

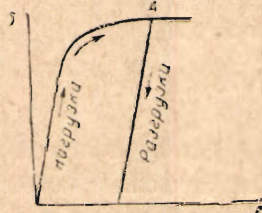
О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ

Х. А. Рахматулин

(Москва)

Пусть на одном конце однородного стержня, другой конец которого уходит в бесконечность, мгновенно возникло достаточно большое давление, которое, с течением времени монотонно убывая, стремится к некоторому постоянному значению. Указанное явление возникнет, если на конце стержня произойдет взрыв или по нему ударится абсолютно твердое тело. В настоящей статье рассматривается задача с распространении деформаций вдоль стержня, когда эти деформации выходят за предел упругих деформаций материала стержня. Для случая, когда давление не превосходит предела пропорциональности материала стержня, указанная задача решена Фурье. Для случая упругих нелинейных деформаций рассматриваемая нами задача не имеет однозначного решения. В отличие от этих случаев здесь последуетея случай пластических деформаций, при которых закон нагружения отличается от закона разгрузки (фиг. 1).

Трудность рассматриваемой задачи обуславливается тем, что точка начала разгрузки A зависит от координат частицы, но вид этой зависимости до решения задачи неизвестен. Если бы точка начала разгрузки была постоянной для всего стержня, то наша задача была бы не задачей теории пластичности, а задачей нелинейной теории упругости.



Фиг. 1

Дадим теперь описание картины распространения деформаций в рассматриваемом случае. Если максимальное значение давления взрыва не превосходит предела пропорциональности материала стержня, то деформации конца стержня будут распространяться со скоростью звука a_0 . Некоторая частица стержня, находящаяся на расстоянии x от его конца, в момент времени $t = x/a_0$ после взрыва приобретает скачком максимальную деформацию, соответствующую максимальному давлению. В последующие моменты времени эта частица стержня в точности повторяет деформацию конца стержня. Если максимальное значение давления взрыва превосходит предел упругости материала стержня, то картина распространения деформации будет иная, а именно: деформации некоторой частицы стержня со временем непрерывно будут возрастать по закону, зависящему от вида кривой $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, до некоторой величины, меньшей максимальной деформации конца стержня, после чего эти

деформации будут уменьшаться по закону, зависящему как от вида нагрузки, так и от вида кривой $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.

Рассмотрим плоскость xt , где x — лагранжова координата частицы стержня, t — время. В этой плоскости для заданного x существует некоторое t , после которого начинается разгрузка элемента. Таким образом, в плоскости xt существует кривая, разбивающая ее на две части, в одной из которых происходит нагружение частиц стержня, в другой — разгрузка их. Эту кривую мы назовем волной разгрузки. Ниже будет доказано существование этой волны.

1. Доказательство существования волны разгрузки. Поместим начало координат O в конце стержня, ось x направим вдоль его. Пусть ρ — массовая плотность материала, E — модуль упругости его, y — смещение частицы стержня, σ — напряжение рассматриваемой точки в данный момент времени. Уравнение колебания имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1.1)$$

Для области нагружения σ является заданной функцией деформации ε , определяющейся соответствующими экспериментами. При этом

$$\varepsilon = \frac{\partial y}{\partial x} = y_x \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

причем

$$a^2 = a^2(y_x) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial y_x} \quad (1.4)$$

Здесь величина a есть монотонно убывающая функция деформаций y_x и представляет собой местную скорость звука.

Уравнения характеристик для (1.3) напишутся так же, как в случае уравнения струны, а именно

$$\frac{dx}{dt} = \pm a, \quad \frac{dy_t}{dy_x} = \pm a \quad (1.5)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \pm a, \quad y_t = \pm \int_0^{y_x} a(y_x) dy_x + C_{1,2} = \pm \psi(y_x) + C_{1,2} \quad (1.6)$$

Если $a(y_x)$ есть убывающая функция x , то, пользуясь уравнениями (1.6), можно получать указанный гл. вве Риманом интеграл уравнения (1.3)

$$y_t = -\psi(y_x)$$

вдоль прямой

$$\frac{x}{t} = a(y_x) \quad (1.7)$$

Как видно из уравнения (1.7), y_t и y_x остаются постоянными вдоль прямой

$$x = t a$$

Уравнения (1.7) представляют собой решение дифференциального уравнения (1.3) в области $t \geq x/a(0)$, соответствующее начальным условиям

$$y_t = 0, \quad y_x = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} y_x &= \text{const} & \text{при} & \quad x = 0, \\ y_x &= \text{const} & \text{при} & \quad x = \infty \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (1.7) дают решение задачи о распространении деформаций вдоль полубесконечного стержня, на конец которого внезапно приложено остающееся постоянным во времени давление. Пучок прямых $x = at$, исходящих из начала координат, являющихся характеристиками уравнения (1.3), мы назовем волнами Римана. Ниже будет показано, что волны Римана пересекают волну разгрузки (фиг. 2).

