Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том IX, 1945

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ АРТИЛЛЕРИЙСКИХ СНАРЯДОВ[1]

С. А. Казаков

(Москва)

I. Вычисление траектории центра тяжести артиллерийского снаряда опирается на интегрирование некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений; при различном выборе независимого переменного и переменных этой системе можно придавать различную форму.

Обозначим через x, y координаты центра тяжести снаряда в некоторый момент времени t в прямоугольных осях, горизонтальной и вертикальной, с произвольным началом; пусть x', y' — проекции скорости $\mathbf{v}$ снаряда на те же оси и $p = \operatorname{tg}\theta$ — тангенс угла наклона касательной траектории к горизонтальной оси.

В этих переменных[2] система дифференциальных уравнений будет иметь вид

$$\frac{dx'}{dx} = -K, \qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{x'^2}, \qquad \frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'} \tag{A}$$

где

$$K = cG\left(v\sqrt{\tau_0/\tau}\right) H_\tau(y)$$

причем $H_\tau(y)$ есть функция изменения плотности воздуха в зависимости от высоты, а $G\left(v\sqrt{\tau_0/\tau}\right)$ есть функция сопротивления воздуха в зависимости от скорости снаряда и температур воздуха, c — так называемый баллистический коэффициент.

При численном интегрировании дифференциальных уравнений баллистики обычно применяют способ Адамса (Штермера); обойтись без экстраполяции при численном интегрировании дифференциальных уравнений, повидимому, не представляется возможным, но экстраполировать желательно такие вспомогательные величины, которые оказывали бы малое влияние на результаты, а потому мы избираем хотя и близкий, но несколько иной путь.

Представим себе, что нам удалось получить координаты и скорость центра тяжести снаряда для совокупности последовательных точек траектории от

[1] Публикуемые две работы известного астронома профессора Московского университета Сергея Алексеевича Казакова (1873—1936) были обнаружены в его архиве научным сотрудником Математического института Академии Наук СССР О. П. Крамер. В работах содержится оригинальный метод численного интегрирования основных дифференциальных уравнений внешней баллистики. По виду рукописей, — вполне подготовленных к печати, можно полагать, что смерть помешала автору передать их для опубликования.

[2] Н. А. Упорников. Вычисление траекторий. Изд АНИИ, 1931 (стр 14).

(x_0, y_0, v_0) до (x_i, y_i, v_i); при помощи y, v по общим формулам можем найти числовые значения K, правой части первого дифференциального уравнения нашей системы. Зная ряд числовых и только числовых значений величины K для соответственных числовых значений аргумента (независимого переменного x) и применяя какую-либо интерполяционную формулу, мы можем представить K в виде целого многочлена, расположенного по степеням некоторой вспомогательной переменной w, равной $(x-x_i)/w$, где w есть произвольно заданный постоянный интервал:

$$K = K_0 + K_1\xi + K_2\xi^2 + K_3\xi^3 + \ldots \qquad \left(\xi = \frac{x-x_i}{w}\right) \tag{1}$$

Первый член ряда, очевидно, есть значение величины K при $\xi = 0$, т. е. для $x = x_i$; коэффициенты прочих членов можно считать известными, — выводом их числовых значений мы предпочтем заняться позднее; здесь заметим лишь, что коэффициенты членов высоких порядков вообще оказываются малыми при интервалах w, не очень больших, а из наличных числовых таблиц сопротивления воздуха находятся, вообще говоря, не очень уверенно.

При помощи ряда (1) из первого уравнения системы (А) находим

$$\frac{dx'}{d\xi} = -wK$$

Отсюда

$$x' = x_i' - wK_0\xi - \frac{w}{2}K_1\xi^2 - \frac{w}{3}K_2\xi^3 - \frac{w}{4}K_3\xi^4 - \ldots$$

или

$$x' = x_i'\{1 - (\alpha_0\xi + \alpha_1\xi^2 + \alpha_2\xi^3 + \alpha_3\xi^4 + \ldots)\} \tag{2}$$

где введены обозначения

$$\alpha_0 = \frac{w}{x_i'}K_0, \alpha_1 = \frac{1}{2}\frac{w}{x_i'}K_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}\frac{w}{x_i'}K_2, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4}\frac{w}{x_i'}K_3, \ldots \tag{3}$$

