Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том IX, 1945

# О ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

М. Д. Хаскинд

(Москва)

В работе «Плоская задача о колебаниях тел под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины»[1] мы, применяя метод Н. Е. Кочина[2], рассмотрели задачу об определении волнового движения тяжелой жидкости, возбуждаемого периодическими колебаниями тела произвольной формы, находящегося под свободной поверхностью жидкости конечной глубины.

В настоящей статье тем же методом рассматривается плоская задача о волновом движении, возникающем в тяжелой жидкости при горизонтальном, прямолинейном и равномерном движении твердого тела произвольной формы, погруженного под поверхность жидкости конечной глубины.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим плоскую задачу о поступательном движении твердого тела под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости конечной глубины. Мы изучим случай, когда движение тела происходит с постоянной горизонтальной скоростью $c$. Движение жидкости будем определять, пользуясь подвижной системой координат $Oxy$, скрепленной с телом, ось $x$ совпадает с невозмущенным уровнем жидкости и направлена в сторону движения тела; ось $y$ направлена вертикально вверх.

Примем, что движение жидкости потенциальное и установившееся относительно тела. Из интеграла Лагранжа для давления внутри жидкости имеем формулу

$$p - p_0 = \rho c \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \rho \frac{1}{2} v^2 - \rho g y \tag{1.1}$$

где $p_0$ — атмосферное давление, $\rho$ — плотность жидкости, $g$ — ускорение силы тяжести, $\varphi(x,y)$ — потенциал абсолютного движения жидкости и $v = |\operatorname{grad} \varphi|$ — величина абсолютной скорости жидкости.

Для определения функции $\varphi(x, y)$ имеем граничные условия:

на смоченном контуре тела условие обтекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = c \cos(n, x) \qquad \text{на } C \tag{1.2}$$

где $n$ — внешняя нормаль к контуру $C$;

на свободной границе $p = p_0$, и поэтому

$$c \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} v^2 - gy = 0 \tag{1.3}$$

на дне канала при $y = -h_0$ имеем условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

Следуя теории волн малой амплитуды, условие (1.3) можно линеаризировать. Для этого граничное условие (1.3) переносим на ось $x$ и пренебрегаем членом $\frac{1}{2}v^2$. Таким образом вместо условия (1.3) имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{g}{c}y(x)=0 \tag{1.5}$$

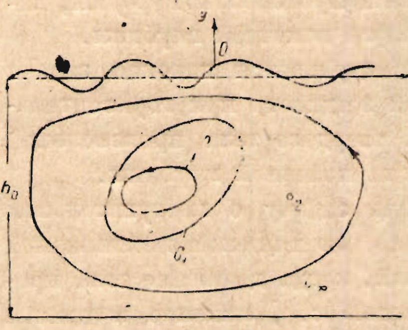
Легко видеть, что на свободной поверхности справедливо соотношение.

$$cy(x)=\varphi+\text{const} \tag{1.6}$$

где $\psi$ — функция тока. В самом деле, обозначив через $\psi_0$ функцию тока движения жидкости относительно тела, имеем

$$\psi_0=\psi-cy, \qquad \text{или} \qquad cy=\psi-\psi_0$$

Отсюда следует (1.6), так как граница жидкости в относительном движении изображается линиями тока, на которых $\psi_0$ постоянно. Для свободной поверхности можно принять $\psi_0=0$. Следовательно, на свободной поверхности имеем



Фиг. 1

$$cy(x)=\psi$$

и поэтому граничное условие (1.5) примет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\nu\psi=0 \quad \text{при} \quad y=0 \tag{1.7}$$

где

$$\nu=\frac{g}{c^2} \tag{1.8}$$

Из условия (1.5) видно, что уравнение свободной поверхности будет

$$y(x)=\frac{c}{g}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_{y=0} \tag{1.9}$$

**2. Основные формулы задачи.** Математически формулировать задачу можно следующим образом. Требуется определить характеристическую функцию $w(z)=\varphi+i\psi$ $(z=x+iy,\ i=\sqrt{-1})$, удовлетворяющую условиям

1°. При $0>y>-h_0$ в области, занятой жидкостью, производная $dw/dz$ ограничена и в бесконечности при $x\to+\infty$ производная $dw/dz$ исчезает.

2°. На контуре $C$ имеем условие обтекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=c\cos(n,x)$$

3°. На свободной поверхности при $y=0$ имеем линеаризированное условие о постоянстве давления

$$\mathrm{Re}\left(\frac{dw}{dz}+i\nu w\right)=0$$

4°. На дне канала при $y=-h_0$ имеем условие

$$\mathrm{Im}\,\frac{dw}{dz}=0$$

Возьмем в области, занятой жидкостью, точку $z$ и проведем два контура $C_1$ и $C_\infty$, из которых $C_\infty$ охватывает как точку $z$, так и контур $C$, а контур $C_1$ охватывает контур $C$, но не охватывает точки $z$ (фиг. 1).

