Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ

Н. Г. Четаев

(Москва)

Существо аналогии между двумя явлениями состоит в совпадении группы преобразований одного явления с группой преобразований другого явления.

Так, открытая Гамильтоном [1] оптико-механическая аналогия заключается в том, что группа движения консервативной голономной механической системы и группа распространения света по волновой теории Гюйгенса являются группами касательных или канонических преобразований.

В последующих оптических теориях, — Френеля, Коши, Максвелла — свет понимается как некоторый колебательный процесс; поэтому дальнейшее развитие оптико-механической аналогии в аналитической динамике можно искать в области колебательных движений.

Вообразим некоторую голономную механическую систему с n степенями свободы, на какую действуют силы, допускающие силовую функцию. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — обозначает координаты, $p_1, \ldots, p_n$ — им сопряженные импульсы,

$$H = H(t, q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

функция Гамильтона. Уравнения движения механической системы суть

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Рассмотрим некоторое движение этой материальной системы

$$q_i = q_i(t), \qquad p_i = p_i(t)$$

Называя его *ведущим* или *невозмущенным*, мы будем интересоваться движениями, близкими к нему и вызванными малыми возмущениями начальных данных.

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ обозначают отклонения координат $q_1, \ldots, q_n$, а $\eta_1, \ldots, \eta_n$ обозначают отклонения импульсов $p_1, \ldots, p_n$, то дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют в первом приближении установленный Пуанкаре [2] вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \eta_j \right)$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_j \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} \eta_j \right)$$

Мы предполагаем, что ведущее или невозмущенное движение таково, что коэффициенты этих уравнений в вариациях Пуанкаре представляют ограниченные, непрерывные функции времени t.

Пуанкаре установил, что если ξ_s, η_s и ξ_s', η_s' суть какие-либо два частные решения уравнений в вариациях, то выражение

$$\sum_s (\xi_s \eta_s' - \eta_s \xi_s')$$

сохраняет постоянное значение C. Это предложение указал еще Лагранж [ ].

Для каждого решения ξ_s, η_s всегда найдется другое решение ξ_s', η_s', для которого постоянная C в приведенном инварианте Пуанкаре будет отлична от нуля. В самом деле, для нетривиального решения ξ_s, η_s какая-либо из величин начальных значений $\xi_s^\circ, \eta_s^\circ$ в момент t_0 будет отлична от нуля; тогда второе частное решение всегда можно определить начальными значениями $\xi_s^{\circ\prime}, \eta_s^{\circ\prime}$ так, чтобы интересующая нас постоянная была отлична от нуля.

Пусть для двух решений в вариациях ξ_s, η_s и ξ_s', η_s' значение постоянной C отлично от нуля, а λ и λ' суть отвечающие этим решениям характеристичные числа Ляпунова [4].

Тогда из инварианта Пуанкаре имеем неравенство

$$\lambda + \lambda' \leqslant 0$$

Следовательно, если уравнения в вариациях имеют хотя бы одно частное решение с отличным от нуля характеристичным числом, то для них неизбежно будет существовать тогда по меньшей мере одно решение с отрицательным характеристичным числом, — невозмущенное движение будет при этом неустойчивым в первом приближении.

Следовательно, *устойчивость ведущего или невозмущенного движения может быть лишь тогда, когда характеристичные числа всех решений уравнений в вариациях суть нули.*

Поэтому, если невозмущенное движение устойчиво, то сумма S характеристичных чисел любой системы независимых решений для уравнений в вариациях Пуанкаре равняется нулю. Но след $\sum p_{ss}$ матрицы из коэффициентов уравнений в вариациях Пуанкаре тождественно равен нулю. И, значит, всякая система независимых решений уравнений в вариациях для устойчивого невозмущенного движения, удовлетворяя равенству

$$S + \text{хар. число} \exp - \int \sum p_{ss}\, dt = 0$$

будет нормальной в смысле Ляпунова [4].

Обозначим через

$$\xi_{sr}, \eta_{sr} \qquad (r = 1, \ldots, 2n)$$

систему независимых решений для уравнений в вариациях, определенную начальными значениями для $t = t_0$

$$\xi_{sr}^\circ = \delta_{sr}, \qquad \eta_{sr}^\circ = \delta_{s,\, r-n}$$

где δ_{sn} обозначает символ Кронекера, т. е. нуль, когда числа s и r различны, и единицу, когда числа s и r равны.