Выведем дифференциальное уравнение, которое описывает движение частицы стержня после прохождения волны разгрузки. Обозначим через ε_0 и σ_0 соответственно деформацию и напряжение частиц стержня на волне разгрузки.

После прохождения волны разгрузки деформации элемента стержня должны уменьшаться. Следовательно, в области, лежащей выше волны разгрузки (фиг. 2), напряжение σ и деформация ε будут связаны линейным уравнением

$$\sigma = \sigma_0 - E(\varepsilon_0 - \varepsilon) \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.4), получим

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} - a_0^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} \quad \text{где} \quad a_0 = \frac{E}{\rho} \quad (1.9)$$

В уравнении (1.9) величина ε_0 является также неизвестной функцией x .

Таким образом, мы должны найти решение уравнения (1.3) для области, лежащей ниже волны разгрузки, и уравнения (1.9) для области, лежащей выше волны разгрузки, причем последняя не задана. Пусть уравнение волны разгрузки имеет вид

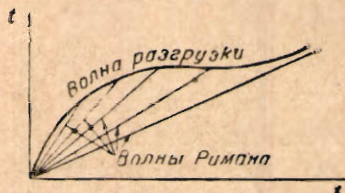
$$t = f(x) \quad (1.10)$$

Докажем теорему: если $a(y_x)$ — монотонно убывающая функция, то каждой волне разгрузки, удовлетворяющей условиям

$$f'(x) > 0, \quad r'(\theta) \geq 0, \quad (1.11)$$

причем

$$t = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta$$



Фиг. 2

соответствует определенная, монотонно убывающая нагрузка, действующая на конце стержня.

Вводя обозначения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} - a_0^2 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} \quad (1.12)$$

представим уравнение (1.9) в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \varphi(x) \quad (1.13)$$

Если считать волну разгрузки известной, то $\varphi(x)$ будет заданной функцией x .

Тогда уравнение (1.10) есть просто неоднородное уравнение колебания струны.

Если еще предположить переход от нагрузки к разгрузке непрерывным, то на линии $t = f(x)$ будут заданы

$$y_x = \varepsilon_0(x), \quad y = -\psi(\varepsilon_0). \quad (1.14)$$

Таким образом, получаем задачу Коши для уравнения (1.13). Для доказательства теоремы нам остается показать, что решение указанной задачи Коши будет таким, что $|y_x|$ при $x = \text{const}$ с возрастанием t будет убывать.

Найдем решение (1.13) при условиях (1.14). Пусть

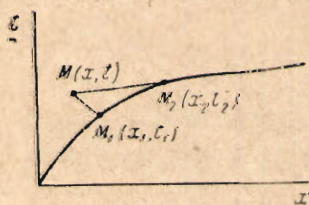
$$y = u(x, t) + v(x, t) + w(x) \quad (1.15)$$

причем

$$a_0^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = -\varphi(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.16)$$

Кроме того, положим на волне разгрузки (1.10)

$$\begin{aligned} u_x &= \varepsilon_0(x), & u_t &= -\psi(\varepsilon_0(x)) & v_t &= 0 \\ v_x &= \frac{1}{a_0^2} \int_0^x \psi(z) dz = \lambda(x), & & & & \\ w &= -\frac{1}{a_0^2} \int_0^x \int_0^x \varphi(x) dx & & & & \end{aligned} \quad (1.17)$$



Фиг. 3

Обозначим координаты двух произвольных точек M_1 и M_2 , лежащих (фиг. 3) на волне разгрузки (1.10), через x_1, t_1 и x_2, t_2 .

Пусть x, t будут координаты точки пересечения характеристики положительного направления, исходящей из точки M_2 , и характеристики отрицательного направления, исходящей из точки M_1 .