По формуле Коши для однозначной функции $dw/dz = \bar{v}(z)$ будем иметь

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{\bar{v}(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\infty} \frac{v(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta} \tag{2.1}$$

Здесь черта над буквой обозначает, как обычно, переход к комплексно сопряженному значению. Введем обозначения

$$V_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{\bar{v}(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta}, \qquad V_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\infty} \frac{v(\zeta)\,d\zeta}{z-} \tag{2.2}$$

Ясно, что $V_1(z)$ есть голоморфная функция во всей плоскости комплексного переменного вне контура $C_1$, имеющая на бесконечности порядок $z^{-1}$ и продолжимая аналитически на всю ту часть плоскости комплексного переменного, которая лежит вне контура $C$, а $V_2(z)$ есть голоморфная функция внутри контура $C_\infty$ и, расширяя контур $C_\infty$, можно получить аналитическое продолжение этой функции на всю полосу $0 > y > -h_0$.

Функцию $V_2(z)$ можно представить в другом виде. Заметим для этого, что можно найти функцию $\omega(z)$, которая в полосе $0 > y > -h_0$ имеет единственный полюс первого порядка $\zeta = \xi + i\eta$ с вычетом $A/2\pi i$ и которая удовлетворяет условиям $1^\circ$, $3^\circ$ и $4^\circ$.

В самом деле, для вихря интенсивности $\Gamma$, находящегося в комплексной точке $\zeta = \xi + i\eta$, Тихоновым [5] получено выражение комплексной скорости

$$\omega_\Gamma(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i(z-\zeta)} - \frac{\Gamma}{2\pi i(z-\zeta+2ih_0)} -$$
$$-\frac{\Gamma}{\pi}\int\limits_0^\infty (\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)\frac{\operatorname{sh}\lambda(\eta+h_0)\cos\lambda(z-\xi+ih_0)}{\nu\operatorname{sh}\lambda h_0 - \lambda\operatorname{ch}\lambda h_0}\,d\lambda -$$
$$-\Gamma\nu\frac{\operatorname{sh}\lambda_0(\eta+h_0)}{\nu h_0 - \operatorname{ch}^2\lambda_0 h_0}\sin\lambda_0(z-\xi+ih_0) \tag{2.3}$$

где $\lambda_0$ — действительный и положительный корень уравнения

$$\nu\operatorname{sh}\lambda h_0 = \lambda\operatorname{ch}\lambda h_0 \qquad (2.$$

При $c^2 < \sqrt{gh_0}$ здесь и в дальнейшем, во всех случаях, когда подинтегральная функция имеет особенность, под интегралом понимается его главное значение в смысле Коши.

При $c^2 > \sqrt{gh_0}$ уравнение (2.4) имеет только мнимые корни и четвертый член формулы (2.3), обусловливающий наличие свободных волн, отсутствует.

Для источника с интенсивностью $Q$, находящегося в комплексной точке $\zeta = \xi + i\eta$, выражение комплексной скорости можно получить тем же путем, как в случае вихря. Опуская вычисления, приводим окончательный результат

$$\omega_Q(z) = \frac{Q}{2\pi(z-\zeta)} + \frac{Q}{2\pi(z-\zeta+2ih_0)} +$$
$$+\frac{Q}{\pi}\int\limits_0^\infty (\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)\frac{\operatorname{ch}\lambda(\eta+h_0)\sin\lambda(z-\xi+ih_0)}{\nu\operatorname{sh}\lambda h_0 - \lambda\operatorname{ch}\lambda h_0}\,d\lambda -$$
$$-Q\nu\frac{\operatorname{ch}\lambda_0(\eta+h_0)}{\nu h_0 - \operatorname{ch}^2\lambda_0 h_0}\cos\lambda_0(z-\xi+ih_0) \tag{2.5}$$

Пользуясь выражениями (2.3) и (2.5), нетрудно получить указанную выше функцию $\omega(z)$. Для этого, положив $A = \Gamma + iQ$, после несложных преобразований получим

$$\omega(z) = \frac{A}{2\pi i\,(z-\zeta)} - \frac{\overline{A}}{2\pi i\,(z-\overline{\zeta}+2ih_0)} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty (\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)\frac{\overline{A}\sin\lambda(z-\overline{\zeta}+2ih_0) - A\sin\lambda(z-\zeta)}{\nu\,\mathrm{sh}\,\lambda h_0 - \lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda h_0}\,d\lambda +$$

$$+\frac{\nu}{2i}\,\frac{\overline{A}\cos\lambda_0(z-\overline{\zeta}+2ih_0) - A\cos\lambda_0(z-\zeta)}{\nu h_0 - \mathrm{ch}^2\lambda_0 h_0} \tag{2.6}$$

Здесь, как и в предыдущих формулах, четвертый член, обусловливающий наличие свободных волн, имеет место лишь при $c^2 < \sqrt{gh_0}$.

