

КОНЕЧНОЕ СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СИЛАМИ И МОМЕНТАМИ И СВЯЗЬ ИХ С ДЕФОРМАЦИЯМИ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

А. А. Ильюшин

(Москва)

При определении несущей способности пластинок и оболочек считают, что материал их является идеально пластическим, т. е. при переходе за предел упругости напряжения в любой точке удовлетворяют условию Мизеса

$$X_x^2 + Y_y^2 - X_x Y_y + 3X_y^2 = \sigma_S^2$$

В настоящей работе покажем, что из условия Мизеса вытекает существование одного соотношения между силами T_1 , T_2 ; S и изгибающими моментами M_1 , M_2 , H

$$F(T_1, T_2, S, M_1, M_2, H) = 0$$

каковое представляет собой уравнение замкнутой поверхности в шестимерном пространстве указанных переменных.

Покажем также, что эта поверхность имеет образ в трехмерном пространстве переменных P_T' , P_M' , Q_{TM}' , являющихся инвариантными квадратичными и билинейной формами

$$P_T' = T_1^2 + T_2^2 - T_1 T_2 + 3S^2$$

$$P_M' = M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2 + 3H^2$$

$$Q_{TM}' = T_1 M_1 + T_2 M_2 - \frac{1}{2} T_1 M_2 - \frac{1}{2} T_2 M_1 + 3SH$$

т. е. что уравнение этой поверхности может быть преобразовано к виду

$$G(P_T', P_M', Q_{TM}') = 0$$

Поверхность G является ограниченной, не замкнутой и расположена в первом октанте.

Благодаря найденному соотношению некоторые задачи об определении несущей способности пластинок и оболочек становятся статически определенными и имеют простое решение.

Попутно установим прямую и обратную зависимости между силовыми факторами T , M и деформациями ϵ , ϵ оболочки при произвольной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций.

1. **Связь между силами, моментами и деформациями.** Следуя нашим обозначениям, принятым в предшествующих работах⁽¹⁾, полагаем, что ось z сопровождающего трехгранника Дарбу направлена по нормали к средней поверхности оболочки, а оси x , y совпадают с ортогональными криволинейными координатами.

Обозначим удлинения срединной поверхности оболочки и ее искривления соответственно,

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma = 2\varepsilon_3, \kappa_1, \kappa_2, \tau \quad (1.1)$$

Удлинения и сдвиг элемента, параллельного плоскости x, y и удаленного на расстояние z от срединной поверхности, будут

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 - z\kappa_1, \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 - z\kappa_2, \quad \varepsilon_{3z} = \varepsilon_3 - z\tau \quad (1.2)$$

Оставляя пока связь между интенсивностью напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{X_x^2 + Y_y^2 - X_x Y_y + 3X_y^2} \quad (1.3)$$

и интенсивностью деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{1z}^2 + \varepsilon_{2z}^2 + \varepsilon_{1z}\varepsilon_{2z} + \varepsilon_{3z}^2} \quad (1.4)$$

произвольной, найдем выражения напряжений, сил и моментов через деформации. Введем обозначение для квадратичной формы переменных u_1, u_2, u_3

$$P(u) = P_u = u_1^2 + u_2^2 + u_1 u_2 + u_3^2 \quad (1.5)$$

и для билинейной формы переменных u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3

$$Q(u, v) = Q_{uv} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \frac{1}{2} u_1 v_2 + \frac{1}{2} u_2 v_1 + u_3 v_3 \quad (1.6)$$

На основании (1.4) имеем

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P(\varepsilon_i)} \quad (1.7)$$

причем $P(\varepsilon_i)$ согласно (1.2) можно представить трехчленом

$$P(\varepsilon_i) = P_z - 2zQ_{zx} + z^2 P_x \quad (1.8)$$

Вместо z введем новую переменную ξ с помощью соотношения

$$Q_{zx} - zP_x = \sqrt{P_z P_x - Q_{zx}^2} \operatorname{sh} \xi \quad (1.9)$$

причем изменению z по толщине оболочки от $-\frac{1}{2}h$ до $\frac{1}{2}h$ соответствует изменение ξ от ξ_1 до ξ_2 :

$$\xi_1 = \operatorname{arc sh} \frac{Q_{zx} + \frac{1}{2}hP_x}{\sqrt{P_z P_x - Q_{zx}^2}}, \quad \xi_2 = \operatorname{arc sh} \frac{Q_{zx} - \frac{1}{2}hP_x}{\sqrt{P_z P_x - Q_{zx}^2}} \quad (1.10)$$