Если невозмущенное движение устойчиво, то решения ξ_{sr}, η_{sr} имеют не только равные нулю характеристичные числа, но являются также и ограниченными. Поэтому новая система переменных

$$z_r = \sum_s (\xi_s \eta_{sr} - \eta_s \xi_{sr})$$

определенная линейными преобразованиями с ограниченными коэффициентами, с равным $(-1)^n$ определителем преобразования и с ограниченными минорами последнего, имеет такое же обратное преобразование. Переменные z_r удовлетворяют уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\frac{dz_r}{dt} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, 2n)$$

Следовательно, *если невозмущенное движение устойчиво, то отвечающие уравнения в вариациях Пуанкаре являются приводимыми к системе уравнений с постоянными коэффициентами* при помощи неособого линейного преобразования с ограниченными коэффициентами, допускающего такое же обратное преобразование.

Если невозмущенное движение устойчиво, то всякие близкие к нему возмущенные движения описываются решениями ξ_s, η_s, имеющими, как видели, равные нулю характеристичные числа. А это, характеризуя в известном смысле колебательный характер возмущенных движений в малом, заставляет, ради задачи Коши о развитии оптико-механической аналогии Гамильтона, задаться вопросом о группе возмущенных движений в малом вблизи устойчивого невозмущенного движения.

Если невозмущенное движение устойчиво, то для возмущенного движения, определенного бесконечно малыми возмущениями начальных значений координат и импульсов, уравнения в вариациях Пуанкаре будут иметь место произвольно долго.

Решения уравнений в вариациях Пуанкаре, определенные начальными данными $\xi_s^\circ, \eta_s^\circ$, суть

$$\xi_s = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^\circ \xi_{sj} + \eta_j^\circ \xi_{s,j+n}),$$

$$\eta_s = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^\circ \eta_{sj} + \eta_j^\circ \eta_{s,j+n})$$

Определитель этих линейных преобразований между ξ_s, η_s и $\xi_j^\circ, \eta_j^\circ$ согласно известной из теории дифференциальных уравнений теореме Лиувилля равен

$$\mathrm{const} \times \exp \int \sum p_{ss}\, dt$$

т. е. единице.

Значит, преобразования между ξ_s, η_s и $\xi_s^\circ, \eta_s^\circ$ представляют группу линейных унимодулярных преобразований. Но для устойчивого невозмущенного движения уравнения в вариациях Пуанкаре являются приводимыми и, следовательно, при равных нулю характеристичных числах, согласно результатам Ляпунова [4], уравнения эти должны иметь знакоопределенный интеграл в виде квадратичной формы. Иными словами, группа возмущенных движений, бесконечно близких к устойчивому невозмущенному движению, есть группа линейных унимодулярных преобразований со знакоопределенным квадратичным инвариантом.

Этим задача разрешена. Ван дер Верден [5] для двухмерного пространства рассмотрел представления группы линейных унимодулярных преобразований с фундаментальным инвариантом вида инварианта Пуанкаре и с отражением (отвечающим условию существования знакоопределенного инварианта) и показал, что такая группа имеет представление в полной группе Лоренца.

Поступила в редакцию
23 XII 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

N. G. ČETAJEV.—CONCERNING A PROBLEM OF CAUCHY

It is known that the analogy between two phenomena from the mathematical point of view consists of the coincidence of the group of the transformations of one phenomenon with that of another.

Hamilton[1] has shown that the group of movements of a conservative holonomic mechanical system and the group of propagation of light, according to the Huyghens' wave theory, is the same group of the tangential or canonic transformations.

In this paper it is proved that the group of distributed movements of the Hamilton mechanical system in the vicinity of the stable movement of this system may be presented in the complete group of Lorenz' transformations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hamilton. Transactions R. Irish Acad. Vol. 15 (P. 69), 1828; Vol 16 (P. 4, 93) 1830; Vol. 17 (P. 1), 1837.
2. Poincaré. Acta mathematica. V. 13 (P. 1—270), 1890.
3. Лагранж. Аналитическая механика. Т. I, ч. 2, от. 5, n°7. ОНТИ. 1938.
4. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. п. 6—10, п. 21.
5. Ван дер Верден. Метод теории групп в квантовой механике. § 20.