В частности, выражение (2) при $\xi = 1$ дает нам

$$x_{i+1}' = x_i'\{1 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)\} \tag{4}$$

Обращаемся ко второму дифференциальному уравнению системы (А). Находим

$$\frac{dp}{d\xi} = -\frac{gw}{x'^2}$$

или по исключении x' при помощи (2)

$$\frac{dp}{d\xi} = -\left[\frac{gw}{x_i'^2}\frac{1}{(1-\alpha_0\xi)^2}\right]\left[1 - \frac{A}{1-\alpha_0\xi}\right]^{-2}, \quad A = \alpha_1\xi^2 + \alpha_2\xi^3 + \ldots$$

Разложим второй множитель в правой части последнего дифференциального уравнения в ряд по степеням A, сохраним лишь член с первой степенью и введем обозначения

$$\gamma_0 = \frac{w}{x_i'}, \qquad \gamma = g\gamma_0^2 \tag{5}$$

Получим

$$\frac{dp}{d\xi} = -\frac{\gamma}{w}\frac{1}{(1-\alpha_0\xi)^2} - \frac{2\gamma}{w}\frac{\alpha_1\xi^2 + \alpha_2\xi^3}{(1-\alpha_0\xi)^3} - \ldots$$

Отсюда непосредственно имеем

$$p-p_i=-\frac{\gamma}{w}\left(P_0(\xi)+\alpha_1 P_1(\xi)+\alpha_2 P_2(\xi)+\ldots\right)$$

где принято

$$P_0(\xi)=\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi}{(1-\alpha_0\xi)^2}=\frac{\xi}{1-\alpha_0\xi}$$

$$P_1(\xi)=2\int\limits_0^{\xi}\frac{\xi^2 d\xi}{(1-\alpha_0\xi)^3}=\frac{2}{\alpha_0^3}\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha_0\xi)^{-2}-2(1-\alpha_0\xi)^{-1}-\ln(1-\alpha_0\xi)+\frac{3}{2}\right\}$$

$$P_2(\xi)=2\int\limits_0^{\xi}\frac{\xi^3 d\xi}{(1-\alpha_0\xi)^3}=$$

$$=\frac{2}{\alpha_0^4}\left\{\frac{1}{2}(1-\alpha_0\xi)^{-2}-3(1-\alpha_0\xi)^{-1}-3\ln(1-\alpha_0\xi)+(1-\alpha_0\xi)+\frac{3}{2}\right\}$$

. . . .

Разлагая функции ξ в правых частях выражения $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ в бесконечные ряды по степеням ξ, без труда получаем выражения

$$P_0(\xi)=\frac{\xi}{1-\alpha_0\xi},\quad P_1(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n+3}\alpha_0^n\xi^{n+3},\quad P_2(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n+4}\alpha_0^n\xi^{n+4} \tag{6}$$

и т. д. Принимая $\xi=1$, находим разность

$$p_{i+1}-p_i=-\frac{\gamma}{w}\left(P_0+\alpha_1 P_1+\alpha_2 P_2+\ldots\right) \tag{7}$$

причем

$$P_0=\frac{1}{1-\alpha_0},\quad P_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n+3}\alpha_0^n,\quad P_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n+4}\alpha_0^n,\ \ldots \tag{8}$$

Очевидно, числовые значения величин P_0, P_1, P_2, ..., зависящие только от α_0, могут быть заключены в таблицы, расположенные по этому аргументу.

Переходим к выводу координаты y. В силу третьего из уравнений системы (А) пишем

$$\frac{dy}{d\xi}=wp$$

и, используя выше найденное выражение p, получаем

$$y=y_i+wp_i\xi+\gamma\frac{\ln(1-\alpha_0\xi)+\alpha_0\xi}{\alpha_0^2}-\gamma\left\{\alpha_1\int\limits_0^{\xi}P_1(\xi)\,d\xi+\alpha_2\int\limits_0^{\xi}P_2(\xi)d\xi+\ldots\right\}$$

Отсюда следует

$$y_{i+1}-y_i=wp_i-\gamma(Y_0+\alpha_1 Y_1+\alpha_2 Y_2+\ldots) \tag{9}$$

где принято

$$Y_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{n+2},\quad Y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}\alpha_0^n,\quad Y_3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+4)(n+5)}\alpha_0^n,\ \ldots \tag{10}$$

