

УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В. В. Соколовский

(Москва)

Пластическое плоское напряженное состояние впервые рассматривал А. Надаи применительно к задаче о полярно-симметричном распределении пластических напряжений вокруг кругового отверстия^[1].

Целью предлагаемой работы является построение метода решения задач о пластическом равновесии в условиях плоского напряженного состояния, аналогичного существующим методам в теории пластического деформированного состояния^[2, 3] и в теории сыпучих тел^[4].

В настоящей статье исследованы уравнения пластического равновесия, в следующей статье будут даны решения конкретных задач.

§ 1. Плоское напряженное состояние

Рассмотрим напряженное состояние тонкой пластинки под действием сил, приложенных к ее контуру, параллельных средней плоскости пластинки и равномерно-распределенных по ее толщине.

Принимаем прямоугольную систему координат $x y z$; пусть плоскость $z = 0$ является средней плоскостью пластинки, а ось z направлена перпендикулярно этой плоскости.

Компоненты напряжения

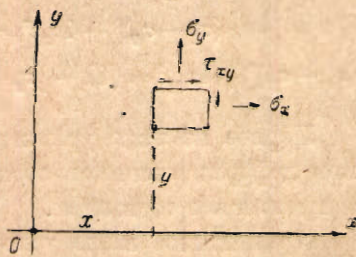
$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.1)$$

а остальные компоненты σ_x , σ_y и τ_{xy} не зависят от координаты z , т. е. остаются постоянными по всей толщине пластинки. Размеры пластинки в направлении оси z в таком случае не имеют значения и в дальнейшем это измерение принимается равным единице.

Дифференциальные уравнения равновесия при отсутствии объемных сил имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Для компонент напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} принимается обычное правило знаков. Положительные направления этих компонент показаны на фиг. 1.



Фиг. 1

Условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) = 6k^2$$

в силу формул (1.1) принимает вид

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2 \quad (1.3)$$

где $k = \sigma_s / \sqrt{3}$, причем σ_s — предел текучести при простом растяжении.

Условие пластичности Сен-Венана при плоском напряженном состоянии представится в двух видах, в зависимости от знаков двух отличных от нуля главных нормальных напряжений σ_1 и σ_2 ($\sigma_3 = 0$). Действительно, если σ_1 и σ_2 имеют противоположные знаки, т. е.

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \geq |\sigma_1 + \sigma_2|$$

то максимальное касательное напряжение τ_{\max} действует по площадкам, параллельным оси z , причем

$$|\tau|_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|$$

если же σ_1 и σ_2 имеют одинаковые знаки, т. е.

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq |\sigma_1 + \sigma_2|,$$

то максимальное касательное напряжение τ_{\max} действует по площадкам, наклонным к оси z под углами $\frac{\pi}{4}$, причём

$$|\tau|_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1| \quad (|\sigma_1| \geq |\sigma_2|).$$

Таким образом, условие пластичности Сен-Венана может быть записано в виде следующих уравнений:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad \text{при} \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \geq (\sigma_x + \sigma_y)^2 \quad (1.4a)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (4k - |\sigma_x + \sigma_y|)^2 \quad \text{при} \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq (\sigma_x + \sigma_y)^2 \quad (1.4b)$$

Первое из этих уравнений совпадает с условием пластичности при плоском деформированном состоянии, а второе имеет место лишь при плоском напряженном состоянии.

Приведенное выше условие пластичности Мизеса заменяет два уравнения (1.4a) и (1.4b) одним уравнением (1.3). В дальнейшем мы будем основываться на условии пластичности Мизеса.

Условие несжимаемости пластического материала дает уравнение

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Зависимости Генки, выраженные через компоненты смещения, имеют вид

$$\frac{\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x}}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}}{2\tau_{yz}} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}}{2\tau_{zx}} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}}{2\tau_{xy}}$$

На основании приведенных уравнений и формул (1.1) ясно, что компоненты смещения u_x и u_y должны удовлетворять уравнениям

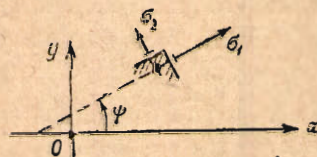
$$\frac{\frac{\partial u_x}{\partial x}}{2\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial y}}{2\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}}{6\tau_{xy}} \quad (1.5)$$

Приведем некоторые формулы, полезные для дальнейшего.

Обозначим через σ_1 и σ_2 — главные нормальные напряжения ($\sigma_1 \geq \sigma_2$), а через ψ — угол, составляемый наибольшим (в алгебраическом смысле) главным нормальным напряжением σ_1 с осью x (фиг. 2).

Прежде всего отметим, что условие пластичности может быть представлено через главные нормальные напряжения σ_1 и σ_2 в виде

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 12k^2$$



Фиг. 2

Следуя Надаи, будем обозначать

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sqrt{3}k \cos \omega$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \sin \omega$$

Компоненты напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} выражаются через главные напряжения σ_1 и σ_2 по известным формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\psi$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\psi$$

Введенные выше обозначения дают возможность представить эти формулы в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = k(\sqrt{3} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2\psi) \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy} = k \sin \omega \sin 2\psi$$

В заключение отметим важное свойство плоского напряженного состояния. Как очевидно из предыдущих формул, система напряжений такова, что

$$|\sigma_x| \leq 2k, \quad |\sigma_y| \leq 2k, \quad |\tau_{xy}| \leq k$$

Такого ограничения при пластическом плоском деформированном состоянии нет

§ 2. Уравнения в напряжениях. Характеристики

Дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

и условие идеальной пластичности

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2 \quad (1.3)$$

содержат три компоненты напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} . Следовательно, система уравнений пластического равновесия в напряжениях (1.2) и (1.3) может быть рассмотрена независимо от уравнений (1.5), содержащих компоненты смещения.

