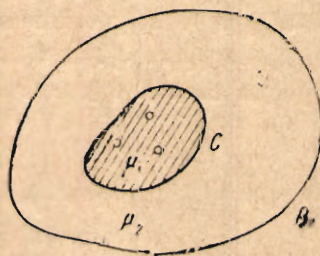


**О НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ  
 1. О ПЕРЕМЕЩЕНИИ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ**

**И. Я. Полубаринова-Кочина**

(Москва)

В теории фильтрации нефти большой интерес представляет такая задача. В начальный момент времени в пористой среде дана плоская область, ограниченная контуром  $C$ , занятая нефтью; и содержащая несколько скважин (фиг. 1). Эта область окружена водой, причем на внешнем, неподвижном контуре этой области поддерживается постоянное давление (такой контур называют контуром питания [3]). На контурах скважин давление также имеет постоянные значения:  $p_1, p_2, \dots$ . Нефть и вода обладают соответственно вязкостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Спрашивается, как будет перемещаться контур  $C$  с течением времени. В частности, когда наступит момент обводнения скважин, т. е. когда вода вступит в первую из скважин.



Фиг. 1

В общей постановке эта задача чрезвычайно трудна для точного решения (хотя возможно указать приближенные методы ее решения). Muskat [2] рассмотрел несколько частных случаев этой задачи, считая вязкости  $\mu_1$  и  $\mu_2$  двух жидкостей одинаковыми, причем в начальный момент времени он считал контур нефтеносности  $C$  совпадающим с контуром питания.

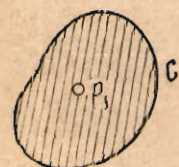
Л. С. Лейбензоном [1] предложена другая постановка задачи: в начальный момент времени задается положение контура нефтеносности, причем на нем давление считается постоянным (фиг. 2). Затем контур перемещается так, что давление на нем продолжает оставаться постоянным. Это условие равносильно предположению, что во внешней области имеется жидкость, вязкость которой равна нулю, — в такой жидкости давление должно оставаться постоянным.

В настоящей статье рассматриваются некоторые случаи задачи Лейбензона.

**Условия на контуре.** Принимая обычные предположения теории фильтрации, считаем, что скорость фильтрации имеет потенциал

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \varphi = -\frac{z}{\mu} p(x, y, t) \quad (1.1)$$

где  $z$  — проницаемость грунта,  $\mu$  — вязкость жидкости.



Фиг. 2

Условие, что  $p$ , а следовательно, и  $\varphi$  постоянно на контуре во все время движения, дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ на } C$$

Заметим, что скоростью фильтрации называется расход жидкости в единицу времени через единичную площадку. Он равен скорости жидкой частицы, умноженной на пористость грунта (т. е. отношение площади пор к площадке грунта вместе с жидкостью). Поэтому

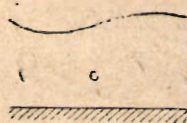
$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{m} = \frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{v}{m} = \frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

и на контуре  $C$  должны иметь

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + m \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

Заметим, что аналогичное условие на контуре может быть получено для плоского движения, пресекающегося в вертикальной плоскости, например, в задаче о неустановившемся притоке жидкости со свободной поверхностью к дрене (фиг. 3). В этом случае принимают, что потенциал скорости фильтрации связан с давлением так:

$$\varphi(x, y, t) = -k \left( \frac{p}{\rho g} + y \right)$$



где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $k$  — коэффициент фильтрации.

Между  $k$  и введенными нами ранее  $\alpha$  и  $\mu$  имеет место соотношение

$$k = \frac{\alpha \rho g}{\mu}$$

На линии свободной поверхности давление должно оставаться постоянным и, следовательно,

$$\varphi + ky = \text{const}$$

Условие, что контур все время остается изобарой, приводит, как нетрудно проверить, к уравнению, аналогичному уравнению (1.2)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -m \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

**Случай одной скважины внутри произвольного контура.** Отобразим область, ограниченную контуром  $C$ , на внутренность круга плоскости  $\zeta$ , причем скважине плоскости  $z$  пусть соответствует точка  $\zeta_0$  на плоскости  $\zeta$ .

Положим

$$z = f(\zeta) = A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + \dots \quad (1.3)$$

Ряд (1.3) сходится для  $|\zeta| \leq 1$  (считаем контур  $C$  достаточно хорошей линией по крайней мере для  $t$ , близких к нулю).

Начальные значения коэффициентов  $A_1, A_2, \dots$  должны быть заданы. Задача состоит в отыскании  $A_1, A_2, \dots$  как функций времени.

На плоскости  $\zeta$  течение жидкости определяется комплексным потенциалом

$$\omega(\zeta) = -\frac{q}{2\pi} \operatorname{Ig} \frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} \quad (1.4)$$

где

$$q = \frac{2\pi(\varphi_0 - \varphi_1)}{\operatorname{Ig} \frac{(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta_0) |f'(\zeta_0)|}{\delta}} \quad (1.5)$$

Здесь  $\delta$  — радиус скважины,  $\varphi_1$  — потенциал на контуре скважины,  $\varphi_0$  — потенциал на контуре  $C$ .