Нам остается получить выражение t как функции независимого переменного x. Из последнего уравнения системы (А) находим

$$\frac{dt}{d\xi}=\frac{w}{x'}$$

или по исключении x',

$$\frac{dt}{d\xi}=\frac{w}{x_i'}\frac{1}{1-\alpha_0\xi}\left(1-\frac{A}{1-\alpha_0\xi}\right)^{-1}$$

Опять разложим второй множитель правой части по степеням A, сохранив лишь первую степень этой величины; получим

$$\frac{dt}{d\xi}=\gamma_0\left\{\frac{1}{1-\alpha_0\xi}+\frac{\alpha_1\xi^2+\alpha_2\xi^3+\ldots}{(1-\alpha_0\xi)^2}+\ldots\right\}$$

Отсюда выводим

$$t-t_i=\gamma_0\{T_0(\xi)+\alpha_1T_1(\xi)+\alpha_2T_2(\xi)+\ldots\}$$

причем полагаем

$$T_0(\xi)=-\frac{1}{\alpha_0}\ln(1-\alpha_0\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\alpha_0{}^n\,\xi^{n+1}$$

$$T_1(\xi)=\frac{1}{\alpha_0{}^3}\left\{(1-\alpha_0\xi)^{-1}+2\ln(1-\alpha_0\xi)-(1-\alpha_0\xi)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+3}\alpha_0{}^n\,\xi^{n+3}$$

$$T_2(\xi)=\frac{1}{\alpha_0{}^4}\left\{(1-\alpha_0\xi)^{-1}+3\ln(1-\alpha_0\xi)-3(1-\alpha_0\xi)+\frac{1}{2}(1-\alpha_0\xi)^2+\frac{3}{2}\right\}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+4}\alpha_0{}^n\xi^{n+4}$$

. . . .

Допуская $\xi=1$, находим

$$t_{i+1}-t_i=\gamma_0(T_0+\alpha_1T_1+\alpha_2T_2+\ldots) \tag{11}$$

при обозначениях

$$T_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\alpha_0{}^n,\qquad T_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+4}\alpha_0{}^n,\qquad T_2=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{n+4}\alpha_0{}^n \tag{12}$$

Все вспомогательные величины y и T, подобно P, могут быть заключены в числовые таблицы, расположенные по аргументу α_0.

Формулы (4), (7), (9), (11) позволяют произвести переход от точки, вычисленной в начале некоторого интервала, к точке следующей, например, от (x_i, y_i) к (x_{i+1}, y_{i+1}), но мы должны дополнить наши рассуждения и указать вывод числовых значений вспомогательных величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Если известен ряд значений функций для соответственных значений аргумента, то при помощи той или другой интерполяционной формулы можем представить функцию целым многочленом, расположенным по степеням аргумента; например, привлекая формулу Гаусса, имеем

$$f(x_i+\xi w)=f_i+\xi f_{i+\frac{1}{2}}'+\frac{\xi(\xi-1)}{2}f''_i+\frac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{6}f_{i+\frac{1}{2}}'''+\ldots$$

или

$$f(x_i+\xi w)=f_i+\xi f_{i-\frac{1}{2}}'+\frac{\xi(\xi+1)}{2}f_i''+\frac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{6}f_{i-\frac{1}{2}}'''+\ldots$$

Заметим, что для обозначения числовых значений функции и разностей различных порядков мы пользуемся астрономическим знакоположением, а для записи результатов при числовых выкладках вводим обычную схему астрономов.

Из формулы Гаусса легко получить

$$f(x_i+\xi w)=f_i+\xi\left(f_{i-\frac{1}{2}}'+\frac{1}{2}f_i''-\frac{1}{6}f_{i-\frac{1}{2}}'''\right)+\frac{\xi^2}{2}f_i''+\frac{\xi^3}{6}f_{i-\frac{1}{2}}'''+\ldots$$

Сопоставляя это выражение функции с разложением (1), непосредственно получаем

$$K_0=f_i,\quad K_1=f_{i-\frac{1}{2}}'+\frac{1}{2}f_i''-\frac{1}{6}f_{i-\frac{1}{2}}''',\quad K_2=\frac{1}{2}f_i'',\ K_3=\frac{1}{6}f_{i-\frac{1}{2}}''',\ \ldots$$