Уравнения характеристик M_2M и M_1M , очевидно, будут

$$x - x_2 = a_0(t - t_2), \quad x - x_1 = -a_0(t - t_1) \quad (1.18)$$

Уравнения соответствующих характеристик в плоскостях u, u_t и v, v_t соответственно будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_1 - u_{12} &= a_0 (u_x - u_{x2}), & u_t - u_{t1} &= -a_0 (u_x - u_{x1}) \\ v_1 - v_{12} &= a_0 (v_x - v_{x2}), & v_t - v_{t2} &= -a_0 (v_x - v_{x1}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

На основании (1.17) имеем

$$\begin{aligned} u_{x2} &= \varepsilon_0(x_2), & u_{x1} &= \varepsilon_0(x_1), & u_{t2} &= -\psi(\varepsilon_0(x_2)), & u_{t1} &= -\psi(\varepsilon_0(x_1)) \\ v_{x2} &= -\lambda(x_2), & v_{x1} &= \lambda(x_1), & v_{t2} &= 0, & v_{t1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Так как точки M_1 и M_2 лежат на волне разгрузки,

$$t_1 = f(x_1), \quad t_2 = f(x_2) \quad (1.21)$$

Точки M_1 и M_2 также лежат на волнах Римана; поэтому на основании (1.7) получаем

$$\frac{x_1}{t_1} = a(u_{x1}), \quad \frac{x_2}{t_2} = a(u_{x2}) \quad (1.22)$$

Из (1.19) и (1.20) получим

$$v_x = \frac{\lambda(x_1) + \lambda(x_2)}{2}, \quad u_x = \frac{\varepsilon_0(x_1) + \varepsilon_0(x_2)}{2} + \frac{\psi(\varepsilon_0(x_2)) - \psi(\varepsilon_0(x_1))}{2a_0} \quad (1.23)$$

На основании (1.15) окончательно получим

$$y_x = \frac{\varepsilon_0(x_1) + \varepsilon_0(x_2)}{2} + \frac{\psi(\varepsilon_0(x_2)) - \psi(\varepsilon_0(x_1))}{2a_0} + \frac{\lambda(x_1) + \lambda(x_2)}{2} - \lambda(x) \quad (1.24)$$

Если $f(x)$ задана, то из (1.18) и (1.21) можно определить $x_1 = x_1(x, t)$ и $x_2 = x_2(x, t)$. Таким образом, формула (1.24) дает нам деформацию любого элемента стержня в любой момент времени t .

Из (1.12) и (1.17) имеем

$$\lambda(x) = \frac{\sigma_0(x)}{a_0^2 \rho} - \varepsilon_0(x) - \frac{\sigma_0(0)}{a_0^2 \rho} + \varepsilon_0(0) \quad (1.25)$$

Так как начало координат является точкой разветвления волн Римана и переход от нагрузки к разгрузке происходит непрерывно, то

$$\sigma_0(0) = p_m, \quad \varepsilon_0(0) = \varepsilon_m$$

где p_m — максимальное давление взрыва и ε_m — соответствующая ему максимальная деформация.

Нетрудно видеть, что (1.24) может быть представлено в виде

$$y_x = \varepsilon_0(x) - \frac{\sigma_0(x)}{E} + \frac{\sigma_0(x_1) + \sigma_0(x_2)}{2E} + \frac{\psi(\varepsilon_0(x_2)) - \psi(\varepsilon_0(x_1))}{2a_0} \quad (1.26)$$

Для доказательства уменьшения y_x при $x = \text{const}$ и при увеличивающемся t продифференцируем (1.26), считая x постоянной. Получим

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2(y_{x1})}{a_0^2} - \frac{a(y_{x1})}{a_0} \right) \frac{d\varepsilon_0}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2(y_{x2})}{a_0^2} + \frac{a(y_{x2})}{a_0} \right) \frac{d\varepsilon_0}{dx_2} \frac{dx_2}{dt}$$

Это уравнение для точек, лежащих на волне разгрузки, дает

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{a^2}{a_0^2} \frac{d\varepsilon_0}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (1.27)$$

так как при стремлении точки M к волне разгрузки (фиг. 3) точки M_1 и M_2 будут стремиться к M .

Из равенства (1.27) следует, что знак $\partial^2 y / \partial t \partial x$ совпадает со знаком $d\varepsilon_0 / dx$, если соблюдено условие теоремы $f'(x) > 0$.