Предположим, что обращение уравнения (5) дает функцию

$$\zeta = F(z) = U(z, t)$$

Комплексный потенциал течения на плоскости  $z$  имеет вид

$$\omega = \varphi + i\psi = -\frac{q}{2\pi} \operatorname{Ig} \frac{U - U_0}{1 - \bar{U}_0 U}, \quad (U_0 = \zeta_0)$$

откуда

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi} \operatorname{Ig} \left| \frac{U - U_0}{1 - \bar{U}_0 U} \right|$$

Принимая во внимание, что на контуре

$$|U| = 1, \quad |U - U_0| = |1 - \bar{U}_0 U|$$

найдем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{q}{2\pi} \frac{(1 - U_0 \bar{U}_0) (U \bar{U})'}{(U - U_0) (\bar{U} - \bar{U}_0)}$$

Здесь  $\bar{U}$ ,  $\bar{U}_0$  — сопряженные с  $U$ ,  $U_0$  величины. Точка означает частное дифференцирование по времени. Далее,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \left|\frac{d\omega}{dz}\right|^2 = \frac{q^2}{4\pi^2} \frac{(1 - U_0 \bar{U}_0)^2}{(U - U_0)^2 (\bar{U} - \bar{U}_0)^2} \left|\frac{dU}{dz}\right|^2$$

Подставляя последние выражения в уравнение (1.2) и принимая во внимание, что

$$(U \bar{U})' \left|\frac{dz}{dU}\right|^2 = (\dot{U} \bar{U} + U \dot{\bar{U}}) f'(\zeta) \bar{f}'(\bar{\zeta}) = \left(\frac{\dot{\zeta}}{\zeta} + \zeta \dot{\bar{\zeta}}\right) f'(\zeta) \bar{f}'(\bar{\zeta}) \quad (\zeta \bar{\zeta} = 1)$$

найдем

$$(\zeta - \zeta_0) (1 - \zeta_0 \bar{\zeta}) (\zeta + \zeta^2 \bar{\zeta}) f'(\zeta) \bar{f}'(\bar{\zeta}) = \frac{q}{m\pi} (1 - \zeta_0 \bar{\zeta}_0) \zeta^2 \quad (1.6)$$

Если в уравнении (1.3) рассматривать  $\zeta$  как функцию от  $z$  и  $t$ , то нетрудно найти, что

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\zeta} = -\frac{\dot{f}(\zeta)}{f'(\zeta)}, \quad \dot{\bar{\zeta}} = -\frac{\dot{\bar{f}}(\bar{\zeta})}{\bar{f}'(\bar{\zeta})} \quad (1.7)$$

где

$$f(\zeta) = A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + \dots \quad f'(\zeta) = A_1 + 2A_2 \zeta + 3A_3 \zeta^2 + \dots \quad (1.8)$$

Окончательно уравнение (1.6) представим в виде

$$\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right) \left(1 - \bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}\right) \left[ \frac{1}{\zeta} \dot{f}(\zeta) \bar{f}'\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + \zeta \dot{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) f'(\zeta) \right] = - \frac{2(\varphi_0 - \varphi_1)(1 - \zeta_0 \bar{\zeta}_0)}{m \lg \frac{(1 - \zeta_0 \bar{\zeta}_0) |f'(\zeta_0)|}{\delta}} \quad (1.9)$$

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда  $\zeta_0$  находится на вещественной оси и когда контур  $C$  в начальный, а следовательно, и в последующие моменты времени симметричен относительно вещественной оси. Тогда коэффициенты  $A_1, A_2, \dots$  все время будут вещественными. В этом случае уравнение (1.9) представим в форме

$$\frac{1}{\zeta} \dot{f}(\zeta) f'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \zeta \dot{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) f'(\zeta) = -M(\zeta_0) \frac{1 - \zeta_0^2}{(1 - \zeta_0/\zeta)(1 - \zeta_0 \zeta)} \quad (1.10)$$

где

$$M(\zeta_0) = \frac{q}{m\pi} = \frac{2(\varphi_0 - \varphi_1)}{m \lg \frac{(1 - \zeta_0^2) f'(\zeta_0)}{\delta}} = \frac{2(p_1 - p_0) \kappa}{\mu m \lg \frac{(1 - \zeta_0^2) f'(\zeta_0)}{\delta}} \quad (1.11)$$

**Уравнения для коэффициентов.** Полагая  $\zeta = e^{i\varphi}$ , воспользовавшись уравнениями (1.8) для (1.10) и принимая во внимание, что

$$\frac{1}{(1 - \zeta_0/\zeta)(1 - \zeta_0 \zeta)} = \frac{1 + 2\zeta_0 \cos \varphi + 2\zeta_0^2 \cos 2\varphi + 2\zeta_0^3 \cos 3\varphi + \dots}{1 - \zeta_0^2}$$