Полагая в этой формуле $A = \overline{v}(\zeta)\,d\zeta$ и интегрируя затем по контуру $C_1$, сможем принять

$$v(z) = V_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} v(\zeta)\left\{\frac{1}{z-\overline{\zeta}+2ih_0} + \int_0^\infty(\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)\frac{\sin\lambda(z-\overline{\zeta}+2ih_0)}{\nu\,\mathrm{sh}\,\lambda h_0-\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda h_0}\,d\lambda -\right.$$

$$\left.-\pi\nu\frac{\cos\lambda_0(z-\overline{\zeta}+2ih_0)}{\nu h_0-\mathrm{ch}^2\lambda_0 h_0}\right\}d\overline{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\overline{v}(\zeta)\left\{\int_0^\infty(\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)\frac{\sin\lambda(z-\zeta)}{\nu\,\mathrm{sh}\,\lambda h_0-\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda h_0}\,d\lambda -\right.$$

$$\left.-\pi\nu\frac{\cos\lambda_0(z-\zeta)}{\nu h_0-\mathrm{ch}^2\lambda_0 h_0}\right\}d\zeta \tag{2.7}$$

Заметим, что если обе точки $z$ и $\zeta$ находятся в полосе $0 > y > -h_0$, то имеет место равенство

$$\frac{1}{z-\overline{\zeta}+2ih_0} = -i\int_0^\infty \exp[i\lambda(z-\overline{\zeta}+2ih_0)]\,d\lambda \tag{2.8}$$

Приняв это равенство во внимание, из формулы (2.7) убеждаемся, что функция $V_2(z)$ может быть представлена в виде

$$V_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} v(z)\left\{\int_0^\infty\left[-i\exp[i\lambda(z-\overline{\zeta}+2ih_0)] +\right.\right. \tag{2.9}$$

$$\left.\left.+(\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)\frac{\sin\lambda(z-\overline{\zeta}+2ih_0)}{\nu\,\mathrm{sh}\,\lambda h_0-\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda h_0}\right]d\lambda - \pi\nu\frac{\cos\lambda_0(z-\overline{\zeta}+2ih_0)}{\nu h_0-\mathrm{ch}^2\lambda_0 h_0}\right\}d\overline{\zeta} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\overline{v}(\zeta)\left\{\int_0^\infty(\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)\frac{\sin\lambda(z-\zeta)}{\nu\,\mathrm{sh}\,\lambda h_0-\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda h_0}\,d\lambda - \pi\nu\frac{\cos\lambda_0(z-\zeta)}{\nu h_0-\mathrm{ch}^2\lambda_0 h_0}\right\}d\zeta$$

Введем в рассмотрение сопряженные при действительном $\lambda$ функции

$$H(\lambda)=\int_{C_1}\bar{v}(\zeta)\exp-i\lambda\zeta d\zeta,\qquad \overline{H}(\lambda)=\int_{C_1}v(\zeta)\exp i\lambda\bar{\zeta}\,d\bar{\zeta} \tag{2.10}$$

Переставив в формуле (2.9) порядок интегрирования и, совершив несложные преобразования, легко найдем, что

$$V_2(z)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^\infty\Big[H(-\lambda)\exp[i\lambda(z+2ih_0)]+\right.$$

$$+\frac{(\nu+\lambda)\rho\exp(-\lambda h_0)}{2(\nu\operatorname{sh}\lambda h_0-\lambda\operatorname{ch}\lambda h_0)}\Big(\overline{H}(-\lambda)\exp[i\lambda(z+2ih_0)]-\overline{H}(\lambda)\exp[-i\lambda(z+2ih_0)]-$$

$$-H(\lambda)\exp i\lambda z+H(-\lambda)\exp(-i\lambda z)\Big)\Big]d\lambda-$$

$$-\frac{\pi i\nu}{2(\nu h-\operatorname{ch}^2\lambda_0 h_0)}\Big(\overline{H}(-\lambda_0)\exp i\lambda_0(z+2ih_0)+\overline{H}(\lambda_0)\exp[-i\lambda_0(z+2ih_0)]-$$

$$\left.-H(\lambda_0)\exp i\lambda_0 z-H(-\lambda_0)\exp(-i\lambda_0 z)\Big)\right\} \tag{2.11}$$

Представляет интерес найти характер волн, остающихся позади движущегося тела. Для этого найдем сначала асимптотическое выражение комплексной скорости при $x\to-\infty$ в случае вихря и источника. В указанной выше работе А. И. Тихонова[3] асимптотическое выражение комплексной скорости в случае вихря имеет вид

$$(\omega_\Gamma)_{x\to-\infty}=-2\Gamma\nu\frac{\operatorname{sh}\lambda_0(\eta+h_0)}{\nu h_0-\operatorname{ch}^2\lambda_0 h_0}\sin\lambda_0(z-\xi+ih_0) \tag{2.12}$$