Форма $P(\varepsilon_i)$ и интенсивность деформаций ε_i теперь преобразуется к виду

$$P(\varepsilon_i) = \frac{P_z P_x - Q_{zx}^2}{P_x} \operatorname{ch}^2 \xi, \quad \varepsilon_i = 2 \sqrt{\frac{P_z P_x - Q_{zx}^2}{3P_x}} \operatorname{ch} \xi \quad (1.11)$$

Интенсивность напряжений σ_i согласно основному закону пластичности есть известная функция интенсивности деформаций, а следовательно, и переменной ξ :

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i) = \sigma_i(\xi) \quad (1.12)$$

Формулы для напряжений

$$X_x = \frac{4\sigma_i}{3\varepsilon_i} \left(\varepsilon_{1z} + \frac{1}{2} \varepsilon_{2z} \right), \quad Y_y = \frac{4\sigma_i}{3\varepsilon_i} \left(\varepsilon_{2z} + \frac{1}{2} \varepsilon_{1z} \right), \quad X_y = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{3z} \quad (1.13)$$

на основании (1.2), (1.9) и (1.11) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} X_x - \frac{1}{2} Y_y &= \frac{\sqrt{3}}{2 \operatorname{ch} \xi} \frac{\sigma_i \sqrt{P_x}}{\sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2}} \left(\varepsilon_1 - \frac{Q_{\varepsilon x}}{P_x} x_1 + \frac{x_1}{P_x} \sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2} \operatorname{sh} \xi \right) \\ Y_y - \frac{1}{2} X_x &= \frac{\sqrt{3}}{2 \operatorname{ch} \xi} \frac{\sigma_i \sqrt{P_x}}{\sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2}} \left(\varepsilon_2 - \frac{Q_{\varepsilon x}}{P_x} x_2 + \frac{x_2}{P_x} \sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2} \operatorname{sh} \xi \right) \\ X_y &= \frac{\sqrt{3}}{3 \operatorname{ch} \xi} \frac{\sigma_i \sqrt{P_x}}{\sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2}} \left(\varepsilon_3 - \frac{Q_{\varepsilon x}}{P_x} \tau + \frac{\tau}{P_x} \sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2} \operatorname{sh} \xi \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Выражение для сил и моментов

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} X_x dz, & T_2 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Y_y dz, & S &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} X_y dz \\ M_1 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} X_x z dz, & M_3 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Y_y z dz, & H &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} X_y z dz \end{aligned} \quad (1.15)$$

через деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, и искривления x_1, x_2, τ при произвольном заданном законе (1.12) принимают вид

$$\begin{aligned} T_1 - \frac{1}{2} T_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2P_x^{3/2}} \int_{\xi_2}^{\xi_1} (\varepsilon_1 P_x - x_1 Q_{\varepsilon x} + x_1 \sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2} \operatorname{sh} \xi) \sigma_i(\xi) d\xi \\ T_2 - \frac{1}{2} T_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2P_x^{3/2}} \int_{\xi_2}^{\xi_1} (\varepsilon_2 P_x - x_2 Q_{\varepsilon x} + x_2 \sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2} \operatorname{sh} \xi) \sigma_i(\xi) d\xi \\ S &= \frac{\sqrt{3}}{3P_x^{3/2}} \int_{\xi_2}^{\xi_1} (\varepsilon_3 P_x - \tau Q_{\varepsilon x} + \tau \sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2} \operatorname{sh} \xi) \sigma_i(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} M_1 - \frac{1}{2} M_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2P_x^{5/2}} \int_{\xi_2}^{\xi_1} [(\varepsilon_1 P_x - x_1 Q_{\varepsilon x}) Q_{\varepsilon x} + \\ &+ (2x_1 Q_{\varepsilon x} - \varepsilon_1 P_x) \sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2} \operatorname{sh} \xi - x_1 (P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2) \operatorname{sh}^2 \xi] \sigma_i d\xi \\ M_2 - \frac{1}{2} M_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2P_x^{5/2}} \int_{\xi_2}^{\xi_1} [(\varepsilon_2 P_x - x_2 Q_{\varepsilon x}) Q_{\varepsilon x} + \\ &+ (2x_2 Q_{\varepsilon x} - \varepsilon_2 P_x) \sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2} \operatorname{sh} \xi - x_2 (P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2) \operatorname{sh}^2 \xi] \sigma_i d\xi \\ H &= \frac{\sqrt{3}}{3P_x^{5/2}} \int_{\xi_2}^{\xi_1} [(\varepsilon_3 P_x - \tau Q_{\varepsilon x}) Q_{\varepsilon x} + \\ &+ (2\tau Q_{\varepsilon x} - \varepsilon_3 P_x) \sqrt{P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2} \operatorname{sh} \xi - \tau (P_\varepsilon P_x - Q_{\varepsilon x}^2) \operatorname{sh}^2 \xi] \sigma_i d\xi \end{aligned} \quad (1.17)$$