получим

$$\begin{aligned} & (A_1 e^{i\varphi} + A_2 e^{2i\varphi} + \dots)(A_1 e^{-i\varphi} + 2A_2 e^{-2i\varphi} + 3A_3 e^{-3i\varphi} + \dots) + \\ & + (A_1 e^{-i\varphi} + A_2 e^{-2i\varphi} + \dots)(A_1 e^{i\varphi} + 2A_2 e^{2i\varphi} + 3A_3 e^{3i\varphi} + \dots) = \\ & = -M(\zeta_0)(1 + 2\zeta_0 \cos \varphi + 2\zeta_0^2 \cos^2 2\varphi + \dots) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Приравнявая члены с косинусами дуг одинаковой кратности, получим систему уравнений для  $A_1, A_2, \dots$

$$A_1 \dot{A}_1 + 2A_2 \dot{A}_2 + 3A_3 \dot{A}_3 + \dots = -\frac{M(\zeta_0)}{2} \quad (1.13)$$

$$A_1 \dot{A}_2 + 2A_2 \dot{A}_3 + 3A_3 \dot{A}_4 + \dots + 2A_2 \dot{A}_1 + 3A_3 \dot{A}_2 + \dots = -\zeta_0 M(\zeta_0)$$

$$A_1 \dot{A}_3 + 2A_2 \dot{A}_4 + 3A_3 \dot{A}_5 + \dots + 3A_3 \dot{A}_1 + 4A_4 \dot{A}_2 + \dots = -\zeta_0^2 M(\zeta_0)$$

Положив в уравнении (1.12)  $\varphi = 0$ , т. е. считая  $\zeta = 1$ , получим такое соотношение:

$$\dot{f}(1) f'(1) = -\frac{M(\zeta_0)}{2} \frac{1 + \zeta_0}{1 - \zeta_0} \quad (1.14)$$

Аналогично найдем

$$\dot{f}(-1) f'(-1) = \frac{M(\zeta_0)}{2} \frac{1 - \zeta_0}{1 + \zeta_0} \quad (1.15)$$

**Одна скважина в круговой области.** Перейдем теперь к рассмотрению простейшего примера движения, считая, что в начальный момент времени контур  $C$  есть окружность единичного радиуса, внутри которой находится скважина, в точке  $z = c$ . Тогда при  $t = 0$  будем иметь

$$z = f(\zeta) = \zeta, \quad A_1(0) = 1, \quad A_2(0) = A_3(0) = \dots = 0, \quad \zeta_0 = c$$

Величина  $\zeta_0$  является функцией времени, и, по мере того как будет стягиваться контур  $C$  и приближаться к скважине, на плоскости  $\zeta$  точка  $\zeta_0$  будет перемещаться и приближаться к контуру единичного круга (однако, если в начальный момент времени было  $\zeta_0 = 0$ , то и все время будет  $\zeta_0 = 0$ ). Тогда система (1.13) даст для  $t = 0$

$$\dot{A}_1 = -\frac{M_0}{2}, \quad \dot{A}_2 = -cM_0, \quad \dot{A}_3 = -c^2M_0, \dots$$

$$M_0 = \frac{2(p_1 - p_0) \times}{\mu m} \varepsilon, \quad \varepsilon = 1 / \lg \frac{1-c^2}{\delta}$$

Из (1.14) и (1.15) получаем соответственно

$$\dot{f}(1) = -\frac{M_0}{2} \frac{1+c}{1-c}, \quad \dot{f}(-1) = \frac{M_0}{2} \frac{1-c}{1+c}$$

Далее, дифференцируя по времени уравнения (1.12), получим

$$\begin{aligned} A_1 \ddot{A}_1 + 2A_2 \dot{A}_2 + \dots + \dot{A}_1^2 + 2\dot{A}_2^2 + 3\dot{A}_3^2 + \dots &= -\frac{\dot{M}(\zeta_0)}{2} \\ A_1 \ddot{A}_2 + 2A_2 \ddot{A}_3 + \dots + 2A_2 \ddot{A}_1 + \dots + \\ + (A_1 \dot{A}_2 + 2A_2 \dot{A}_3 + 3A_3 \dot{A}_4 + \dots) + (2A_1 \dot{A}_2 + 3A_2 \dot{A}_3 + \dots) &= -\zeta_0 \dot{M} - \dot{\zeta}_0 M \\ A_1 \ddot{A}_3 + \dots + (A_1 \dot{A}_3 + 2A_2 \dot{A}_4 + \dots) + (3A_1 \dot{A}_3 + 4A_2 \dot{A}_4 + \dots) &= +\zeta_0^2 \dot{M} - 2\zeta_0 \dot{\zeta}_0 M \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