Аналогичным путем находится асимптотическое выражение комплексной скорости в случае источника. Опуская вычисления, приводим результат:

$$(\omega_Q)_{x\to-\infty}=-2Q\nu\frac{\operatorname{ch}\lambda_0(\eta+h_0)}{\nu h_0-\operatorname{ch}^2\lambda_0 h_0}\cos\lambda_0(z-\xi+ih_0) \tag{2.13}$$

Для функции $\omega(z)$, имеющей полярность с вычетом $A/2\pi i$, находим асимптотическое выражение

$$(\omega)_{x\to-\infty}=-i\nu\frac{\overline{A}\cos\lambda_0(z-\bar{\xi}+2ih_0)-A\cos\lambda_0(z-\xi)}{\nu h_0-\operatorname{ch}^2\lambda_0 h_0} \tag{2.14}$$

Полагая теперь $A=\bar{v}(\zeta)\,d\zeta$ и интегрируя по контуру $C_1$, найдем асимптотическое выражение функции $\bar{v}(z)=dw/dz$:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{x\to-\infty}=-\frac{i\nu}{2(\nu h_0-\operatorname{ch}^2\lambda_0 h_0)}\big[\overline{H}(-\lambda_0)\exp i\lambda_0(z+2ih_0)+$$

$$+\overline{H}(\lambda_0)\exp[-i\lambda_0(z+2ih_0)]-H(\lambda_0)\exp i\lambda_0 z-H(-\lambda_0)\exp(-i\lambda_0 z)\big] \tag{2.15}$$

Пользуясь, наконец, формулой

$$y(x)=\frac{c}{g}\operatorname{Re}\left(\frac{dw}{dz}\right)_{y=0}$$

легко найдем, что позади при $x \to -\infty$ образуются синусоидальные волны длины $2\pi / \lambda_0$ и амплитуду которых после выполнения несложных преобразований можно представить в виде

$$a = \frac{\operatorname{ch} \lambda_0 h_0}{c\,(\nu h_0 - \operatorname{ch}^2 \lambda_0 h_0)} \left| H(\lambda_0) \exp \lambda_0 h_0 - H(-\lambda_0) \exp - \lambda_0 h_0 \right| \tag{2.16}$$

**3. Формулы для определения сил.** Вычислим теперь силы, действующие на контур $C$. Обозначим через $P$ подъемную силу контура, $R$ — испытываемое им сопротивление, а через $M$ — момент действующих на контур сил относительно начала координат. Эти силы будем вычислять по формулам Чаплыгина-Блазиуса

$$P - iR = -\frac{\rho}{2} \int_{C_2} \bar{v}_0^2(z)\, dz, \qquad M = \operatorname{Re} \frac{\rho}{2} \int_{C_2} z \bar{v}_0^2(z)\, dz \tag{3.1}$$

где $C_2$ есть произвольный контур, находящийся в области $0 > y > -h_0$ и охватывающий контур $C$, а $\bar{v}_0(z)$ есть комплексная скорость в относительном движении, получающемся, если на абсолютный поток наложить равномерное течение жидкости в направлении отрицательной оси $Ox$ со скоростью $c$. Итак,

$$\bar{v}_0(z) = V_1(z) + V_2(z) - c$$

причем за контур $C_1$ берется контур, расположенный между $C$ и $C_2$.

Формулы (3.1) не учитывают подъемной силы Архимеда, равной $g\rho S$, и ее момента, равного $-g\rho S x_c$, где $S$ — площадь, ограниченная контуром $C$, а $x_c$ — абсцисса центра тяжести этой площади.

Вычисляем теперь интеграл:

$$J = \int_{C_2} \bar{v}_0^2(z)\, dz = \int_{C_2} V_1^2(z)\, dz + \int_{C_2} (V_2(z) - c)^2\, dz + 2 \int_{C_2} V_1 (V_2 - c)\, dz$$

Но первый и второй интегралы в правой части равны нулю, так как функция $V_1(z)$ голоморфна вне контура $C_2$ и имеет на бесконечности нуль, по крайней мере, первого порядка, точно так же функция $V_2(z)$ голоморфна внутри контура $C_2$. Поэтому

$$J = 2 \int_{C_2} V_1 V_2\, dz - 2c \int_{C_2} (V_1 + V_2)\, dz = 2 \int_{C_2} V_1 V_2\, dz - 2c \int_{C_2} \bar{v}(z)\, dz$$