Из второго условия теоремы $r'(t) > 0$ и из свойства $a(y_x)$ следует, что

$$\frac{d\varepsilon_0}{dx} < 0 \quad \text{при } \varepsilon_0 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\varepsilon_0}{dx} > 0 \quad \text{при } \varepsilon_0 < 0$$

Следовательно, $|\partial y_x / \partial x|$ — убывающая функция в некоторой окрестности волны разгрузки, и теорема доказана.

Поставим задачу, обратную той, которая решена теоремой, а именно, определим волну разгрузки по заданному на конце стержня давлению $p(t)$.

Полагая $x=0$ в (1.18), на основании (1.21) получим

$$a_0 f(x_2) - x_2 = a_0 t, \quad a_0 f(x_1) + x_1 = a_0 t \quad (1.28)$$

Имея в виду, что $p(t) = p_m - E(\varepsilon_m - y_x(0, t))$, из (1.26) находим

$$p(t) = \frac{\sigma(\varepsilon_0(x_1)) + \sigma(\varepsilon_0(x_2))}{2} + E_0 \frac{\psi(\varepsilon_0(x_2)) - \psi(\varepsilon_0(x_1))}{2a_0} \quad (1.29)$$

Кроме того, из (1.21) и (1.22) получим

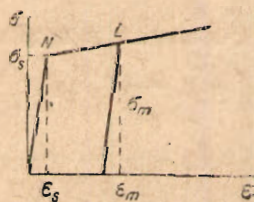
$$\frac{x_1}{f(x_1)} = a(\varepsilon_0(x_1)), \quad \frac{x_2}{f(x_2)} = a(\varepsilon_0(x_2)) \quad (1.30)$$

Если иметь в виду (1.30), то в (1.28) и (1.29) неизвестными являются функции $f(x)$, $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

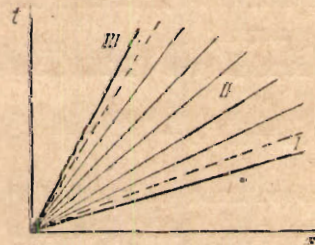
Таким образом, задача об определении волны разгрузки по заданной нагрузке сводится к решению системы трех функциональных уравнений.

2. Случай схемы Прандтля. Пусть $\sigma = \sigma(t)$ состоит из кусков двух прямых (фиг. 4).

Пусть E — поперечному модуль упругости, E' — модуль упрочнения, т. е. тангенс угла наклона прямой NL . Апроксимируем указанную на фиг. 4



Фиг. 4



Фиг. 5

диаграмму $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ некоторой кривой C с непрерывно меняющимися касательными.

В этом случае в плоскости xt волны Римана могут быть разбиты на три группы (фиг. 5)

Первая группа волн I соответствует деформациям меньшим, чем ε_s , скорость распространения которых весьма мало отличается от a_0 . Вторая группа волн II соответствует переходной части диаграммы $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, и между собой отличаются большими изменениями скорости их распространения. На этих волнах деформация изменяется весьма мало. Наконец, третья группа волн III соответствует деформациям большим, чем ε_s ; скорость их распространения близка к $a_1 = \sqrt{E'/\rho}$.

Очевидно, часть волны разгрузки, на которой деформация больше ε_s , пересекается с волнами Римана, скорости распространения которых близки к a_1 .

Если обозначить через $a_1 + \Delta a_1$ наклон волны Римана, на которой деформация больше, чем ε_s (фиг. 5), то имеем

$$\frac{x}{a_1 + \Delta a_1} \leq f(x) \leq \frac{x}{a_1}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{x}{a_1} \left(1 - \xi \frac{\Delta a_1}{a_1} \right) \quad (0 < \xi < 1) \quad (2.1)$$

Так как выбором аппроксимирующей кривой C величина Δa_1 может быть сделана сколь угодно малой, для рассматриваемого случая можно положить

$$f(x) = \frac{x}{a_1} \quad (2.2)$$

Следовательно, в этом случае из (1.28) получим

$$x_2 = \frac{a_0 a_1 t}{a_0 - a_1} = \alpha t, \quad x_1 = \frac{a_0 a_2 t}{a_0 + a_1} = \beta t \quad (2.3)$$