Вводя обозначения

$$a_0=\frac{w}{x_i'}f_i,\quad a_1=\frac{w}{x_i'}\frac{1}{2}f_{i-\frac{1}{2}}',\quad a_2=\frac{w}{x_i'}\frac{1}{12}f_i'',\ a_3=\frac{w}{x_i'}\frac{1}{24}f_{i-\frac{1}{2}}''',\ \ldots \tag{13}$$

находим

$$\alpha_0=a_0,\quad \alpha_1=a_1+3a_2-2a_3,\quad \alpha_2=2a_2,\quad \alpha_3=a_3,\ \ldots \tag{14}$$

Таким образом определение вспомогательных величин $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ для некоторого интервала $w=x_{i+1}-x_i$ требует знания ряда значений функций f_i и разностей различных порядков. Значения f_i и $f'_{i-\frac{1}{2}}$ даны предшествующими вычислениями; значение $f_{i-\frac{1}{2}}'''$ может быть найдено простым экстраполированием по ходу предшествующих разностей третьего порядка, ибо это—величина мало влиятельная и вообще определяемая неуверенно; вывод f_i'' требует больше внимания; в иных случаях мы можем получить f_i'' простым экстраполированием по ходу предшествующих вторых разностей; иногда, например, когда скорость снаряда близка к скорости звука, указанный прием дает плохие результаты, и мы ведем работу иначе. Зная значения скорости и высоты, до v_i и y_i включительно, простым экстраполированием находим v_{i+1} и y_{i+1}, с ними получаем K_{i+1} по общей формуле

$$K_{i+1}=cG(v_{i+1}\sqrt{\tau_0/\tau})H_\tau(y_{i+1})$$

Отсюда непосредственно выводятся значения f_{i+1} и экстраполированием достаточно точно находятся значения f_i''.

Заметим, что формула Гаусса не единственная, которой можно пользоваться: так, первая формула Ньютона дает нам совокупность следующих формул, выводимых по прежнему шаблону

$$a_0=\frac{w}{x_i'}f_i,\quad a_1=\frac{w}{x_i'}\frac{1}{2}f_{i+\frac{1}{2}}',\quad a_2=\frac{w}{x_i'}\frac{1}{12}f_{i+1}'',\quad a_3=\frac{w}{x_i'}\frac{1}{24}f_{i+\frac{3}{2}}''',\ \ldots \tag{13'}$$

$$\alpha_0=a_0,\quad \alpha_1=a_1-3a_2+4a_3,\quad \alpha_2=2a_2-4a_3,\quad \alpha_3=a_3,\ \ldots \tag{14'}$$

Взяв вторую формулу Ньютона

$$f(x_i+\xi w)=f_i+\xi f_{i-\frac{1}{2}}'+\frac{1}{2}\,\xi(\xi+1)\,f_{i-1}''+\frac{1}{6}\,\xi(\xi+1)(\xi+2)\,f_{i-\frac{3}{2}}'''+\ldots$$

выводим систему

$$a_0=\frac{w}{x_i'}f_i\,,\quad a_1=\frac{w}{x_i'}\frac{1}{2}f'_{i-\frac{1}{2}}\,,\quad a_2=\frac{w}{x_i'}\frac{1}{12}f_{i-1}''\,,\quad a_3=\frac{w}{x_i'}\frac{1}{24}f_{i-\frac{3}{2}}'''\,,\;\ldots \tag{13''}$$

$$\alpha_0=a_0\,,\quad \alpha_1=a_1+3a_2+4a_3\,,\quad \alpha_2=2a_2+4a_3\,,\quad \alpha_3=a_3 \tag{14''}$$

Прибавим, что группой формул (13), (14) мы пользуемся в той части работы, где вычисление точек траектории идет полным, нормальным ходом; совокупность (13′), (14′) выгодна в начале вычисления, и группа (13″), (14″) служит нам для вывода последней точки траектории.

