F_-(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}\end{aligned} \tag{3.16}$$

где

$$\theta(x)=\frac{8}{m}\int_0^x\frac{dt}{b(t)} \qquad (-a\leqslant x\leqslant a) \tag{3.17}$$

Так как функция $\Gamma(x)$ — четная, из (3.1) получим

$$\Phi_+(0)=-\Phi_-(0)=\tfrac{1}{2}\Gamma(0)$$

Поэтому, согласно (3.4), из (3.16) будем иметь

$$\begin{aligned}\Gamma(x)=\Gamma(0)\cos\theta(x)&+\int_0^x\frac{\cos[\theta(t)-\theta(x)]}{\sqrt{a^2-t^2}}[F_+(t)+F_-(t)]\,dt\\ &+\int_0^x\frac{\sin[\theta(t)-\theta(x)]}{\sqrt{a^2-t^2}}\,i\,[F_+(t)-F_-(t)]\,dt\end{aligned} \tag{3.18}$$

На основании (3.8) и (3.14) это уравнение примет вид

$$\Gamma(x)=\Gamma(0)\cos\theta(x)+\Gamma(a)\,\omega_0(x)+\int_{-a}^{x}K_0(x,\sigma)\,\Gamma(\sigma)\,d\sigma+g_0(x) \tag{3.19}$$

где

$$\omega_0(x)=-\frac{2a}{\pi}\int_0^x\frac{\sin[\theta(t)-\theta(x)]}{a^2-t^2}\,dt \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}g_0(x)=-4V\int_0^x\sin[\theta(t)-\theta(x)]\,\alpha(t)\,dt&+\\ +\frac{4V}{\pi}\int_0^x\frac{\cos[\theta(t)-\theta(x)]}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt&\int_{-a}^{a}\frac{\alpha(\sigma)\sqrt{a^2-\sigma^2}}{\sigma-t}\,d\sigma\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$K_0(x,\sigma)=-\frac{8}{m\pi}\int_0^x\frac{\cos[\theta(t)-\theta(x)]}{\sqrt{a^2-t^2}}\;\frac{p(\sigma)-p(t)}{\sigma-t}\,dt \tag{3.22}$$

В случае $\alpha = \text{const}$, как легко видеть, $g_0(x)$ имеет вид

$$g_0(x) = -4V\alpha \int_0^x \left\{ \sin[\theta(t) - \theta(x)] + \frac{t \cos[\theta(t) - \theta(x)]}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right\} dt \tag{3.23}$$

Сделаем теперь допущение, которое обычно принимается в теории крыла

$$\Gamma(a) = \Gamma(-a) = 0 \tag{3.24}$$

Рассмотрим два случая, соответствующие условиям

$$\cos\theta(a) \neq 0, \qquad \cos\theta(a) = 0 \tag{3.25}$$

Для первого условия из (3.19) при $x = a$ в силу (3.24) получим

$$\Gamma(0) = -\frac{1}{\cos\theta(a)} \left\{ \int_{-a}^{+a} K_0(a, \sigma)\Gamma(\sigma)\, d\sigma + g_0(a) \right\} \tag{3.26}$$

Подставляя это в (3.19) и принимая во внимание (3.24), получим интегральное уравнение Фредгольма

$$\Gamma(x) - \int_{-a}^{+a} K(x, \sigma)\Gamma(\sigma)\, d\sigma = g(x) \tag{3.27}$$

где

$$g(x) = g_0(x) - \frac{g_0(a)\cos\theta(x)}{\cos\theta(a)}, \qquad K(x, \sigma) = K_0(x, \sigma) - \frac{K_0(a, \sigma)\cos\theta(x)}{\cos\theta(a)} \tag{3.28}$$

При втором условии (3.25) из (3.19), в силу (3.24), получим

$$\int_{-a}^{a} K_0(a, \sigma)\Gamma(\sigma)\, d\sigma + g_0(a) = 0 \tag{3.29}$$

Следовательно, в этом случае мы приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered} \Gamma(x) = \Gamma(0)\cos\theta(x) + \int_{-a}^{a} K_0(x, \sigma)\Gamma(\sigma)\, d\sigma + g_0(x) \\ \int_{-a}^{a} K_0(a, \sigma)\Gamma(\sigma)\, d\sigma + g_0(a) = 0 \end{gathered} \tag{3.30}$$

Первое из этих уравнений содержит неопределенную постоянную $\Gamma(0)$, которая, вообще говоря, должна определиться из второго уравнения. Если же эта постоянная не определится из указанного уравнения, то тогда ее надо подобрать таким образом, чтобы решение первого уравнения системы (3.30) было решением уравнения Прандтля (1.2).