Эти соотношения можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_1 - \frac{1}{2} T_2 &= \frac{\sigma' \sqrt{3}}{2 \sqrt{P_x}} \left(A \varepsilon_1 + \frac{1}{2} h B \varkappa_1 \right) & S &= \frac{\sigma' \sqrt{3}}{3 \sqrt{P_x}} \left(A \varepsilon_3 + \frac{1}{2} h B \tau \right) \\ T_2 - \frac{1}{2} T_1 &= \frac{\sigma' \sqrt{3}}{2 \sqrt{P_x}} \left(A \varepsilon_2 + \frac{1}{2} h B \varkappa_2 \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} M_1 - \frac{1}{2} M_2 &= \frac{\sigma' h \sqrt{3}}{4 \sqrt{P_x}} \left(-B \varepsilon_1 + \frac{1}{2} h C \varkappa_1 \right) & H &= \frac{\sigma' h \sqrt{3}}{6 \sqrt{P_x}} \left(-B \varepsilon_3 + \frac{1}{2} h C \tau \right) \\ M_2 - \frac{1}{2} M_1 &= \frac{\sigma' h \sqrt{3}}{4 \sqrt{P_x}} \left(-B \varepsilon_2 + \frac{1}{2} h C \varkappa_2 \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь σ' — какое-нибудь характерное для данного материала оболочки постоянное напряжение, а величины A , B , C определяются выражениями

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sigma'} \int_{\xi_2}^{\xi_1} \sigma_i d\xi, & B &= -\frac{\beta}{\sigma'} \int_{\xi_2}^{\xi_1} \sigma_i d\xi + \frac{\sqrt{\alpha - \beta^2}}{\sigma'} \int_{\xi_2}^{\xi_1} \sigma_i \operatorname{sh} \xi d\xi \\ C &= -\frac{\beta^2}{\sigma'} \int_{\xi_2}^{\xi_1} \sigma_i d\xi + \frac{2\beta \sqrt{\alpha - \beta^2}}{\sigma'} \int_{\xi_2}^{\xi_1} \sigma_i \operatorname{sh} \xi d\xi - \frac{\alpha - \beta^2}{\sigma'} \int_{\xi_2}^{\xi_1} \sigma_i \operatorname{sh}^2 \xi d\xi \end{aligned} \quad (1.20)$$

причем α , β — основные для дальнейшего параметры — имеют вид

$$\alpha = \frac{4P_x}{h^2 P_x}, \quad \beta = \frac{2Q_{xz}}{h P_x} \quad (1.21)$$

Пределы рассматриваемых интегралов зависят только от параметров α , β

$$\xi_1 = \operatorname{arcs} \operatorname{sh} \frac{\beta + 1}{\sqrt{\alpha - \beta^2}}, \quad \xi_2 = \operatorname{arcs} \operatorname{sh} \frac{\beta - 1}{\sqrt{\alpha - \beta^2}} \quad (1.22)$$

и потому структура уравнений (1.18), (1.19) оказывается не необозримой, как это кажется на первый взгляд. Конечно, они являются нелинейными и по сложности не могут идти в сравнение с соответствующими уравнениями упругой теории оболочек, которые получаются из наших соотношений при условии

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i = Gh \sqrt{3P_x} \sqrt{\alpha - \beta^2} \operatorname{ch} \xi$$

Однако, в шести соотношениях (1.18), (1.19) нелинейность сказывается только в виде трех непостоянных множителей $A/\sqrt{P_x}$, $B/\sqrt{P_x}$, $C/\sqrt{P_x}$, зависящих только от инвариантов деформаций и искривлений; поэтому их можно выразить через аналогичные инварианты сил и моментов.