Уравнению (1.3) можно тождественно удовлетворить, принимая

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} = k (\sqrt{3} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2\psi), \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy} = k \sin \omega \sin 2\psi$$

Напомним, что через ψ обозначен угол наклона траекторий главного нормального напряжения σ_1 к оси x .

Подстановка (1.6) в уравнения (1.2) дает

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi \frac{\partial \omega}{\partial y} - 2 \sin \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \\ \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi \frac{\partial \omega}{\partial x} - (\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi + \cos \omega) \frac{\partial \omega}{\partial y} + 2 \sin \omega \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Будем называть решением уравнений (2.1) функции $\omega = \omega(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$, имеющие непрерывные и ограниченные частные производные первого порядка и удовлетворяющие уравнениям (2.1).

При изучении системы дифференциальных уравнений (2.1) основное значение имеет рассмотрение некоторых линий — характеристик в четырехмерном пространстве x, y, ω, ψ , расположенных на каждом решении уравнений (2.1), которое изображается в этом пространстве поверхностью.

Пусть ¹ некоторая линия (s — параметр)

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad \omega = \omega(s), \quad \psi = \psi(s)$$

расположена на решении $\omega = \omega(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$.

Для определения производных ω и ψ по x, y вдоль этой кривой имеют место уравнения (2.1) и соотношения

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \quad (*)$$

Решая уравнения (2.1) и (*) относительно производных от ω и ψ по координатам, найдем

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi \frac{d\omega}{ds} dx + 2 \sin \omega \frac{d\psi}{ds} dx - (\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega) \frac{d\omega}{ds} dy}{(\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi + \cos \omega) dx^2 + 2 \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi dx dy - (\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega) dy^2} \quad (**)$$

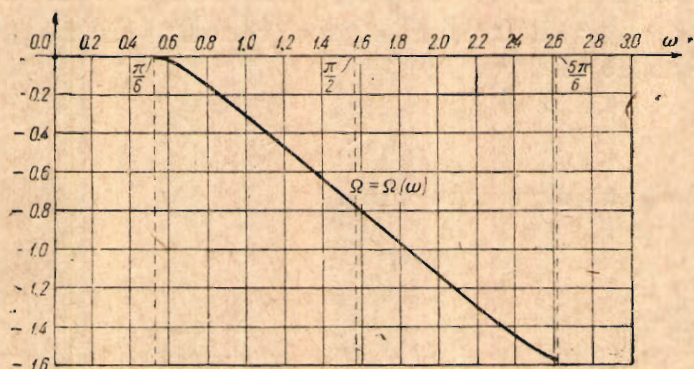
и аналогичные выражения для остальных производных.

Если в правых частях этих равенств знаменатели отличны от нуля, то вдоль рассматриваемой линии $x = x(s)$, $y = y(s)$, $\omega = \omega(s)$, $\psi = \psi(s)$ определяются единственные значения производных; если знаменатель обращается

¹ Применяемый здесь метод вывода уравнений характеристик и приведения уравнений к каноническому виду принадлежит С. А. Христиановичу [3].

в нуль одновременно с числителем, то вдоль линии $x = x(s)$, $y = y(s)$, $\omega = \omega(s)$, $\psi = \psi(s)$ значения производных не единственны и эта линия называется *характеристикой*; если же знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, то линия $x = x(s)$, $y = y(s)$, $\omega = \omega(s)$, $\psi = \psi(s)$ называется *линией разрыва*.

Для получения уравнений характеристик следует одновременно числитель и знаменатель каждой дроби (***) приравнять нулю. Получим две системы



Фиг. 3.

уравнений, называемые дифференциальными уравнениями характеристик

$$\frac{dx}{\sqrt{3 \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega}} = \frac{dy}{\sqrt{3 \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)}}, \quad \Omega(\omega) \pm \psi = \text{const} \quad (2.2)$$

где обозначено

$$R(\omega) = |\sqrt{3 - 4 \cos^2 \omega}|$$

$$\Omega(\omega) = -\frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\omega} \frac{R(\omega)}{\sin \omega} d\omega = -\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2 \cos \omega}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \arctg \frac{2R(\omega) \cos \omega}{3 - 5 \cos^2 \omega} \quad (2.3)$$

Под \arcsin подразумевается его главное значение, лежащее между $-\pi/2$ и $+\pi/2$; \arctg непрерывно убывает от 0 до -2π при возрастании ω от $\pi/6$ до $5\pi/6$.

Значения функции $\Omega(\omega)$ приведены в табл. 1; график ее изображен на фиг. 3.