Так как для $\varepsilon > \varepsilon_s$ имеем

$$\sigma = \sigma_s + E'(\varepsilon - \varepsilon_s), \quad \psi = \int_0^{\varepsilon_s} a_0 d\varepsilon + \int_{\varepsilon_s}^{\varepsilon} a_1 d\varepsilon = (a_0 - a_1)\varepsilon_s + a_1 \varepsilon$$

то выражение (1.29) для этого случая примет вид

$$p(t) = \sigma_s - E'\varepsilon_s + \frac{E'}{2}(\varepsilon_0(x_1) + \varepsilon_0(x_2)) + \frac{E a_1}{2 a_0}(\varepsilon_0(x_2) - \varepsilon_1(x_1))$$

Подставляя в него x_1 и x_2 из (2.3), получим относительно ε_0 функциональное уравнение

$$p(t) = \sigma_s - E'\varepsilon_s - A\varepsilon_0(\beta t) + B\varepsilon_0(\alpha t) \quad (2.4)$$

где

$$A = -\frac{E'}{2} + \frac{E a_1}{2 a_0} = -\frac{E'}{2} + \frac{\sqrt{E'E}}{2} > 0, \quad B = \frac{E'}{2} + \frac{E a_1}{2 a_0} = \frac{E'}{2} + \frac{\sqrt{E'E}}{2} \quad (2.5)$$

Пусть

$$\varepsilon_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \quad (t < t_0)$$

Из (2.4) получим

$$p_0 = \sigma_s - E' \varepsilon_s - A b_0 + B b_n, \quad p_n = (B \alpha^n - A \beta^n) b_n \quad (2.6)$$

откуда

$$b_n = \frac{p_n}{B \alpha^n - A \beta^n} \quad (2.7)$$

Таким образом

$$\varepsilon_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n x^n}{B \alpha^n - A \beta^n} + b_0 \quad (2.8)$$

По этой формуле деформация в точке $x=0$ в момент $t=0$ будет

$$\varepsilon_0(0) = b_0 = \frac{p_0 - \sigma_s + E' \varepsilon_s}{B - A} = \frac{p_m - \sigma_s}{E'} + \varepsilon_s = \varepsilon_m \quad (2.9)$$

Для данного элемента стержня $\varepsilon_0(x)$ является наибольшей деформацией, которую он достиг за время действия нагрузки.

Поэтому остаточная деформация ε^* элемента определится по формуле

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0(x) - \varepsilon_s$$

Подставляя в нее из (2.8), имея в виду (2.9), получим

$$\varepsilon^* = \varepsilon_m - \varepsilon_s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n x^n}{B \alpha^n - A \beta^n} \quad (2.10)$$

Эта формула показывает, что существует некоторая аналогия между законом изменения давления взрыва и законом распределения остаточных деформаций.

Так, например, если давление взрыва падает по линейному закону, то и остаточные деформации будут распределены по линейному закону. Вообще, если $p(t)$ — полином n степени, то ε^* — полином той же степени с теми же знаками коэффициентов.

Это обстоятельство, повидимому, позволяет иметь суждение о действовавшем давлении на основании изучения закона распределения остаточных деформаций.

Рассмотрим теперь случай, когда давление $p(t)$ задано уравнением

$$p(t) = p_m - p_2 t^n = p_m \left[1 - \left(\frac{t}{\tau} \right)^n \right]$$

Следовательно,

$$b_1 = 0, \quad b_n = \frac{-p_m (1 - \lambda^2)^n}{\frac{1}{2} \sqrt{E'E} a_1^2 \tau^n [(1 + \lambda)^{n+1} - (1 - \lambda)^{n+1}]} \quad \left(\lambda = \sqrt{\frac{E}{E'}} \right)$$

Поэтому

$$\varepsilon^* = \varepsilon_m - \varepsilon_s - \frac{2p_m (1 - \lambda^2)^n x^n}{\sqrt{E'E} a_1^2 \tau^n [(1 + \lambda)^n - (1 - \lambda)^n]}$$

Приравнивая остаточные деформации к нулю, получим уравнение для определения длины l зоны распространения остаточных деформаций

$$l = \sqrt[n]{\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_s) \sqrt{E'E} [(1+\lambda)^{n+1} - (1-\lambda)^{n+1}]}{2\rho_m (1-\lambda^2)^n}} a_1 \tau$$