При  $t = 0$  будем иметь

$$\ddot{A}_1 = -(\dot{A}_1^2 + 2\dot{A}_2^2 + 3\dot{A}_3^2 + \dots) - \frac{M_0}{2}$$

$$\ddot{A}_2 = -(\dot{A}_1 \dot{A}_2 + 2\dot{A}_2 \dot{A}_3 + \dots + 2\dot{A}_1 \dot{A}_2 + 3\dot{A}_2 \dot{A}_3 + \dots) - cM_0 - cM_0$$

Чтобы найти  $M_0$ , продифференцируем по  $t$  выражение (1.11). Имеем

$$M = -\frac{a}{\lg^2 \left[ \frac{1}{\delta} (1 - \zeta_0^2) f'(\zeta_0) \right]} \left\{ -\frac{2\zeta_0 \dot{\zeta}_0}{1 - \zeta_0^2} + \frac{f'(\zeta_0) + f''(\zeta_0) \zeta_0}{f'(\zeta_0)} \right\}$$

$$M = -\frac{a}{\lg^2 \frac{1-c^2}{\delta}} \left\{ -\frac{2cc}{1-c^2} + f'(c) \right\}, \quad a = \frac{2(p_1 - p_0) \times}{\mu m}$$

По формуле (1.7)

$$\dot{c} = -\frac{\dot{f}(c)}{f'(c)} = -(\dot{A}_1 c + \dot{A}_2 c^2 + \dot{A}_3 c^3 + \dots) = \frac{M_0}{2} \frac{c(1+c^2)}{1-c^2}$$

$$f'(c) = \dot{A}_1 + 2\dot{A}_2 c + 3\dot{A}_3 c^2 + \dots = -\frac{M_0(1+2c-c^4)}{2(1-c^2)^2}$$

Подставляя последние выражения в формулу для  $\dot{M}_0$ , получим

$$\dot{M}_0 = \frac{M_0^2 \varepsilon}{2} \frac{1 + 4c^2 + c^4}{(1 - c^2)^2}$$

Если подставить в выражения для  $\ddot{A}_1, \ddot{A}_2, \dots$  найденные значения для  $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dots$ , то получим окончательно, произведя суммирование встречающихся при этом рядов:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1 &= -\frac{M_0^2}{4(1-c^2)^2} \left\{ 1 + 6c^2 - 3c^4 + \varepsilon(1 + 4c^2 + c^4) \right\} \\ \ddot{A}_2 &= -\frac{M_0^2 c}{(1-c^2)^2} \left\{ 2 + 2c^2 - 2c^4 + \frac{\varepsilon}{2}(1 + 4c^2 + c^4) \right\} \\ \ddot{A}_3 &= -\frac{M_0^2 c^2}{(1-c^2)^2} \left\{ 3 + 2c^2 - 3c^4 + \frac{\varepsilon}{2}(1 + 4c^2 + c^4) \right\} \\ \ddot{A}_4 &= -\frac{M_0^2 c^3}{(1-c^2)^2} \left\{ 4 + 2c^2 - 4c^4 + \frac{\varepsilon}{2}(1 + 4c^2 + c^4) \right\} \\ &\dots \end{aligned}$$

С помощью (1.14) и (1.15) или непосредственным суммированием всех  $\ddot{A}_k$  найдем

$$\begin{aligned} \ddot{f}(1) &= -\frac{M_0^2}{4(1-c)^2(1+c)} \left\{ 1 + 6c + 4c^2 + 2c^3 - c^4 + \varepsilon(1 + 4c^2 + c^4) \right\} \\ \ddot{f}(-1) &= \frac{M_0^2}{4(1+c)^2(1-c)} \left\{ 1 - 6c + 4c^2 - 2c^3 - c^4 + \varepsilon(1 + 4c^2 + c^4) \right\} \end{aligned}$$

Аналогичными вычислениями найдем третьи производные

$$\begin{aligned} \dddot{A}_1 &= -\frac{M_0^3}{8(1-c^2)^4} \left\{ 3(1 + 36c^2 + 26c^4 - 20c^6 + 5c^8) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon(5 + 70c^2 + 126c^4 - 10c^6 - 11c^8) + 3\varepsilon^2(1 + 4c^2 + c^4)^2 \right\} \\ \dddot{A}_2 &= -\frac{M_0^3 c}{2(1-c^2)^4} \left\{ 3(4 + 28c^2 - 11c^6 + 3c^8) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon(7 + 50c^2 + 54c^4 - 14c^6 - 7c^8) + \frac{3}{2}\varepsilon^2(1 + 4c^2 + c^4)^2 \right\} \\ \dddot{f}(1) &= -\frac{M_0^3}{8(1-c)^3(1+c)^3} \left\{ 3P_1(c) + \varepsilon P_2(c) + 3\varepsilon^2(1 + 4c^2 + c^4)^2 \right\} \\ P_1(c) &= 1 + 14c + 36c^2 + 58c^3 + 30c^4 + 10c^5 - 4c^6 - 2c^7 + c^8 \\ P_2(c) &= 5 + 18c + 64c^2 + 78c^3 + 108c^4 + 42c^5 + 8c^6 + 6c^7 - 5c^8 \end{aligned}$$

Выражение  $\dddot{f}(-1)$  получается из  $\dddot{f}(1)$  заменой  $c$  на  $-c$ .