Таблица 1

ω	$\frac{\pi}{6} = 0.524$	0.611	0.785	0.873	1.047	1.222	1.396	$\frac{\pi}{2} = 1.571$
$-\Omega$	0.000	0.630	0.139	0.201	0.339	0.485	0.633	$\frac{\pi}{4} = 0.786$
ω	$\frac{\pi}{2} = 1.571$	1.745	1.920	2.094	2.269	2.357	2.531	$\frac{5\pi}{6} = 2.618$
$-\Omega$	$\frac{\pi}{4} = 0.786$	0.936	1.085	1.230	1.370	1.432	1.541	$\frac{\pi}{2} = 1.571$

Семейство характеристик, определяемое системой уравнений (2.2) с верхними знаками, будем называть *первым* семейством, а определяемое уравнениями (2.2) с нижними знаками — *вторым* семейством.

Пока

$$3 - 4\cos^2 \omega > 0$$

уравнения (2.1) имеют два вещественных различных семейства характеристик. Они принадлежат, следовательно, к уравнениям гиперболического типа.

Таким образом¹ плоское напряженное состояние описывается уравнениями гиперболического типа при

$$\frac{\pi}{6} < |\omega| < \frac{5\pi}{6}$$

и уравнениями эллиптического типа при

$$0 \leq |\omega| < \frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad \frac{5\pi}{6} < |\omega| \leq \pi.$$

В теории пластического плоского напряженного состояния, построенной на основе условий пластичности Сен-Венана, механический смысл гиперболичности или эллиптичности основной системы уравнений особенно ясен. Действительно, если $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 > (\sigma_x + \sigma_y)^2$ и, следовательно, главные касательные напряжения действуют по площадкам, параллельным оси z , то имеет место система уравнений (1.2), (1.4 а), которая приводит к уравнениям гиперболического типа; если же $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq (\sigma_x + \sigma_y)^2$ и, следовательно, главные касательные напряжения действуют по площадкам, наклонным к оси z под углами $\pi/4$, то система (1.2), (1.4 б) приводит к уравнениям эллиптического типа.

Ниже приведено исследование уравнений (2.1) в предположении, что

$$\frac{\pi}{6} \leq |\omega| \leq \frac{5\pi}{6}$$

и, следовательно, что уравнения (2.1) принадлежат к гиперболическому типу.

Через каждую точку, лежащую на решении $\omega = \omega(x, y)$ $\psi = \psi(x, y)$, проходят две характеристики и все оно покрыто веткой характеристик.

Проекции характеристик на плоскость xy для краткости также будем называть характеристиками.

Через каждую точку рассматриваемой области в плоскости xy проходят две характеристики и, следовательно, вся она покрыта сеткой характеристик. Углы Θ между характеристиками в плоскости xy будут, вообще говоря, в разных точках различны.

Известно, что угол между двумя направлениями, определяемыми угловыми коэффициентами dy/dx и $\delta y/\delta x$, дается формулой

$$\cos \Theta = \frac{dx \delta x + dy \delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2} \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}$$

Подставляя в эту формулу угловые коэффициенты, определяемые форму-

¹ Величина ω рассматривается с точностью до числа, кратного 2π .

лами (2.2), найдем угол Θ между характеристиками в плоскости xy в виде

$$\cos \Theta = \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\sqrt{3}}$$

Ясно, что угол Θ отличен от 0 и π , пока

$$\frac{\pi}{6} < |\omega| < \frac{5\pi}{6}$$

При $|\omega| = \frac{\pi}{6}$ и $|\omega| = \frac{5\pi}{6}$ величина $|\cos \Theta| = 1$ и, следовательно,

$$\Theta = 0 \quad \text{или} \quad \Theta = \pi.$$

Пусть $\alpha = \alpha(x, y) = \text{const}$ и $\beta = \beta(x, y) = \text{const}$ суть уравнения первого и второго семейств характеристик. Примем сетку характеристик за систему криволинейных координат в плоскости xy и будем рассматривать x , y , ω и ψ как функции от α и β .

В дальнейшем удобно пользоваться новыми переменными

$$\left. \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right\} = \Omega(\omega) \pm \psi \quad (2.4)$$

Уравнения характеристик (2.2) можно тогда переписать в виде

$$\begin{aligned} & [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial y}{\partial \beta} - [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)] \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \\ & [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial y}{\partial \alpha} - [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)] \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\Omega(\omega) + \psi = \xi = \xi(\alpha), \quad \Omega(\omega) - \psi = \eta = \eta(\beta)$$

где $\xi(\alpha)$ и $\eta(\beta)$ — произвольные функции, допускающие непрерывные и ограниченные первые производные.

Эта система называется канонической системой уравнений.

Заметим, что в выборе α и β существует известная свобода. Если принять за новые переменные $\alpha^* = f_1(\alpha)$, $\beta^* = f_2(\beta)$, где f_1 и f_2 — произвольные функции, то каноническая система не изменится.

В дальнейшем большое значение имеет якобиан преобразования, который в силу уравнений (2.5) имеет вид

$$D = \frac{+2R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{-2R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi + \cos \omega} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} \quad (2.6)$$

Для получения уравнений линии разрыва следует знаменатель каждой дроби (***) приравнять нулю. Получим

$$\frac{dx}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} = \frac{dy}{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi \pm R(\omega)}$$

Проекции линий разрыва на плоскость xy для краткости также будем называть линиями разрыва.