Обозначая циркуляцию скорости по любому контуру, охватывающему контур $C$, через $\Gamma$, так что

$$\Gamma = \int_{C} \bar{v}(z)\, dz$$

будем иметь

$$P - iR = -\rho \int_{C_2} V_1 V_2\, dz + \rho c \Gamma \tag{3.2}$$

Воспользовавшись выражениями (2.2) и (2.11), получим

$$\int_{C_2} V_1(z)V_2(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\frac{\overline{v}(\zeta)}{z-\zeta}\Big\{\int_0^\infty\Big[\overline{H}(-\lambda)\exp i\lambda(z+2ih_0)+$$

$$+\frac{\nu+\lambda}{2}\exp(-\lambda h_0)\frac{\overline{H}(-\lambda)\exp i\lambda(z+2ih_0)-\overline{H}(\lambda)\exp[-i\lambda(z+2ih_0)]}{\nu\,\mathrm{sh}\,\lambda h_0-\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda h_0}-$$

$$-\frac{\nu+\lambda}{2}\exp(-\lambda h_0)\frac{H(\lambda)\exp i\lambda z-H(-\lambda)\exp(-i\lambda z)}{\nu\,\mathrm{sh}\,\lambda h_0-\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda h_0}\Big]d\lambda-$$

$$-\frac{\pi i\nu}{2}\frac{\overline{H}(-\lambda_0)\exp i\lambda_0(z+2ih_0)+\overline{H}(\lambda_0)\exp[-i\lambda_0(z+2ih_0)]}{\nu h_0-\mathrm{ch}^2\lambda_0h_0}+$$

$$+\frac{\pi i\nu}{2}\frac{H(\lambda_0)\exp i\lambda_0z+H(-\lambda_0)\exp(-i\lambda_0z)}{\nu h_0-\mathrm{ch}^2\lambda_0h_0}\Big\}\,d\zeta\,dz$$

Переставляя порядок интегрирования и пользуясь в силу того, что точка $\zeta$, принадлежащая контуру $C_1$, лежит внутри контура $C_2$, формулой

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{e^{\pm i\lambda z}}{z-\zeta}\,dz=e^{\pm i\lambda\zeta}$$

получаем

$$\int_{C_2} V_1(z)V_2(z)\,dz=\frac{1}{2\pi}\Big\{\int_0^\infty\Big[|H(-\lambda)|^2\exp(-2\lambda h_0)+$$

$$+\frac{\nu+\lambda}{2}\exp(-\lambda h_0)\frac{|H(-\lambda)|^2\exp(-2\lambda h_0)-|H(\lambda)|^2\exp 2\lambda h_0}{\nu\,\mathrm{sh}\,\lambda h_0-\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda h_0}\Big]d\lambda-$$

$$-\frac{\pi i\nu}{2}\frac{|H(-\lambda_0)|^2\exp(-2\lambda_0h_0)+|H(\lambda_0)|^2\exp 2\lambda_0h_0-2H(\lambda_0)H(-\lambda_0)}{\nu h_0-\mathrm{ch}^2\lambda_0h_0}\Big\}\tag{3.3}$$

Следовательно, формула (2.3) приобретает вид

$$P-iR=\rho c\Gamma-\frac{\rho}{2\pi}\int_0^\infty\Big[|H(-\lambda)|^2\exp(-2\lambda h_0)+$$

$$+(\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)\frac{|H(-\lambda)|^2\exp(-2\lambda h_0)-|H(\lambda)|^2\exp 2\lambda h_0}{2(\nu\,\mathrm{sh}\,\lambda h_0-\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda h_0)}\Big]d\lambda+$$

$$+\frac{i\nu\rho}{4}\frac{|H(-\lambda_0)|^2\exp(-2\lambda_0h_0)+|H(\lambda_0)|^2\exp 2\lambda_0h_0-2H(\lambda_0)H(-\lambda_0)}{\nu h_0-\mathrm{ch}^2\lambda_0h_0}\tag{3.4}$$

Отделяя действующую и мнимую части и прибавляя к $P$ неучитывавшуюся формулой Чаплыгина-Блазиуса подъемную силу Архимеда, найдем, что

$$P=\rho c\Gamma-\frac{\rho}{2\pi}\int_0^\infty\Big[|H(-\lambda)|^2\exp(-2\lambda h_0)+(\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)\times\tag{3.5}$$

$$\times\frac{|H(-\lambda)|^2\exp(-2\lambda h_0)-|H(\lambda)|^2\exp 2\lambda h_0}{2(\nu\,\mathrm{sh}\,\lambda h_0-\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda h_0)}\Big]d\lambda+\nu\rho\frac{\mathrm{Im}\,\{H(\lambda_0)H(-\lambda_0)\}}{2(\nu h_0-\mathrm{ch}^2\lambda_0h_0)}+g\rho S$$

$$R=-\frac{\rho\nu}{4}\frac{|H(\lambda_0)|^2\exp 2\lambda_0h_0+|H(-\lambda_0)|^2(\exp(-2\lambda_0h_0)-2\,\mathrm{Re}\,\{H(\lambda_0)H(-\lambda_0)\}}{\nu h_0-\mathrm{ch}^2\lambda_0h_0}\tag{3.6}$$

Формуле (3.6) можно придать иной вид, а именно

$$R = -\frac{\rho\nu}{4}\frac{|\overline{H}(\lambda_0)\exp\lambda_0 h_0 - H(-\lambda_0)\exp(-\lambda_0 h_0)|^2}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h_0 - \nu h_0} \tag{3.7}$$

Легко установить, что полное сопротивление подводного крыла состоит только из волнового сопротивления. В самом деле, беря известную формулу для вычисления волнового сопротивления в случае жидкости конечной глубины

$$R = \frac{1}{4}\rho g a^2\left(1 - \frac{2\lambda_0 h_0}{\operatorname{sh} 2\lambda_0 h_0}\right) \tag{3.8}$$

и вспоминая значение амплитуды $a$ из формулы (2.16), после некоторых преобразований приходим к формуле (3.7).