Теперь мы можем определить положение контура  $C$  для значений  $t$ , близких к начальному, и во всяком случае меньших величины  $T$  — момента начала обводнения скважины. Действительно, из (1.3) следует, что уравнения контура  $C$  можно написать в форме, зависящей от параметра  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + A_3 \cos 3\varphi + \dots \\ y &= A_1 \sin \varphi + A_2 \sin 2\varphi + A_3 \sin 3\varphi + \dots \end{aligned}$$

где

$$A_1 = 1 + \dot{A}_1 t + \frac{\ddot{A}_1}{2} t^2 + \frac{\dddot{A}_1}{6} t^3 + \dots$$

$$A_2 = \dot{A}_2 t + \frac{\ddot{A}_2}{2} t^2 + \frac{\dddot{A}_2}{6} t^3 + \dots$$

$$A_3 = \dot{A}_3 t + \frac{\ddot{A}_3}{2} t^2 + \dots$$

Обозначим через  $x_1$  абсциссу самой близкой к скважине точки контура  $C$ . Будем иметь

$$x_1 = 1 + \dot{j}(1)t + \frac{\ddot{j}(1)}{2} t^2 + \frac{\dddot{j}(1)}{6} t^3 + \dots$$

Для точки, наиболее удаленной от скважины, получим

$$x_2 = -1 + \dot{j}(-1)t + \frac{\ddot{j}(-1)}{2} t^2 + \frac{\dddot{j}(-1)}{6} t^3 + \dots$$

Значения  $\dot{j}(1)$ ,  $\ddot{j}(-1)$ , ... определяются по формулам, найденным выше.

Момент начала обводнения скважины  $T$  найдем из уравнения для  $x_1$ , — это есть значение  $t$ , для которого  $x_1 = c$ .

Наконец, представляет интерес определить зависимость дебита скважины от времени. Очевидно, что этот дебит должен возрастать со временем, так как перепад давления  $p_1 - p_0$  происходит по мере возрастания  $t$  на все более коротком расстоянии. Выпишем формулу для величины  $M(t)$ , пропорциональной дебиту:

$$M = M_0 + \dot{M}_0 t + \frac{\ddot{M}_0}{2} t^2 + \dots$$

$$M_0 = \frac{2(p_1 - p_0) \varepsilon}{\mu m} \varepsilon, \quad \dot{M}_0 = \frac{M_0^2 \varepsilon}{2} \frac{1 + 4c^2 + c^4}{(1 - c^2)^2}$$

$$\ddot{M}_0 = \frac{M_0^3 \varepsilon}{2(1 - c^2)^4} \left\{ 4 + 20c^2 + 30c^4 + 4c^6 - c^8 + \frac{3}{2} \varepsilon (1 + 4c^2 + c^4)^2 \right\}$$

$$\left( \varepsilon = 1 / \lg \frac{1 - c^2}{\delta} \right)$$

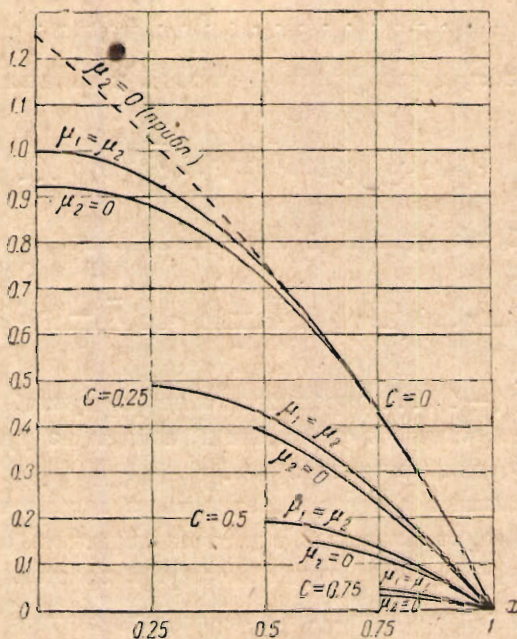
При  $c = 0$ , т. е. когда скважина находится в центре круговой области, нетрудно получить точное решение задачи в виде уравнения, выражающего зависимость времени от радиуса области, занятой жидкостью

$$\tau = M_0 t = \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) (1 - r^2) + \varepsilon r^2 \lg \frac{1}{r}$$

$$\varepsilon = 1 / \lg \frac{2}{\delta}, \quad M_0 = \frac{2 \times (p_1 - p_0)}{\mu m \lg 1 / \delta}$$

По полученным формулам произведены вычисления для  $c = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  и  $\delta = \frac{1}{1000}$ . Так как обычно радиус скважины примерно равен 0.1 м, то наша первоначально круговая область имеет радиус порядка 100 м.