На линиях разрыва производные от ω и ψ по x , y , а вместе с тем производные от компонент напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} по координатам обращаются

в бесконечность. Следовательно, компоненты напряжения претерпевают на линиях разрыва конечные скачки. Ясно, что исходные уравнения равновесия дают описание напряженного состояния только до линий разрыва.

При исследовании канонической системы уравнений величины ξ и η предполагаются, вообще говоря, изменяемыми. Однако существуют частные решения, отвечающие постоянным ξ и η . Эти решения должны быть рассмотрены отдельно.

$$1. \xi \neq \text{const}, \eta \neq \text{const}$$

За параметры α и β могут быть приняты величины ξ и η .

Тогда уравнения (2.5) будут иметь вид

$$\begin{aligned} & [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial y}{\partial \eta} - [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)] \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \\ & [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial y}{\partial \xi} - [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)] \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Характеристиками являются линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$.

Вследствие уравнений (2.6) и (2.7) якобиан преобразования может быть написан в виде

$$\Delta = \frac{+2R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{-2R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi + \cos \omega} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.8)$$

Условимся называть решением уравнений (2.7) функции $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, имеющие непрерывные и ограниченные производные первого порядка и удовлетворяющие уравнениям (2.7)

Приведем теперь некоторые свойства уравнений (2.7).

Решение канонической системы уравнений (2.7), для которой якобиан Δ не обращается тождественно в нуль, является решением уравнений (2.1).

Для доказательства этого предложения следует переписать уравнения (2.1) в виде

$$\begin{aligned} E_1 & \equiv [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial \xi}{\partial x} + [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)] \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \\ E_2 & \equiv [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial \eta}{\partial x} + [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)] \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Рассмотрим левые части E_1 и E_2 этих уравнений и произведем замену переменных, принимая за аргументы ξ и η и за функции x и y . Формулы преобразования будут

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

Подстановка этих производных в выражения E_1 и E_2 приводит к тождествам

$$\begin{aligned} +E_1 \Delta & \equiv [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial y}{\partial \eta} - [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)] \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -E_2 \Delta & \equiv [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial y}{\partial \xi} - [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)] \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Следовательно, уравнения (2.9) являются следствиями уравнений (2.7) если Δ тождественно не равно нулю.

Для того чтобы некоторая линия была линией разрыва, необходимо и достаточно, чтобы вдоль нее

$$\Delta = \frac{+2R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} \frac{\partial x \partial x}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.10)$$

Доказательство необходимости этого условия следует из формул преобразования. Для того чтобы при ограниченных производных $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$ одна из производных $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$ обращалась в бесконечность, необходимо, чтобы $\Delta = 0$. Из формулы

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}.$$

очевидно, что высказанное условие также достаточно. Следовательно, линии, вдоль которых

$$\cos^2 \omega = \frac{3}{4}, \quad \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega \neq 0$$

являются линиями разрыва.

Огибающая характеристик в плоскости xu есть линия разрыва.

Рассмотрим, например, семейство характеристик $\eta = \text{const}$ и определим уравнение их огибающей. Если в функциях $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ положить $\eta = \text{const}$, то получим уравнение характеристик в параметрической форме. Для нахождения огибающей достаточно продифференцировать $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ по η , рассматривая ξ как функцию η , и результат дифференцирования приравнять нулю:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0$$

Исключение $d\xi/d\eta$ дает

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0$$

Отсюда следует, что вдоль огибающей характеристик $\Delta = 0$, т. е. что она является линией разрыва.

Приведенные свойства уравнений пластического равновесия при плоском напряженном состоянии аналогичны свойствам уравнений пластического плоского деформированного состояния или свойствам уравнений предельного равновесия сыпучих тел (см. [2] и [3]).

$$2. \xi \neq \text{const}, \quad \eta \equiv \eta_0 = \text{const}$$

Величины ω и ψ в силу формул (2.4) суть функция только одного переменного ξ . За параметр α удобно принять величину ψ .

Тогда уравнения (2.5) будут иметь вид

$$[\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial y}{\partial \beta} - [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)] \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0$$

$$[\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial y}{\partial \psi} - [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)] \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0$$

$$\Omega(\omega) - \psi \equiv \eta_0 = \text{const}$$

Так как ω и ψ не зависят от β , то первое из этих уравнений может быть проинтегрировано:

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} x + \Phi(\psi)$$

Таким образом, имеет место система уравнений

$$\Omega(\omega) - \psi = \eta_0$$

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} x + \Phi(\psi)$$

$$[\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial y}{\partial \psi} - [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)] \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0 \quad (2.11)$$

Первое семейство характеристик состоит из прямых $\psi = \text{const}$, а второе семейство характеристик находится путем интегрирования уравнений (2.11).

Отметим некоторые свойства системы уравнений (2.11), аналогичные свойствам, установленным для уравнений (2.7).

Уравнение (2.11), для которого выражение

$$T \equiv 8 \sqrt{3} \sin^3 \omega [\cos \omega \cos 2\psi - R(\omega) \sin 2\psi - \sqrt{3} \sin \omega] x - \\ - R^2(\omega) [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega]^2 \Phi'(\psi)$$

не обращается тождественно в нуль, определяет решение уравнений (2.4).