Приступая к вычислению траектории, имеем в своем распоряжении значения y_0, v_0 для данного начального x_0; отсюда выводим K_0. Опираясь на эти значения и пренебрегая всеми α_1, α_2, . . . , при помощи (13′), (14′) находим первые приближения y_1, v_1. Отсюда с той же группой (13′), (14′), пренебрегая только α_2, α_3, вычисляем вторые приближенные значения y_1, v_1 (обычно весьма удовлетворительные) и при помощи (13), (14) с той же точностью выводим первые приближения y_2, v_2. Выполнив еще одно перевычисление значений (y_1, v_1) и (y_2, v_2), можем считать ряд приближений законченным и дальнейшую работу вести нормальным порядком, следуя вышеуказанным правилам.

Переходя к оценке предлагаемого нами метода вычисления траекторий, полагаем, что при большой начальной скорости центра тяжести снаряда, при не очень большом баллистическом коэффициенте, вообще при значительной дальности полета наш способ представляет несомненное преимущество перед способом Адамса, ибо он позволяет пользоваться большими интервалами интегрирования и выбирать их в 4, 6 и даже в 8 км. При малой начальной скорости снаряда, больших баллистических коэффициентах наш метод не представляет преимуществ, ибо скорость снаряда быстро приближается к критическому значению скорости звука.

Что касается техники вычислений; то применение логарифмической линейки, по нашему мнению, не представляет большой выгоды, предпочтительнее вести работу с помощью счетных машин.

II. Тем же приемом, почти по тому же шаблону работа может быть проведена и при ином выборе независимого переменного.

При интегрировании дифференциальных уравнений движения центра тяжести снаряда вместо горизонтальной координаты мы можем принять за независимое переменное время t.

Сохраняя принятые обозначения, мы имеем систему уравнений вида[1]

$$\frac{dx'}{dt}=-Kx'\,,\qquad \frac{dx}{dt}=x'\,,\qquad \frac{dy}{dt}=y'\,,\qquad \frac{dy'}{dt}=-Ky'-g \tag{B}$$

Представим себе опять, что нам удалось каким бы то ни было способом получить координаты и скорость центра тяжести снаряда для совокупности

[1] Н. А Упорников. Loc. cit.

последовательных точек траекторий от (t_0, x_0, y_0, v_0) до (t_i, x_i, y_i, v_i). По общим формулам мы можем найти при помощи v_i, y_i числовые значения K в правой части первого дифференциального уравнения нашей системы. Зная ряд числовых, и только числовых значений величины K для соответственных значений независимого переменного t, применяя какую-либо интерполяционную формулу, мы можем представить K целым многочленом, расположенным по степеням некоторой вспомогательной переменной τ, равной $(t-t_i)/w$, где w есть произвольно заданный промежуток времени

$$K = K_0 + K_1\tau + K_2\tau^2 + K_3\tau^3 + \ldots \qquad \left(\tau = \frac{t-t_i}{w}\right) \tag{1}$$

Первый член ряда, очевидно, есть значение величины K при $\tau=0$, т. е. для $t=t_i$. Коэффициенты прочих членов опять можем считать известными; выводом их числовых значений займемся позднее.

Из первого уравнения системы (B) имеем

$$\frac{dx'}{x'} = -K\,dt$$

Отсюда

$$x' = x_i' \exp\left\{-\int_{t_i}^{t} K\,dt\right\} \qquad \text{или} \qquad x' = x_i' \exp -(\alpha_0\tau + \alpha_1\tau^2 + \alpha_2\tau^3 + \ldots) \tag{2}$$

где введены обозначения

$$\alpha_0 = wK_0, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}wK_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}wK_2, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4}wK_3, \ \ldots \tag{3}$$

Положим

$$\xi = \alpha_0\tau$$

Тогда

$$x' = x_i' \exp\left\{-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\xi}{\alpha_0}\right)^{n+1}\right\}$$

В частности, для $t=t_{i+1}$, $\tau=1$, $\xi=\alpha_0$ мы получаем

$$x_{i+1}' = x_i' \exp -(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots) \tag{4}$$

Второе уравнение системы (B) дает нам

$$x = x_i + w\int_0^{\tau} x'\,d\tau = x_i + wx_i' \int_0^{\xi} \exp -(\alpha_0\tau + \alpha_1\tau^2 + \ldots)\frac{d\xi}{\alpha_0} =$$

$$= x_i + wx_i' \int_0^{\xi} \exp -\xi \exp\left(-\alpha_1\frac{\xi^2}{\alpha_0^2} - \alpha_2\frac{\xi^3}{\alpha_0^3} - \ldots\right)\frac{d\xi}{\alpha_0}$$