Результаты этих вычислений сопоставлены с результатами, полученными в предположении, что вязкости двух жидкостей — нефти и воды — одинаковы. А именно, мы считаем, что в начальный момент времени окружность единичного радиуса является линией равного давления, и следим за перемещением жидких частиц, составляющих первоначально круговой контур. Скважина попрежнему находится на расстоянии  $c$  от центра окружности. Такого рода задачи решали Muskat<sup>[2]</sup> и Щелкачев.



Фиг. 4

Тогда для точки, наименее удаленной от скважины, получаем такую зависимость между радиусом-вектором и временем:

$$\tau_1 = M_0 t_1 = \frac{1+c^2}{1-c^2} (1-r^2) - \frac{2c}{1-c^2} \left( \frac{1-r^3}{3} + 1-r \right)$$

Для наиболее удаленной от скважины точки контура эта зависимость будет иметь вид

$$\tau_2 = M_0 t_2 = \frac{1+c^2}{1-c^2} (1-r^2) + \frac{2c}{1-c^2} \left( \frac{1-r^3}{3} + 1-r \right)$$

Момент начала обводнения  $T$  определяется по формуле

$$T = \frac{3 - 5c + c^2 + c^3}{3(1+c)}$$

( $T$  найдем, положив  $r=c$  в формуле для  $\tau_1$ ).

Получаются такие результаты: разница между обводнениями (лейбеновским, т. е. отвечающим  $\mu_2 = 0$ , и случаем  $\mu_1 = \mu_2$ ) очень незначительна, так что большого практического значения вычисления для случая  $\mu_2 = 0$  не



имеют. Однако, как нам кажется, самый метод решения рассматриваемых нами задач представляет интерес, так как он может быть обобщен на ряд других случаев: неустановившийся приток к дренажу, некоторые случаи движения тяжелой жидкости и т. д. Поэтому вычисления были нами произведены главным образом с целью суждения о быстроте сходимости полученных рядов. Мы пользовались всего тремя членами ряда (до  $t^3$  включительно). Оказалось, что этого количества членов достаточно для того, чтобы дойти до момента начала обводнения скважины при  $c = 0,75$ , при меньших значениях  $c$  сходимость хуже; самая плохая — при  $c = 0$ ; пунктирная линия графика (фиг. 4) представляет приближенную кривую, вычисленную по трем членам ряда. Характер сходимости виден при вычислениях непосредственно: пока третий член ряда меньше второго, получаются точки, совпадающие с точной кривой; когда он приближается по величине ко второму члену, вычисления делаются ненадежными. Поэтому если бы было нужно произвести более точные вычисления, то надо было бы вычислить еще несколько коэффициентов ряда.

**Кольцевая батарея скважин.** Предположим теперь, что у нас на плоскости  $\zeta$  имеется  $n$  скважин, расположенных на окружности радиуса  $|\zeta_0|$ , концентричной с кругом единичного радиуса — контуром постоянного давления (фиг. 5). Комплексный потенциал такого течения имеет вид

$$\omega(\zeta) = -\frac{q}{2\pi} \lg \frac{\zeta^n - \zeta_0^n}{1 - \zeta_0^n \zeta^n}$$

Предположим, что мы отобразили эту круговую область на некоторую область плоскости  $z$ , ограниченную контуром  $C$ , с помощью преобразования

$$z = f(\zeta, t)$$



Фиг. 5

Подобно тому, как это было сделано для случая одной скважины, найдем уравнение для  $f(\zeta)$ , которое должно выполняться на контуре  $C$  во все время движения:

$$\frac{1}{\zeta} \dot{f}(\zeta) \bar{f}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \zeta \dot{f}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) f'(\zeta) = -\frac{qn}{\pi m} \frac{1 - (\zeta_0 \bar{\zeta}_0)^n}{(1 - \zeta_0^n / \zeta^n)(1 - \zeta_0^n \zeta^n)}$$

$$q = \frac{2\pi z \Delta p}{\mu l g} \frac{(1 - \zeta_0^{2n}) f'(\zeta_0)}{n d \zeta_0^{n-1}}$$

Положим теперь

$$f(\zeta) = A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 + \dots$$

где  $A_k$  — искомые функции времени. Опять ограничиваемся симметричным случаем, когда  $A_k$  вещественно. На контуре  $C$  имеем  $\zeta = e^{i\varphi}$ , а потому получаем аналогично (1.12)

$$\begin{aligned} & (A_1 e^{i\varphi} + A_2 e^{2i\varphi} + \dots) (A_1 e^{-i\varphi} + 2A_2 e^{-2i\varphi} + \dots) + \\ & + (A_1 e^{-i\varphi} + A_2 e^{-2i\varphi} + \dots) (A_1 e^{i\varphi} + 2A_2 e^{2i\varphi} + \dots) = \\ & = -M(\zeta_0) (1 + 2\zeta_0^n \cos n\varphi + 2\zeta_0^{2n} \cos 2n\varphi + \dots) \end{aligned}$$