Перепишем уравнение (2.9) в виде

$$E \equiv [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial \psi}{\partial x} + [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)] \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

Для доказательства выказанного предложения следует составить производные от ψ по координатам x , y , пользуясь выражением

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} x + \Phi(\psi)$$

Получим

$$T \frac{\partial \psi}{\partial x} = + R^2(\omega) [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)]$$

$$T \frac{\partial \psi}{\partial y} = - R^2(\omega) [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega]^2$$

Следовательно, уравнение (2.9) тождественно удовлетворяется, если $T \equiv 0$.

Из написанных формул непосредственно следует, что: для того чтобы некоторая линия была линией разрыва, необходимо и достаточно, чтобы вдоль нее

$$T \equiv 8\sqrt{3}\sin^3\omega [\cos\omega \cos 2\psi - R(\omega) \sin 2\psi - \sqrt{3}\sin\omega]x - R^2(\omega)[\sqrt{3}\sin\omega \cos 2\psi - \cos\omega]^2 \Phi'(\psi) = 0 \quad (2.12)$$

Огибающая прямолинейных характеристик $\psi = \text{const}$ в плоскости xu есть линия разрыва.

Рассмотрим семейство характеристик $\psi = \text{const}$. Для нахождения огибающей этого семейства следует продифференцировать выражение

$$y - \frac{\sqrt{3}\sin\omega \sin 2\psi + R(\omega)}{\sqrt{3}\sin\omega \cos 2\psi - \cos\omega} x - \Phi(\psi)$$

по ψ и результат дифференцирования приравнять нулю. Получим $T = 0$.

Таким образом вдоль огибающей характеристик $\psi = \text{const}$ выражение $T = 0$, т. е. она является линией разрыва.

Рассматривая семейство характеристик $\psi = \text{const}$ и находя огибающую этого семейства, нетрудно убедиться, что вдоль нее имеет место уравнение (2.12).

$$3. \xi \equiv \xi_0 = \text{const}, \quad \eta \neq \text{const}$$

Величины ω и ψ в силу формул (2.4) суть функция одного переменного η . Аналогично предыдущему здесь имеет место система уравнений

$$\Omega(\omega) + \psi = \xi_0$$

$$y = \frac{\sqrt{3}\sin\omega \sin 2\psi - R(\omega)}{\sqrt{3}\sin\omega \cos 2\psi - \cos\omega} x + \Psi(\psi) \quad (2.13)$$

$$[\sqrt{3}\sin\omega \cos 2\psi - \cos\omega] \frac{\partial y}{\partial \psi} - [\sqrt{3}\sin\omega \sin 2\psi + R(\omega)] \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0$$

Первое семейство характеристик находится путем интегрирования уравнений (2.13), а второе семейство состоит из прямых $\psi = \text{const}$.

Решение (2.13), для которого выражение

$$8\sqrt{3}\sin^3\omega [\cos\omega \cos 2\psi + R(\omega) \sin 2\psi - \sqrt{3}\sin\omega]x - R^2(\omega)[\sqrt{3}\sin\omega \cos 2\psi - \cos\omega]^2 \Psi'(\psi)$$

не обращается тождественно в нуль, определяет решение уравнений (2.1).

Для того чтобы некоторая линия была линией разрыва, необходимо и достаточно, чтобы вдоль нее

$$8\sqrt{3}\sin^3\omega [\cos\omega \cos 2\psi + R(\omega) \sin 2\psi - \sqrt{3}\sin\omega]x - R^2(\omega)[\sqrt{3}\sin\omega \cos 2\psi - \cos\omega]^2 \Psi'(\psi) = 0 \quad (2.14)$$

Огибающая прямолинейных характеристик $\psi = \text{const}$ в плоскости xu есть линия разрыва.

$$4. \quad \xi \equiv \xi_0 = \text{const}, \quad \eta \equiv \eta_0 = \text{const}$$

Величины ω и ψ в силу формул (2.4) суть тождественные постоянные $\omega \equiv \omega_0$, $\psi \equiv \psi_0$, причем

$$\Omega(\omega_0) = \frac{1}{2} (\xi_0 + \eta_0), \quad \psi_0 = \frac{1}{2} (\xi_0 - \eta_0) \quad (2.15)$$

и уравнения (2.5) могут быть проинтегрированы:

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega_0 \sin 2\psi_0 + R(\omega_0)}{\sqrt{3} \sin \omega_0 \cos 2\psi_0 - \cos \omega_0} x + \Phi(x)$$

$$y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega_0 \sin 2\psi_0 - R(\omega_0)}{\sqrt{3} \sin \omega_0 \cos 2\psi_0 - \cos \omega_0} x + \Psi(\beta)$$

Сетка характеристик состоит из двух семейств параллельных прямых $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$, уравнения которых могут быть представлены в следующей параметрической форме:

$$x = -\frac{\sqrt{3} \sin \omega_0 \cos 2\psi_0 - \cos \omega_0}{2R(\omega_0)} [\Phi(x) - \Psi(\beta)]$$

$$y = -\frac{\sqrt{3} \sin \omega_0 \sin 2\psi_0 - R(\omega_0)}{2R(\omega_0)} \Phi(x) + \frac{\sqrt{3} \sin \omega_0 \sin 2\psi_0 + R(\omega_0)}{2R(\omega_0)} \Psi(\beta) \quad (2.16)$$