Переходим теперь к вычислению момента действующих сил на контур $C$. Учитывая момент подъемной силы Архимеда, имеем

$$M = -g\rho S x_c + \operatorname{Re}\frac{\rho}{2}\int\limits_{C_1} z\,[V_1(z) + V_2(z) - c]^2\,dz \tag{3.9}$$

Вычисление этого выражения производится совершенно аналогично вычислению выражения $P - iR$.

Прежде всего отметим, что при очень больших по модулю значениях $z$ имеем разложение

$$V_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\overline{v}(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi i z}\int\limits_{C_1}\overline{v}(\zeta)\,d\zeta + \ldots = \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \ldots$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{C_2} z V_1^2(z)\,dz = \frac{\Gamma^2}{2\pi i}, \qquad \operatorname{Re}\int\limits_{C_2} z V_1^2(z)\,dz = 0$$

Далее

$$\int\limits_{C_2} z\,(V_2 - c)^2\,dz = 0$$

и поэтому

$$M = -g\rho S x_c + \operatorname{Re}\rho\int\limits_{C_2} z V_1(V_2 - c)\,dz$$

или в силу голоморфности функции $V_2(z)$ внутри контура $C_2$:

$$M = -g\rho S x_c - \rho c\operatorname{Re}\int\limits_{C_2} z\overline{v}(z)\,dz + \rho\operatorname{Re}\int\limits_{C_2} z V_1(z) V_2(z)\,dz \tag{3.10}$$

Замечая, что

$$H'(\lambda) = \frac{dH}{d\lambda} = -i\int\limits_{C_2}\zeta\overline{v}(\zeta)\exp(-i\lambda\zeta)\,d\zeta,$$

интегралы, входящие в формулу (3.10), вычислим тем же путем, что и выражение (3.3), в результате чего получим формулу

$$M = -g\rho S x_c - \rho c\operatorname{Re}[iH'(0)] + \rho\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\left[H'(-\lambda)\overline{H}(-\lambda)\exp(-2\lambda_0 h_0) + \right.\right.$$

$$+\frac{(\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)}{2(\nu\operatorname{sh}\lambda h_0-\lambda\operatorname{sh}\lambda h_0)}\Big(H'(-\lambda)H(-\bar{\lambda})\exp(-2\lambda h_0)+H'(\lambda)\bar{H}(\lambda)\exp 2\lambda h_0-$$

$$-H'(-\lambda)H(\lambda)-H(-\lambda)H'(\lambda)\Big)\Big]\,d\lambda-$$

$$-\frac{\nu}{4(\nu h_0-\operatorname{ch}^2\lambda_0 h_0)}\Big(H'(-\lambda_0)\bar{H}(-\lambda_0)\exp(-2\lambda_0 h_0)-H'(\lambda_0)\bar{H}(\lambda_0)\exp 2\lambda_0 h_0-$$

$$-H'(-\lambda_0)H(\lambda_0)+H(-\lambda_0)H'(\lambda_0)\Big)\Big\} \qquad (3.11)$$

Формулы (3.5), (3.7) и (3.11) в предельном случае при $h_0 \to \infty$ совпадают с формулами, полученными Кочиным в указанной выше его работе [2].

Входящая в формулы (3.5), (3.7) и (3.11) функция $H(\lambda)$ не зависит от контура $C_1$ и можно за контур интегрирования взять, например, контур $C$ или другой какой-либо контур, охватывающий контур $C$. Кроме того, значение функции $H(\lambda)$ не изменится, если вместо комплексной скорости $\bar{v}(z)$ абсолютного движения взять комплексную скорость в относительном движении $\bar{v}_0(z)$, так как обе эти функции отличаются постоянным слагаемым $c$. Свойствами функции $H(\lambda)$ воспользуемся в следующем параграфе.

**4. Примеры.** В предыдущих параграфах мы нашли выражения через функцию $H(\lambda)$ ряда важных величин, а именно: амплитуда образующихся волн, волновое сопротивление, испытываемое контуром $C$, подъемная сила этого контура и момент действующих на этот контур сил. Таким образом, функция

$$H(\lambda)=\int_C \bar{v}(\zeta)\exp(-i\lambda\zeta)\,d\zeta=\int_C dw\exp(-i\lambda\zeta) \qquad (4.1)$$

играет фундаментальную роль для рассматриваемой задачи. Для вычисления этой функции необходимо знать выражение комплексной скорости, т. е. необходимо знать решение гидродинамической задачи. Но если относительная глубина погружения контура $C$ достаточно велика, то мы получим хорошее приближение, если вместо функции $\bar{v}(z)$ подставим в формулы (4.1) то выражение комплексной скорости, которое соответствует движению контура $C$ в безграничной жидкости.