Пусть в начальный момент времени скважины находились на окружности радиуса  $c$  и контур  $C$  был окружностью единичного радиуса. Тогда при  $t = 0$

$$A_1 = 1, \quad A_2 = A_3 = \dots = 0$$

Можно показать, что в дальнейшем все  $A_k$  будут оставаться равными нулю, кроме  $A_1, A_{n+1}, A_{2n+1}, A_{3n+1}, \dots$ . Для этих коэффициентов будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} A_1 \dot{A}_1 + (n+1) A_{n+1} \dot{A}_{n+1} + (2n+1) A_{2n+1} \dot{A}_{2n+1} + \dots &= + \frac{M(\zeta_0)}{2} \\ A_1 A_{n+1} + (n+1) A_{n+1} A_1 + \dots &= - \zeta_0^n M(\zeta_0) \\ A_1 A_{2n+1} + (2n+1) A_{2n+1} A_1 + \dots &= - \zeta_0^{2n} M(\zeta_0) \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

При  $t = 0$  значения первых производных по времени будут

$$\dot{A}_1 = -\frac{M_0}{2} \dot{A}, \quad \dot{A}_{n+1} = -c^n M_0, \quad \dot{A}_{2n+1} = -c^{2n} M_0, \dots$$

Для вторых производных после вычисления получим

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1 &= -\frac{M_0^2}{4(1-c^{2n})^2} \{1 + (4n+2)c^{2n} - 3c^{4n} + \varepsilon n(1+4c^{2n}+c^{4n})\} \\ \ddot{A}_{n+1} &= -\frac{M_0^2 c^{2n}}{(1-c^{2n})^2} \left\{ (n+1)(1-c^{4n}) + 2nc^{2n} + \frac{\varepsilon n}{2}(1+4c^{2n}+c^{4n}) \right\} \\ \ddot{A}_{2n+1} &= -\frac{M_0^2 c^{2n}}{(1-c^{2n})^2} \left\{ (2n+1)(1-c^{4n}) + 2nc^{2n} + \frac{\varepsilon n}{2}(1+4c^{2n}+c^{4n}) \right\} \\ \ddot{A}_{3n+1} &= -\frac{M_0^2 c^{3n}}{(1-c^{2n})^2} \left\{ (3n+1)(1-c^{4n}) + 2nc^{2n} + \frac{\varepsilon n}{2}(1+4c^{2n}+c^{4n}) \right\} \end{aligned}$$

Для третьих производных  $\ddot{\ddot{A}}_1$  и  $\ddot{\ddot{A}}_{n+1}$  получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{A}}_1 &= -\frac{M_0^3 \{3P_1(c) + \varepsilon P_2(c)\}}{8(1-c^{2n})^4} - \frac{3M_0^3 \varepsilon^2}{8} \frac{n^2(1+4c^{2n}+c^{4n})^2}{(1-c^{2n})^4} \\ \ddot{\ddot{A}}_{n+1} &= -\frac{M_0^3 c^{2n} \{Q_1(c) + \varepsilon Q_2(c)\}}{4(1-c^{2n})^4} - \frac{3M_0^3 \varepsilon^2}{3} \frac{n^2 c^{2n} (1+4c^{2n}+c^{4n})^2}{(1-c^{2n})^4} \end{aligned}$$

$$P_1(c) = 1 + (8n^2 + 20n + 8)c^{2n} + (16n^2 + 24n - 14)c^{4n} + (8n^2 - 28n)c^{6n} + 5c^{8n}$$

$$\begin{aligned} P_2(c) &= 2n + 3 + (24n^2 + 27n + 19)c^{2n} + (60n^2 + 47n + 19)c^{4n} + \\ &+ (24n^2 - 3n - 31)c^{6n} - (n+10)c^{8n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1(c) &= 3n^2 + 12n + 9 + (70n^2 + 86n + 12)c^{2n} + (92n^2 - 50n - 42)c^{4n} - \\ &- (22n^2 + 56n - 12)c^{6n} + (n^2 + 8n + 9)c^{8n} \end{aligned}$$

$$Q_2(c) = 6n(1 + 4c^{2n} + c^{4n})[(n+1)(1 - c^{4n}) + 2nc^{2n}] + 2n + (24n^2 + 15n + 1)c^{2n} + (60n^2 - n + 1)c^{4n} + (24n^2 - 15n - 1)c^{6n} - (n+1)c^{8n}$$

Уравнение контура будет иметь вид

$$x = A_1 \cos \varphi + A_{n+1} \cos (n+1) \varphi + A_{2n+1} \cos (2n+1) \varphi + \dots$$

$$y = A_1 \sin \varphi + A_{n+1} \sin (n+1) \varphi + A_{2n+1} \sin (2n+1) \varphi + \dots$$