Приведенные выше уравнения могут быть преобразованы к плоским полярным координатам $r\theta$, которыми иногда удобнее пользоваться. Имеем

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

или

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{arc tg } \frac{y}{x}$$

Компоненты напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ на основании (1.6) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = k [\sqrt{3} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2(\psi - \theta)]$$

$$\tau_{r\theta} = k \sin \omega \sin 2(\psi - \theta) \quad (2.17)$$

Переходя в уравнениях (2.1), (2.3), (2.5) и (2.6) от переменных x, y к переменным r, θ , нетрудно получить исходную систему уравнений, дифференциальные уравнения характеристик, каноническую систему уравнений и якобиан преобразования в переменных r и θ . В эти уравнения попрежнему будет входить $R(\omega) = |\sqrt{3 - 4 \cos^2 \omega}|$.

Исходная система уравнений, например, имеет вид

$$[\sqrt{3} \sin \omega \cos 2(\psi - \theta) - \cos \omega] \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2(\psi - \theta)}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{2 \sin \omega \partial \psi}{r \partial \theta} = 0$$

$$(2.18)$$

$$\sqrt{3} \sin \omega \sin 2(\psi - \theta) \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2(\psi - \theta) + \cos \omega \partial \omega}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + 2 \sin \omega \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

Приведем частное решение уравнений (2.18), соответствующее полярно-симметричному распределению напряжений при $\tau_{r\theta} \equiv 0$. Имеем

$$r = \frac{B}{\sqrt{\sin \omega}} \exp \left(-z \frac{\sqrt{3}}{2} \omega \right) \quad (z = \pm 1) \quad (2.19)$$

$$\psi = \theta - (1 + z) \frac{\pi}{4} + m\pi$$

Характеристиками являются линии

$$\Omega(\omega) \pm \theta = \text{const} \quad (2.20)$$

§ 3. Уравнения в смещениях

Уравнения (1.5), преобразованные при помощи формул (1.6) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \frac{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi + \cos \omega}{2\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi} &= 0, \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \frac{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega}{2\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

составляют систему уравнений, содержащую компоненты смещения u_x и u_y .

К исследованию уравнений (3.1) применим метод, использованный в § 2. Нетрудно убедиться, что они имеют два вещественных семейства характеристик, дифференциальные уравнения которых суть (2.3), совпадающих с характеристиками уравнений (2.1). Они принадлежат, следовательно, к уравнениям гиперболического типа.

Примем сетку характеристик за систему криволинейных координат в плоскости xu и будем рассматривать u_x и u_y как функции α и β .

Уравнения (2.1) принимают вид

$$\begin{aligned} [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial u_x}{\partial \beta} + [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)] \frac{\partial u_y}{\partial \beta} &= 0 \\ [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} + [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)] \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что при замене u_x через y и u_y через $-x$ уравнения (3.2) переходят в уравнения (2.5). Замечание, приведенное в предыдущем параграфе, относительно свободы в выборе α и β , остается в силе и здесь.

При исследовании системы уравнений (3.2) следует различать те же случаи, что и при рассмотрении уравнений (2.6).

$$1. \xi \neq \text{const}, \quad \eta \neq \text{const}$$

За параметры α и β удобно принять величины ξ и η .

Уравнения (3.2) будут иметь вид

$$\begin{aligned} [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial u_x}{\partial \eta} + [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)] \frac{\partial u_y}{\partial \eta} &= 0 \\ [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial u_x}{\partial \xi} + [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)] \frac{\partial u_y}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$2. \xi \neq \text{const}, \quad \eta \equiv \eta_0 = \text{const}$$

За параметр α можно выбрать величину ψ . Тогда уравнения (3.2) будут

$$\begin{aligned} [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial u_x}{\partial \beta} + [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)] \frac{\partial u_y}{\partial \beta} &= 0 \\ [\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega] \frac{\partial u_x}{\partial \psi} + [\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)] \frac{\partial u_y}{\partial \psi} &= 0 \end{aligned}$$

Так как ω и ψ не зависят от β , то первое из этих уравнений может быть проинтегрировано:

$$u_x = -\frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} u_y + \Phi_1(\psi)$$

Таким образом, для определения компонент u_x и u_y имеет место система

$$u_x = -\frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} u_y + \Phi_1(\psi) \quad (3.4)$$

$$\left[\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega \right] \frac{\partial u_x}{\partial \psi} + \left[\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega) \right] \frac{\partial u_y}{\partial \psi} = 0$$

$$3. \quad \xi \equiv \xi_0 = \text{const}, \quad \eta \neq \text{const}$$

За параметр β удобно принять величину ψ . Аналогично предыдущему для нахождения компонент смещения u_x и u_y служит система уравнений

$$u_x = -\frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi - R(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega} u_y + \Psi_1(\psi) \quad (3.5)$$

$$\left[\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\psi - \cos \omega \right] \frac{\partial u_x}{\partial \psi} + \left[\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\psi + R(\omega) \right] \frac{\partial u_y}{\partial \psi} = 0$$

$$4. \quad \xi \equiv \xi_0 = \text{const}, \quad \eta \equiv \eta_0 = \text{const}$$