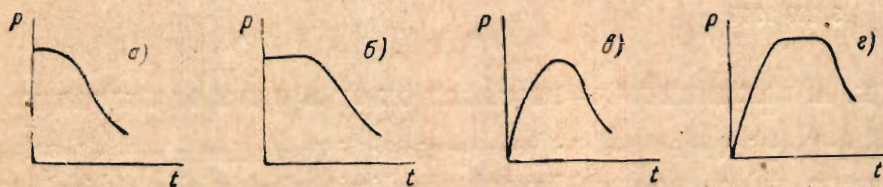
Имея в виду, что $\rho_m = \sigma_s + E'(\varepsilon_m - \varepsilon_s)$, получим

$$l = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{\sigma_s}{\rho_m}\right) \frac{(1+\lambda)^{n+1} - (1-\lambda)^{n+1}}{2\lambda (1-\lambda^2)^n}} a_1 \tau$$

Сохраняя в этом выражении только первую степень λ , найдем

$$l = \sqrt{(n+1) \left(1 - \frac{\sigma_s}{\rho_m}\right)} a_1 \tau \quad (2.11)$$

Из (2.11) видно, что зона распространения остаточных деформаций тем

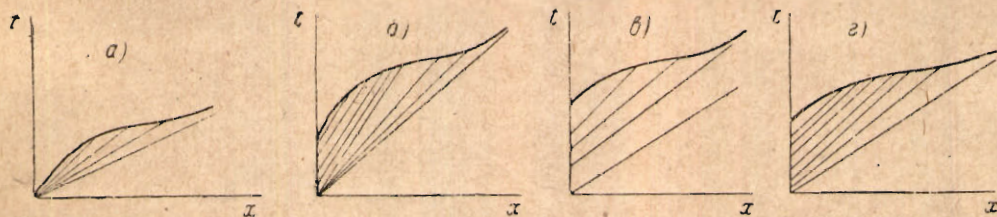


Фиг. 6

больше, чем больше время τ действия давления, модуль упрочнения E' и максимальное давление ρ_m .

Также интересно то обстоятельство, что длина зоны распространения остаточных деформаций не зависит от модуля упругости материала стержня.

3. Другие случаи нагрузки. В предыдущем параграфе рассматривался вопрос о распространении волны разгрузки для случая, когда на конце стержня мгновенно возникало давление, стремившееся в дальнейшем асимптотически к нулю.



Фиг. 7

Предложенный метод решения конкретных задач состоит в следующем: нужно задаваться формой волны разгрузки и из (1.18) и (1.21) определить

x_1, t_1, x_2, t_2 как функции x, t , подставить x_1 и x_2 в формулу (1.26), откуда получается решение задачи.

Этим же методом может быть решена задача для других видов нагрузок. На фиг. 6 приводятся некоторые виды, а на фиг. 7 соответствующие картины распространения волн, причем кривые изображают волну разгрузки, прямые соответствуют волнам Римана. В случае (а) все волны Римана исходят из начала координат и пересекаются волной разгрузки. В случае (б) волны Римана делятся на две группы: одна из них состоит из пучка прямых, исходящих из начала координат, вторая — из семейства параллельных прямых, исходящих из различных точек оси t . В случае (в) волны Римана состоят из семейства расходящихся прямых, исходящих из различных точек оси t . Координаты точки на оси t , где начинается волна разгрузки, определяется из уравнения

$$p(t_0) = p_m$$

В случае (г) волны Римана представляются двумя группами прямых, исходящих из точек оси t . Те, которые расположены ближе к началу координат, — расходящиеся прямые; лежащие выше — параллельные прямые.

Поступила в редакцию

5. IX 1944

К. А. РАХМАТУЛИН.—PROPAGATION OF A WAVE OF UNLOADING

The author investigates the propagation of deformation along a half-infinite bar due to sudden pressure beyond the limit of elasticity on its butt-end. The law of loading and law of unloading are supposed to be different.

The following process of propagation of deformation is established. Starting from an instant of time the deformation of an element of the bar continuously increases up to a value following the law depending on the function $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ and then this deformation decreases following the law depending on the form of load as well as on the form of function $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. The value of deformation for the elements uniformly decreases along the length of bar starting from its butt-end.

As a particular case of the function $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ the scheme of Prandtl is examined in the work. For this case, the distribution of residual deformation along the bar is found for an arbitrary change of load on the butt-end.