Разложим второй множитель в выражении под знаком интеграла в ряд по степеням ξ и сохраним лишь члены первого измерения относительно α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$; вводя обозначения

$$X_0(\xi) = \frac{1}{\alpha_0}\int_0^{\xi} e^{-\xi}d\xi, \quad X_1(\xi) = \frac{1}{\alpha_0^3}\int_0^{\xi} e^{-\xi}\xi^2 d\xi, \quad X_2(\xi) = \frac{1}{\alpha_0^4}\int_0^{\xi} e^{-\xi}\xi^3 d\xi, \ldots \tag{5}$$

без труда находим

$$x = x_i + \omega x_i' \{ X_0(\xi) - \alpha_1 X_1(\xi) - \alpha_2 X_2(\xi) - \ldots \} \tag{6}$$

Пользуясь общеизвестным разложением $e^{-\xi}$ в бесконечный ряд, без труда получаем

$$X_0(\xi) = \frac{\xi}{\alpha_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^n}{(n+1)!}, \qquad X_1(\xi) = \frac{\xi^3}{\alpha_0^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) \frac{\xi^n}{(n+3)!} \tag{5'}$$

$$X_2(\xi) = \frac{\xi^4}{\alpha_0^4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)(n+3) \frac{\xi^n}{(n+1)!}.$$

В частности, для $t = t_{i+1}$, $\tau = 1$, $\xi = \alpha_0$ мы имеем

$$x_{i+1} - x_i = \omega x_i' (X_0 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2 - \ldots) \tag{7}$$

где

$$X_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha_0^n}{(n+1)!}, \qquad X_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) \frac{\alpha_0^n}{(n+3)!}$$

$$X_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)(n+3) \frac{\alpha_0^n}{(n+4)!} \tag{8}$$

Интегрирование третьего уравнения системы (B) — обыкновенного линейного — приводит нас к выражению

$$y' = \exp\left(-\int_{t_i}^{t} K dt\right) \left\{ c - g \int_{t_i}^{t} \exp\left(\int_{t_i}^{t} K\, dt\right) dt \right\}$$

В силу (2) находим

$$\exp\left(-\int_{t_i}^{t} K dt\right) = \frac{x'}{x_i'},$$

и, кроме того,

$$\int_{t_i}^{t} \exp\left(\int_{t_i}^{t} K\, dt\right) dt = \int_{t_i}^{t} \frac{x_i'}{x'}\, dt = \omega \int_{0}^{\xi} \exp\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\xi}{\alpha_0}\right)^{n+1} \right\} \frac{d\xi}{\alpha_0}$$

Разлагая показательную функцию под знаком интеграла в ряд по степеням ξ и сохраняя только члены первого измерения относительно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, получаем

$$\int_{t_i}^{t} \exp\left(\int_{t_i}^{t} K\, dt\right) dt = \omega F(\xi)$$

где

$$F(\xi) = J_0(\xi) + \alpha_1 J_1(\xi) + \alpha_2 J_2(\xi) + \ldots$$

причем

$$J_0(\xi) = \frac{1}{\alpha_0} \int_{0}^{\xi} e^{\xi}\, d\xi = \frac{\xi}{\alpha_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{(n+1)!}$$

$$J_1(\xi) = \frac{1}{\alpha_0^3} \int_0^\xi e^{\xi} \xi^2 \, d\xi = \frac{\xi^3}{\alpha_0^3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \frac{\xi^n}{(n+3)!}$$

$$J_2(\xi) = \frac{1}{\alpha_0^4} \int_0^\xi e^{\xi} \xi^3 \, d\xi = \frac{\xi^4}{\alpha_0^4} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) \frac{\xi^n}{(n+4)!}$$

. . . .