где

$$A_1 = 1 + \dot{A}_1 t + \frac{\ddot{A}_1}{2} t^2 + \frac{\dddot{A}_1}{6} t^3 + \dots$$

$$A_{n+1} = \dot{A}_{n+1} t + \frac{1}{2} \ddot{A}_{n+1} t^2 + \frac{1}{6} \dddot{A}_{n+1} t^3 + \dots$$

$$A_{2n+1} = \dot{A}_{2n+1} t + \frac{1}{2} \ddot{A}_{2n+1} t^2 + \dots$$

Для точки контура, наименее удаленной от скважины (соответствующей значению  $\varphi = 0, \zeta = 1$ ), будем иметь

$$x_1 = 1 + \dot{j}(1) t + \frac{\ddot{j}(1)}{2} t^2 + \frac{\dddot{j}(1)}{6} t^3 + \dots$$

$$\dot{j}(1) = -\frac{M_0}{2} \frac{1+c^n}{1-c^n}$$

$$\ddot{j}(1) = -\frac{M_0^2}{4(1-c^n)^3(1+c^n)} \{1 + (4n+2)c^n + 4nc^{2n} + (4n-2)c^{3n} - c^{4n}\} - \frac{M_0^2 n \varepsilon (1+4c^{2n}+c^{4n})}{4(1-c^n)^3(1+c^n)}$$

$$\dddot{j}(1) = -\frac{M_0^3}{8(1-c^n)^5(1+c^n)^3} \{R_1(c) + \varepsilon R_2(c) + 3n^2 \varepsilon^2 (1+4c^{2n}+c^{4n})^2\}$$

$$R_1(c) = 3 + (6n^2 + 18n + 18)c^n + (36n^2 + 60n^2 + 12)c^{2n} + (90n^2 + 82n + 2)c^{3n} + (120n^2 - 30)c^{4n} + (90n^2 - 34n - 26)c^{5n} + (36n^2 - 60n^2 + 12)c^{6n} + (6n^2 - 18n + 6)c^{7n} + 3c^{8n}$$

$$R_2(c) = 5n + (40n^2 + 8n)c^n + (36n^2 + 27n + 1)c^{2n} + (50n^2 + 28n)c^{3n} + (108n^2 - n + 1)c^{4n} + (50n^2 - 8n)c^{5n} + (36n^2 - 27n - 1)c^{6n} + (10n^2 - 4n)c^{7n} - (4n + 1)c^{8n}$$

Для радиуса-вектора точки контура, наиболее удаленной от скважины, получим

$$x_2 = -1 + \dot{j}(-1) t + \frac{\ddot{j}(-1)}{2} t^2 + \dots$$

Чтобы получить  $\dot{j}(-1), \ddot{j}(-1), \dots$ , достаточно в выражениях для  $\dot{j}(1), \ddot{j}(1), \dots$  заменить  $c^n$  на  $-c^n$ .

Наконец, выпишем формулы, определяющие изменение дебита скважин со временем (суммарного дебита всех  $n$  скважин):

$$M = \frac{nq}{\pi m} = M_0 + \dot{M}_0 t + \frac{\ddot{M}_0}{2} t^2 + \dots$$

$$M_0 = \frac{2\pi k \Delta p \varepsilon}{\mu n}, \quad \dot{M}_0 = \frac{M_0^2 \varepsilon n (1 + 4c^{2n} + c^{4n})}{2(1 - c^{2n})^2}$$

$$\ddot{M}_0 = \frac{M_0^3 \varepsilon}{4(1 - c^{2n})^4} \{ P_1(c) + 3n^2 \varepsilon (1 + 4c^{2n} + c^{4n})^2 \}$$

$$\varepsilon = \left( \lg \frac{1 - c^{2n}}{n \delta c^{n-1}} \right)^{-1}$$

$$P(c) = 2n + (24n^2 + 15n + 4)c^{2n} + (60n^2 - n + 4)c^{4n} + (24n^2 - 15n - 1)c^{6n} - (n + 1)c^{8n}$$

Заметим, что в случае сколько-нибудь значительного числа скважин  $c^n$  мало по сравнению с единицей, что может внести значительные упрощения в полученные формулы. Так, для  $c = \frac{1}{2}$  и  $n = 12$  почти во всех формулах можно отбросить  $c^{2n}$ ,  $c^{4n}$  и более высокие степени  $c$ .

Отметим, что вычисления к работе произведены М. М. Семчиной.

Поступила в редакцию  
4 XI 1944

Институт механики  
Академии Наук СССР

#### P. J. POLOUBARINOVA-KOCHINA. — CONCERNING UNSTEADY MOTIONS IN THE THEORY OF FILTRATION

The question is approached in the following manner. At a given instant of time a region of porous medium is occupied by oil or another liquid. Inside the region the location of the wells is given. The problem is to determine the change of region contours with the passage of time.

The author investigates the case when at the initial moment the given region is a circle containing one well-hole or a ring of well-holes. The solutions obtained are valid only until the moment of water-flooding of the well-hole.

This method can be extended for a heavy liquid.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика. Ч. II. Горькобнефтехиздат. 1934.
2. Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media. New York a. London. 1937.
3. Щелкачев В. Н. Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем. АзГОНТИ. Баку. 1939.