Полученные уравнения (3.27) и (3.30) имеют весьма простую структуру, так как в том важном частном случае, когда функция $p(x) = \sqrt{a^2 - x^2} / b(x)$ — рациональная, ядра этих уравнений вырождаются, т. е. имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi_i(\sigma).$$

Но в последнем случае искомая функция $\Gamma(x)$ выразится в явном виде в квадратурах, так как решение уравнений (3.27) и (3.30) сводится тогда к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Отмеченный случай практически представляет большой интерес, так как крыло произвольной формы всегда можно аппроксимировать с любой наперед заданной точностью профилями указанного вида. Поэтому предложенный выше способ практически всегда приводит к эффективному решению уравнения Прандтля.

Примечание. При выводе интегрального уравнения (3.19) мы предполагали, что функция $\sqrt{a^2-x^2}\,/\,b(x)$ — аналитическая на сегменте $[-a, a]$. Однако это уравнение в окончательной своей форме остается фредгольмовым и в том случае, когда функция $\sqrt{a^2-x^2}\,/\,b(x)$ имеет, например, непрерывную производную первого порядка на сегменте $[-a, a]$. При таких более общих предположениях уравнение (3.19) получено иным путем Л. Г. Магнарадзе [4].

4. Рассмотрим несколько примеров:

Пример 1. Пусть имеется крыло эллиптической формы

$$b(x)=b_0\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \tag{4.1}$$

В этом случае $p(x)=\text{const}$ и, согласно (3.22), $K_0(x, \sigma)=0$. Следовательно, из (3.19), в силу (3.24), имеем

$$\Gamma(x)=\Gamma(0)\cos\theta(x)+g_0(x) \tag{4.2}$$

причем, как видно из (3.20), в нашем случае

$$\theta(x)=\varkappa\arcsin\frac{x}{a}\qquad\qquad \varkappa=\frac{8a}{mb_0} \tag{4.3}$$

Постоянная $\Gamma(0)$ определяется при помощи условия (3.24), если имеет место первое условие (3.25), которое в данном случае принимает вид $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\varkappa\right)\neq 0$. Если же $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\varkappa\right)=0$, то постоянную $\Gamma(0)$ надо определить из условия, что формула (4.2) представляет собой решение уравнения Прандтля. Таким образом, для крыла эллиптической формы при любом угле атаки α решение уравнения Прандтля строится в явном виде при помощи формулы (4.2). Если $\alpha=\text{const}$, то путем простых выкладок убеждаемся, что формула (4.2) принимает вид

$$\Gamma(x)=\Gamma(0)\cos\theta(x)-\frac{4a\alpha V}{1+\varkappa}\cos\theta(x)+\frac{4a\alpha V}{1+\varkappa}\sqrt{a^2-x^2}$$

Удовлетворяя теперь условию $\Gamma(a)=0$ и предполагая, что $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\varkappa\right)\neq 0$, получим известную формулу (см. например [1], стр. 203)

$$\Gamma(x)=\frac{4a\alpha V}{1+\varkappa}\sqrt{a^2-x^2} \tag{4.4}$$

Эта формула остается в силе и в том случае, когда $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\varkappa\right)=0$. Для этого достаточно убедиться в том, что функция $\cos\theta(x)=\cos(\varkappa\arcsin x/a)$, где $\varkappa=2k+1$, причем k — целое число, не удовлетворяет однородному уравнению Прандтля ($\alpha=0$), — это легко показать с помощью подстановки $x=a\cos\varphi$, если воспользоваться известной формулой [см., например,[1] стр. 202]

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi - \cos\psi}\, d\varphi = \pi \frac{\sin n\psi}{\sin\psi} \qquad (n \text{ — целое})$$

Пример 2. Рассмотрим крыло формы

$$b(x) = b_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\; \frac{1 + \nu x^2/a^2}{1 + \mu x^2/a^2} \tag{4.5}$$

где μ и ν — постоянные, причем $\mu > -1$, $\nu > -1$.

Так как в данном случае

$$p(x) = \frac{a}{b_0}\, \frac{1 + \mu x^2/a^2}{1 + \nu x^2/a^2}$$

из (3.22) и второго соотношения (3.28), ограничиваясь рассмотрением случая $\cos\theta(a) \neq 0$, найдем

$$K(x, t) = \frac{\varkappa(\nu - \mu)}{a^2 + \nu t^2}\varphi_1(x) + \frac{\varkappa(\nu - \mu)t}{a^2 + \nu t^2}\varphi_2(x) \tag{4.6}$$