Рассмотрим несколько примеров такого приближенного решения задачи.

*1°. Движение кругового цилиндра.* Пусть круговой цилиндр радиуса $b$, находящийся на глубине $h$ под свободной поверхностью жидкости, движется поступательно с постоянной горизонтальнний скоростью $c$, причем циркуляция скорости по контуру цилиндра имеет заданное значение $\Gamma$. В этом случае известна характеристическая функция в случае безграничной жидкости

$$w(z)=-\frac{cb^2}{z+hi}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+ih)$$

Следовательно,

$$\bar{v}(z)=\frac{cb^2}{(z+hi)^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i(z+ih)} \qquad (4.2)$$

Составляем теперь по формуле (4.1) функцию $H(\lambda)$:

$$H(\lambda)=\int_C\left[\frac{cb^2}{(z+hi)^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i(z+hi)}\right]\exp -i\lambda z\,dz$$

Так как контур $C$ охватывает одну особую точку $z = -ih$, то по теореме о вычетах получаем

$$H(\lambda) = (\Gamma + 2\pi c b^2 \lambda) \exp - \lambda h \tag{4.3}$$

Применяя формулу (3.7), получим выражение для волнового сопротивления цилиндра

$$R = \rho \nu \frac{[\Gamma \operatorname{sh} \lambda_0 (h_0 - h) + 2\pi c \lambda_0 b^2 \operatorname{ch} \lambda_0 (h_0 - h)]^2}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h_0 - \nu h_0} \tag{4.4}$$

применяя же формулу (3.5), найдем выражение для подъемной силы цилиндр

$$P = \rho c \Gamma - \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi (h_0 - h)} + \frac{\rho c b^2 \Gamma}{2 (h_0 - h)^2} - \frac{\pi \rho c^2 b^4}{2 (h_0 - h)^3} + \tag{4.5}$$

$$+ \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\infty (\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0) \frac{(\Gamma^2 + 4\pi^2 c^2 b^4 \lambda^2) \operatorname{sh} 2\lambda (h_0 - h) + 4\pi c b^2 \Gamma \lambda \operatorname{ch} 2\lambda (h_0 - h)}{\nu \operatorname{sh} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{ch} \lambda h_0} d\lambda + g\rho S$$

Интегральное слагаемое этой формулы можно вычислить методом механических квадратур. В предельных случаях $\nu = 0$ и $\nu = \infty$ это слагаемое вычисляется совершенно точно. Кроме того, рассматривая это интегральное слагаемое как функцию параметра $\alpha = 1 / (\nu h_0) = c^2 / (g h_0)$, можно установить, что это слагаемое при $\alpha = 1$ претерпевает разрыв непрерывности. В частном случае, когда радиус цилиндра $b$ принимается равным нулю, т. е. когда рассматривается движение вихря под свободной поверхностью, формулы (5) и (6) приводят к выражениям, установленным А. И. Тихоновым. Отметим еще, что формулы (5) и (6) выведены в предположении, что $c^2 < g h_0$. При $c^2 > g h_0$ за цилиндром не образуется свободных волн и волновое сопротивление $R$ равно нулю.

Вычисляя момент сил воздействия потока на цилиндр по формуле (3.11), найдем, что

$$M = -\frac{\rho \nu}{4} \frac{H'(-\lambda_0) H(-\lambda_0) \exp(-2\lambda_0 h_0) - H'(\lambda_0) H(\lambda_0) \exp 2\lambda_0 h_0}{\nu h_0 - \operatorname{ch}^2 \lambda_0 h_0} +$$

$$+ \frac{\rho \nu}{4} \frac{H'(-\lambda_0) H(\lambda_0) - H(-\lambda_0) H'(\lambda_0)}{\nu h_0 - \operatorname{ch}^2 \lambda_0 h_0}$$

Но из (4.3) ясно, что

$$H'(\lambda) = -hH(\lambda) + 2\pi c b^2 \exp(-\lambda h)$$

$$H'(-\lambda) = hH(-\lambda) - 2\pi c b^2 \exp \lambda h$$

Поэтому, выполнив несложные преобразования, получим

$$M = hR - 2\pi \rho c b^2 \nu \frac{\Gamma \operatorname{sh}^2 \lambda_0 (h_0 - h) + \pi c b^2 \lambda_0 \operatorname{sh} 2\lambda_0 (h_0 - h)}{\operatorname{ch}^2 \lambda_0 h_0 - \nu h_0} \tag{4.6}$$

Точка пересечения с осью $Oy$ равнодействующей сил воздействия потока на тело определяется формулой

$$y_0 = -\frac{M}{R} = -h + \frac{2\pi c b^2}{\Gamma + 2\pi c b^2 \lambda_0 \operatorname{cth} \lambda_0 (h_0 - h)} \tag{4.7}$$

Очевидно, что эта равнодействующая при $R > 0$ никогда не проходит через центр цилиндра.