Уравнения (3.2) могут быть проинтегрированы:

$$u_x = -\frac{\sqrt{3} \sin \omega_0 \sin 2\psi_0 + R(\omega_0)}{\sqrt{3} \sin \omega_0 \cos 2\psi_0 - \cos \omega_0} u_y + \Phi_1(z)$$

$$u_x = -\frac{\sqrt{3} \sin \omega_0 \sin 2\psi_0 - R(\omega_0)}{\sqrt{3} \sin \omega_0 \cos 2\psi_0 - \cos \omega_0} u_y + \Psi_1(\beta)$$

Таким образом, выражения для компонент u_x и u_y принимают вид

$$u_x = -\frac{\sqrt{3} \sin \omega_0 \sin 2\psi_0 - R(\omega_0)}{2R(\omega_0)} \Phi_1(z) + \frac{\sqrt{3} \sin \omega_0 \sin 2\psi_0 + R(\omega_0)}{2R(\omega_0)} \Psi_1(\beta) \quad (3.6)$$

$$u_y = \frac{\sqrt{3} \sin \omega_0 \cos 2\psi_0 - \cos \omega_0}{2R(\omega_0)} [\Phi_1(z) - \Psi_1(\beta)]$$

Отметим, что при замене u_x через u и u_y через $-z$ уравнения (3.3), (3.4), (3.5) и (3.6) переходят в уравнения (2.7), (2.14), (2.13) и (2.16).

Приведенные уравнения в смещениях (3.3)–(3.6), имеющие место при пластическом плоском напряженном состоянии, похожи на соответствующие уравнения для плоского деформированного состояния.

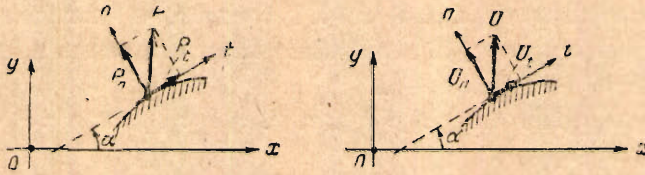
§ 4. Условия на контуре

Пусть границей пластического тела служит гладкий криволинейный контур. Обозначим через \bar{P} и \bar{U} векторы напряжения и смещения на этом контуре, а через P_τ , P_n и U_τ , U_n соответственно касательные и нормальные компоненты этих векторов (фиг. 4).

Для пластического равновесия необходимо, чтобы

$$|P_n| \leq 2k, \quad |P_t| \leq k$$

Первое из этих ограничений является весьма важной особенностью плоского напряженного состояния. При плоском деформированном состоянии такого ограничения нет.



Фиг. 4

Напомним известные формулы преобразования компонент напряжения при переходе от координат xy к системе координат tn (фиг. 4):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t \\ \sigma_n \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha \pm \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{tn} = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (4.1)$$

Через α обозначен угол между положительными направлениями осей x и t . Не следует смешивать угол α с параметром α , которым мы пользовались выше. Формулы (4.1) могут быть в силу (1.6) преобразованы к виду

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t \\ \sigma_n \end{aligned} \right\} = k [V\sqrt{3} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2(\psi - \alpha)] \quad (4.2)$$

$$\tau_{tn} = k \sin \omega \sin 2(\psi - \alpha)$$

В задачах о пластическом плоском напряженном состоянии встречаются три вида условий, определяющих распределение касательной компоненты P_t вектора напряжения вдоль контура:

$$P_t = 0, \quad P_t = P_t(x), \quad P_t = P_n \operatorname{tg} \mu$$

где $\mu = \text{const}$. Рассмотрим эти три случая отдельно.

1. Касательная компонента вектора напряжения отсутствует $P_t = 0$.

Контурные значения ω и ψ могут быть выражены через P_n . Положим $\tau_{tn} = 0$, $\sigma_n = P_n$ в уравнениях (4.2) и решим их относительно ω и ψ . При этом нужно помнить, что ψ есть угол наклона к оси x траектории наибольшего в алгебраическом смысле главного нормального напряжения σ_1 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) и, следовательно, $\sigma_1 \geq \sigma_n$ при $\psi - \alpha = m\pi$ и $\sigma_1 \leq \sigma_n$ при $\psi - \alpha = \pi/2 + m\pi$.

Окончательно будем иметь

$$\psi = \alpha + (x-1) \frac{\pi}{4} + m\pi$$

$$\omega = -x \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{P_n}{2k} + 2n\pi \quad (4.3)$$

$$\frac{P_n}{k} = \sqrt{3} \cos \omega - z \sin \omega$$

$$2\sigma_l = P_n + z \sqrt{3} \sqrt{4k^2 - P_n^2} \quad (4.4)$$

где $z = \pm 1$, m и n произвольные целые числа.

Под \arcsin подразумевается его главное значение.

Из приведенных формул (4.3) и (4.4) следует, что каждому значению P_n на контуре соответствуют два возможных варианта значений ω и ψ , а также σ_l , отвечающие $z = +1$ и $z = -1$.

При $z = +1$ компонента $\sigma_l > P_n$, т. е. $\sigma_l = \sigma_t$, а при $z = -1$ компонента $\sigma_l < P_n$, а потому $\sigma_l = P_n$.

Заметим, что если на границе действует максимальное нормальное напряжение $|P_n| = 2k$, то контурное значение $2\sigma_l = P_n$ и, следовательно, определено однозначно.