Таким образом, пользуясь только что добытыми выражениями, придаем вертикальной компоненте скорости вид

$$y' = y_i' \frac{x'}{x_i'} - g\wp \frac{x'}{x_i'} F(\xi)$$

Опять разлагая второе слагаемое правой части в ряд и сохраняя только члены первого измерения, легко выводим

$$y' = x' \frac{y_i'}{x_i'} - g\wp \{ Y_0'(\xi) - \alpha_1 Y_1'(\xi) - \alpha_2 Y_2'(\xi) - \dots \}$$

причем

$$Y_0'(\xi) = \frac{\xi}{\alpha_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^n}{(n+1)!} = X_0(\xi)$$

$$Y_1'(\xi) = \frac{\xi^3}{\alpha_0^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+4) \frac{\xi^n}{(n+3)!}$$

$$Y_2'(\xi) = \frac{\xi^4}{\alpha_0^4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n^2+8n+18) \frac{\xi^n}{(n+4)!}$$

. . . .

и, в частности,

$$y_{i+1}' = x_{i+1}' \frac{y_i'}{x_i'} - g\wp \left\{ Y_0' - \alpha_1 Y_1' - \alpha_2 Y_2' - \dots \right\} \tag{9}$$

где введены обозначения

$$Y_0' = X_0, \qquad Y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+4) \frac{\alpha_0^n}{(n+3)!}$$

$$Y_2' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n^2+8n+18) \frac{\alpha_0^n}{(n+4)!}, \ \dots \tag{10}$$

Зная общее выражение y', простой квадратурой находим y и, в частности,

$$y_{i+1} - y_i = \frac{y_i'}{x_i'} \left(x_{i+1} - x_i \right) - g\wp^2 \left\{ Y_0 - \alpha_1 Y_1 - \alpha_2 Y_2 - \dots \right\} \tag{11}$$

где принято

$$Y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha_0}{(n+2)!}, \qquad Y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{\alpha_0^n}{(n+3)!}$$

$$Y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n^2+8n+18) \frac{\alpha_0^n}{(n+5)!}, \ \dots \tag{12}$$

Выражения (4), (7), (9), (11) позволяют произвести переход от точки, вычисленной для начала некоторого интервала, к точке следующей, например, от (t_i, x_i, y_i) к точке $(t_{i+1}, x_{i+1}, y_{i+1})$; мы должны лишь указать вывод числовых значений вспомогательных величин $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Чтобы представить целым многочленом функцию, заданную некоторой совокупностью ее числовых значений, мы привлекаем ту или другую интерполяционную формулу: в нашей работе мы пользуемся или второй формулой Гаусса (G_2), или первой формулой Ньютона (N_1), или его второй формулой (N_2). Какова бы ни была интерполяционная формула, мы полагаем

$$a_0 = wK_0 = wf_0, \quad a_1 = \frac{1}{2} wf', \quad a_2 = \frac{1}{12} wf'', \quad a_3 = \frac{1}{24} wf''', \ \ldots \tag{13}$$

где символы $f', f'', f''', \ldots$ обозначают разности различных порядков, входящих в принятую интерполяционную формулу.

Если уже определено несколько точек траектории, то значения f_0 и f' даны предшествующими выкладками; вывод f'', f''' и пр. требует экстрополирования, что мы проводим здесь по правилам, указанным в первой части статьи.

При указанных обозначениях (13) мы повторяем дословно рассуждения первой части и получаем нижеследующую таблицу выражений $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ (ср. формулы (14), (14′), (14″) первой части)

	(G_2)	(N_1)	(N_2)	
$\alpha_0 =$	a_0	a_0	a_0	
$\alpha_1 =$	$a_1 + 3a_2 - 2a_3$	$a_1 - 3a_2 + 4a_3$	$a_1 + 3a_2 + 4a_3$	
$\alpha_2 =$	$2a_2$	$2a_2 - 4a_3$	$2a_2 + 4a_3$	(14)
$\alpha_3 =$	a_3	a_3	a_3	

Приступая к вычислению траектории, мы и здесь должны выполнить небольшой ряд приближений (обычно два-три), что можно провести по правилам, ранее указанным.

Поступила в редакцию посмертно
14 VI 1944

S. A. KAZAKOV.—CALCULATION OF TRAJECTORIES OF THE MOVEMENT OF THE CENTRE OF GRAVITY OF PROJECTILES

The work consists of two parts, found in a form prepared for printing among the papers of the well-known Russian astronomer, Doctor Kazakov, who died.

The trajectory of a projectile is expressed by the solution of the differential system (1.1).

For this non-linear boundary problem, the author gives a new method of approximate integration, which, in certain cases, presents advantages over the method now employed.