2°. *Движение эллиптического цилиндра*. Пусть эллипс, центр которого находится на глубине $h$ и оси которого $2\alpha$ и $2\beta$ направлены параллельно осям координат $Ox$ и $Oy$, движется поступательно в направлении оси $Ox$ с постоянной скоростью $c$. Значение циркуляции $\Gamma$ примем для простоты равным нулю. В этом случае обтекания контура $C$ потоком безграничной жидкости определяются при помощи вспомогательной переменной и формулами

$$z = -ih + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\left(u+\frac{1}{u}\right), \quad w = -\frac{c}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\left(u+\frac{r^2}{u}\right),$$

где $r = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}$ и $|u| = r$ есть уравнение той окружности в плоскости $u$, которая соответствует контуру эллипса $C$. Внешности эллипса соответствует внешность этой окружности. Составляем по формуле функцию

$$H(\lambda) = \int_C \exp(-i\lambda z)\, dw =$$

$$= \int_{|u|=r} \left(-\frac{c}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{u^2}\right) \exp\left[-\lambda h - \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\right] du$$

Производя подстановку $u = iv$, получим

$$H(\lambda) = -\frac{ic}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\exp(-\lambda h)\int_{|v|=r}\left(1+\frac{r^2}{v^2}\right)\exp\frac{\lambda}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\left(v-\frac{1}{v}\right)dv$$

Но из теории функций Бесселя известно, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|v|=r}\frac{dv}{v^{n+1}}\exp\frac{z}{2}\left(v-\frac{1}{v}\right) = J_n(z),$$

поэтому

$$H(\lambda) = \pi c\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\exp(-\lambda h)\{J_{-1}(\lambda\sqrt{\alpha^2-\beta^2}) + r^2 J_1(\lambda\sqrt{\alpha^2-\beta^2})\}$$

воспользовавшись еще формулой

$$J_{-1}(z) = -J_1(z)$$

и вышеуказанным значением $r$, получим

$$H(\lambda) = 2\pi c\beta\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}\exp(-\lambda h)\, J_1(\lambda\sqrt{\alpha^2-\beta^2}) \tag{4.8}$$

Ограничимся вычислением волнового сопротивления. По формуле (3.7) находим

$$R = 4\pi^2\rho g\beta^2\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\,\frac{\operatorname{ch}^2\lambda_0(h_0-h)}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h_0 - \nu h_0}\, J_1^2(\lambda_0\sqrt{\alpha^2-\beta^2}) \tag{4.9}$$

Из этой формулы следует, что при некоторых $\lambda_0$, а следовательно, при некоторой скорости $c < \sqrt{gh_0}$ волновое сопротивление равно нулю, т. е.

амплитуда образующихся волн позади движущегося тела обращается в нуль. Это будет в том случае, если выполняется соотношение

$$\lambda_0 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = s_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

где $s_k$ — положительные корни функции Бесселя $J_1(s)$. Первый корень этой функции есть

$$s_1 = 3.832$$

Так как параметр $\nu = \frac{g}{c^2}$ связан с $\lambda_0$ уравнением

$$\operatorname{th} \lambda_0 h_0 = \frac{c^2}{g} \lambda_0$$

то первая скорость, при которой волновое сопротивление обращается в нуль, определяется по формуле

$$c = 0.51 \sqrt{g \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \operatorname{th} \frac{3.832 h_0}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}} \tag{4.10}$$

Кроме того, имеем

$$\operatorname{th} \frac{3.832 h_0}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} < 1$$

поэтому

$$c < 0.51 \sqrt{g \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \tag{4.11}$$

Аналогичным путем можно рассмотреть ряд других примеров. Кроме того, как и в указанной выше работе академика Н. Е. Кочина, можно в нашем случае составить функциональные уравнения для определения функции $H(\lambda)$ и значения циркуляции $\Gamma$ из условия конечности скорости в угловой точке. Эти уравнения можно получить тем же методом. Окончательный их вид будет несколько сложнее в сравнении с случаем бесконечно глубокой жидкости.

Поступила в редакцию
8 IX 1941

**M. D. HASKIND. — TRANSLATION OF BODIES UNDER THE FREE SURFACE OF A HEAVY FLUID OF FINITE DEPTH**

The author studies the two-dimensional wave motion generated due to the horizontal uniform rectilinear motion of a solid under the free surface of a heavy fluid of finite depth.

Using the method of N. Kochin [2], the author gives the general formulae for the wave drag, lift force and moment of hydrodymanic forces exerted on the moving shape.

As examples approximate solutions are worked out for circular and elliptical contours with a given circulation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Прикладная математика и механика. 1944. Т. VIII. Вып. 4.
2. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Труды конференции по теории волнового сопротивления. Изд. ЦАГИ. М. 1937.
3. Тихонов А. Н. Плоская задача о движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. Известия ОТН АН СССР. 1940. № 4.