2. Касательная компонента вектора напряжения задана $P_t = P_t(z)$

Контурные значения переменных ω и ψ могут быть выражены через P_n и P_t . Положим $\tau_{ln} = P_t$, $\sigma_n = P_n$ в уравнениях (4.2) и решим их относительно ω и ψ :

$$\psi = \alpha - \frac{\pi}{4} + z \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{P_t}{k \sin \omega} \right) + m\pi \quad (4.5)$$

$$\frac{P_n}{k} = \sqrt{3} \cos \omega - z \sqrt{\sin^2 \omega - \left(\frac{P_t}{k} \right)^2} \quad (4.6)$$

где $z = \pm 1$, m — произвольное целое число.

Под \arcsin попрежнему подразумевается его главное значение.

3. Касательная компонента вектора напряжения пропорциональна нормальной компоненте $P_t = P_n \operatorname{tg} \mu$ ($\mu = \text{const}$)

Контурные значения переменных ω и ψ могут быть выражены через P_n и μ . Положим $\tau_{ln} = P_n \operatorname{tg} \mu$ в уравнениях (4.2) и решим их относительно ω и ψ :

$$\psi = \alpha - \frac{\mu}{2} - \frac{\pi}{4} + z \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \left(\sqrt{3} \operatorname{ctg} \omega \sin \mu \right) \right] + m\pi \quad (4.7)$$

$$\frac{P_n}{k} = \sqrt{3} \cos^2 \mu \cos \omega - z \cos \mu \sin \omega \sqrt{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \omega \sin^2 \mu} \quad (4.8)$$

где $z = \pm 1$, m — произвольное целое число.

Напомним формулы преобразования компонент смещения при переходе от системы координат xy к системе tn

$$\begin{aligned} u_t &= u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha, & u_n &= -u_x \sin \alpha + u_y \cos \alpha \\ u_x &= u_t \cos \alpha - u_n \sin \alpha, & u_y &= u_t \sin \alpha + u_n \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.9)$$

Выразим контурные значения переменных u_x и u_y через U_t и U_n . Для

этого положим $u_t = U_t$, $u_n = U_n$ в уравнении (4.5). Получим

$$u_x = U_t \cos \alpha - U_n \sin \alpha, \quad u_y = U_t \sin \alpha + U_n \cos \alpha \quad (4.10)$$

Изученные уравнения и граничные условия, описывающие пластическое равновесие при плоском напряженном состоянии, во многом сходны с соответствующими уравнениями для плоского деформированного состояния^[1,2] (а также и с уравнениями предельного равновесия сыпучих тел^[4]). Естественно поэтому, что все задачи, известные для плоского деформированного состояния, могут быть рассмотрены и при плоском напряженном состоянии¹.

Поступила в редакцию
15 VIII 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

W. W. SOKOLOVSKY.—PLASTIC EQUILIBRIUM EQUATIONS OF A PLANE STRESSED STATE

The purpose of the paper is to construct a method for solving problems of plastic states analogous to that used in the theory of the plane deformed state^[3,5] or in the theory of loose mediums.

In § 1 of the paper the basic Mises-Hencky equations for a plane stressed state are obtained.

The stress components σ_x , σ_y and τ_{xy} are expressed by formulae (1.6) in terms of two functions ω and ψ . The function ω is related to the main normal stresses σ_1 and σ_2 by equations (1.5), while ψ is an angle between the x -axis and that main normal stress which in the algebraic sense is the greatest.

In § 2 the author studies equations (1.2) and (1.3) which are reduced with the aid of functions ω and ψ to the system (2.1). For the stressed states for which the function ω satisfies the condition $3 - 4\cos^2 \omega > 0$ the system of equations (2.1) has two families of real characteristics, and thus belongs to equations of the hyperbolic type.

The important property of the equations (2.1) is that the angles between the characteristics at the xy -plane depend on value ω .

Further, the equations (2.1) are reduced to the canonic form (2.5) and consequent investigation is carried out in detail.

In § 3 the author studies the system (3.1). These equations also belong to the hyperbolic type and their characteristics coincide with those of equations (2.1). The nets of these characteristics are used for a system of curvilinear coordinates at the plane xy and thus the equations (3.1) are given the form (3.2).

¹ Примеры таких задач публикуются в выпуске 3, т. IX (1945) «Прикладная математика и механика».

In § 4 the boundary conditions are considered on the contour of a plastic body.

For the tangent components P_t the cases of distributions along the contour are considered, namely, $Q_t=0$, $P_t=P_t(z)$ and $P_t=P_n \operatorname{tg} \mu$ where $\mu = \text{const}$.

The boundary values of ω and ψ are related with the components of the stress vector on the contour for the cases mentioned by formulae (4.3) and (4.4), (4.5) and (4.6), (4.7) and (4.8) correspondingly.

The boundary values of components u_x and u_y of displacement are expressed through the tangential u_t and normal u_n components of displacement by means of formulae (4.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Надаи. Пластичность. 1936.
2. Н. Geiringer. Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes. 1937.
3. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Математический сборник, новая серия. 1938. Т. I (43). Вып. 4.
4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. АН СССР. 1942.
5. Hencky H. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material herfergerufenen Nachspannungen, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1924. Bd. 4. H. 4.