где

$$\varphi_k(x) = \int_0^x \frac{\cos[\theta(\sigma) - \theta(x)]}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}}\, \frac{\sigma^{k-1}}{1 + \nu\sigma^2/a^2}\, d\sigma - \tag{4.7}$$

$$- \frac{\cos\theta(x)}{\cos\theta(a)} \int_0^a \frac{\cos[\theta(\sigma) - \theta(a)]}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}}\, \frac{\sigma^{k-1}}{1 + \nu\sigma^2/a^2}\, d\sigma \quad (k = 1, 2)$$

причем, как нетрудно найти из (3.17) и (4.5), в данном случае

$$\theta(x) = \frac{\varkappa\mu}{\nu}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{\varkappa(\nu - \mu)}{\nu\sqrt{1 + \nu}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{1 + \nu}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{при } \nu \neq 0 \tag{4.8}$$

$$\theta(x) = \varkappa\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)\arcsin\frac{x}{a} - \frac{\varkappa\mu}{2}\, x\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{при } \nu = 0 \tag{4.9}$$

Подставляя (4.6) в (3.27) и принимая во внимание, что функция $\Gamma(x)$ — четная, получим

$$\Gamma(x) = \varkappa(\nu - \mu)\varphi_1(x)\int_{-a}^a \frac{\Gamma(\sigma)\, d\sigma}{a^2 + \nu\sigma^2} + g(x) \tag{4.10}$$

Отсюда находим, что

$$\Gamma(x) = g(x) + \left[\varkappa(\nu - \mu)\int_{-a}^a \frac{g(\sigma)\, d\sigma}{a^2 + \nu\sigma^2}\right]\left[1 - \varkappa(\nu - \mu)\int_{-a}^a \frac{\varphi_1(\sigma)\, d\sigma}{a^2 + \nu\sigma^2}\right]^{-1}\varphi_1(x) \tag{4.11}$$

где $g(x)$ определяется при помощи первой из формул (3.28), а $\varphi_1(x)$ получается из (4.7) при $k = 1$. Эта формула дает решение уравнения Прандтля в явном виде для любого угла атаки α в случае крыльев формы (4.5). Важность этой формулы нетрудно оценить, если заметить, что, варьируя параметры μ и ν, мы можем охватить формулой (4.5) большое число практически важных форм крыльев. Например, в случае $\mu = 0$, $\nu = 0.9$ мы получим крыло, весьма близкое к прямоугольному, что видно из следующей таблицы:

$\frac{x}{a} =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$b(x) =$	1.00	1.02	1.03	1.05	1.06	1.06	1.03	0.95	0.75

$$b(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(1 + 0.9 \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Отметим, наконец, что, следуя предложенному выше приему, можно получить также явное выражение для $\Gamma(x)$ в случае крыльев формы

$$b(x) = b_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, \frac{1 + \nu_1 x^2/a^2 + \ldots + \nu_n x^{2n}/a^{2n}}{1 + \mu_1 x^2/a^2 + \ldots + \mu_n x^{2n}/a^{2n}}$$

Крылья такого вида в том частном случае, когда все $\mu_k = 0$, рассмотрены в работе Шмидта [5]. [Однако, полученные им результаты являются менее эффективными].

Поступила в редакцию
21 VIII 1944

Академия Наук Грузинской ССР
Тбилисский математический институт.

I. N. VEKUA.—ON THE PRANDTL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

This note presents a procedure for the solution of the integro-differential equation of Prandtl connected with the theory of a wing of finite span.

The problem is reduced to an integral equation of Fredholm rather simple in form. In many particular cases the solution of this equation may be obtained by quadratures.

Using this procedure the author thus constructs the solution for profiles having the form

$$b(x) = b_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, \frac{1 + \nu_1 \frac{x^2}{a^2} + \ldots + \nu_n \frac{x^{2n}}{a^{2n}}}{1 + \mu_1 \frac{x^2}{a^2} + \ldots + \mu_m \frac{x^{2m}}{a^{2m}}}$$

where a is half span, $b(x)$ is a cord of the profile, x is the distance of the profile from the axis of symmetry of the span, μ_k and ν_k are constant parameters. By varying parameters μ_k and ν_k this formula may be extended to include many profiles of practical significance.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аэродинамика под общей редакцией В. Ф. Дюренд. Т. II. Оборонгиз. 1939, [Стр. 194].
2. Мусхелишвили Н. И. Приложение интегралов типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений. Труды Тбил. мат. ин-та, т. X, 1941.
3. Голубев В. В. Теория крыла аэроплана конечного размаха. Труды ЦАГИ, вып. 108, 1931.
4. Магнарадзе Л. Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР. Т. III. № 6. 1942 [стр. 503—507].
5. Schmidt H. Strenge Lösungen zur Prandtlschen Theorie der tragenden Linie. Ztschr. f. angew. Math. und Mech. Bd. 17. Heft 2. [S. 101].