Покажем, что соотношения (1.18), (1.19) могут быть разрешены относительно деформаций ε_1 , ε_2 , ε_3 и искривлений \varkappa_1 , \varkappa_2 , τ . Важность этих преобразований для теории оболочек очевидна, так как они позволяют писать условия совместности деформаций оболочек через силы T_1 , T_2 , S и моменты M_1 , M_2 , H . Введем обозначения

$$t_1 = \frac{4}{\sigma' h \sqrt{3}} \left(T_1 - \frac{1}{2} T_2 \right), \quad t_2 = \frac{4}{\sigma' h \sqrt{3}} \left(T_2 - \frac{1}{2} T_1 \right), \quad t_3 = \frac{6}{\sigma' h \sqrt{3}} S \quad (1.23)$$

$$m_1 = \frac{8}{\sigma' h^2 \sqrt{3}} \left(M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right), \quad m_2 = \frac{8}{\sigma' h^2 \sqrt{3}} \left(M_2 - \frac{1}{2} M_1 \right), \quad m_3 = \frac{12}{\sigma' h^2 \sqrt{3}} H \quad (1.24)$$

Уравнения (1.18), (1.19) можно представить в виде

$$A \frac{2\varepsilon_n}{h\sqrt{P_x}} + B \frac{z_n}{\sqrt{P_x}} = t_n, \quad -B \frac{2\varepsilon_n}{h\sqrt{P_x}} + C \frac{z_n}{\sqrt{P_x}} = m_n \quad (n=1, 2, 3) \quad (1.25)$$

Составим квадратичные и билинейную формы величин t_n, m_n согласно (1.23), (1.24); имеем тождественные равенства

$$P_t = \left(\frac{2}{c'h}\right)^2 P_T', \quad P_m = \left(\frac{4}{c'h^2}\right)^2 P_M', \quad Q_{tm} = \frac{8}{(c')^2 h^3} Q_{TM}' \quad (1.26)$$

где P', Q' — взаимные квадратичная и билинейная формы

$$\begin{aligned} P_T' &= T_1^2 + T_2^2 - T_1 T_2 + 3S^2 \\ P_M' &= M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2 + 3H^2 \\ Q_{TM}' &= T_1 M_1 + T_2 M_2 - \frac{1}{2} T_1 M_2 - \frac{1}{2} T_2 M_1 + 3SH \end{aligned} \quad (1.27)$$

Составим теперь квадратичные и билинейную формы величин t_n, m_n согласно формулам (1.25) и сравним их с выражениями (1.26); получим

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{4}{c'^2 h^2} P_T' = \alpha A^2 + 2\beta AB + B^2 = 4\varphi(\alpha, \beta, P_x) \\ P_m &= \frac{16}{c'^2 h^4} P_M' = \alpha B^2 - 2\beta BC + C^2 = \psi(\alpha, \beta, P_x) \\ Q_{tm} &= \frac{8}{c'^2 h^3} Q_{TM}' = -(\alpha A + \beta B)B + (\beta A + B)C = \chi(\alpha, \beta, P_x) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Так как согласно (1.14), (1.21)

$$\varepsilon_i = \frac{h}{\sqrt{3}} \sqrt{P_x(\alpha - \beta^2)} \operatorname{ch} \zeta \quad (1.29)$$

то интенсивность напряжений $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ в равенствах (1.20) наряду с параметрами α, β вводит еще параметр P_x и поэтому правые части уравнений (1.28) являются функциями трех величин $P_x, P_\varepsilon, Q_{\varepsilon x}$ или α, β, P_x . Если конкретная характеристика материала оболочки дана, т. е. функция $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ известна, то уравнения (1.28) можно разрешить относительно α, β, P_x , выразив их через P_T', P_M', Q_{TM}' , и тем самым найти A, B, C .

Разрешая систему (1.25), найдем искомые выражения деформаций ε_n и искривлений z_n ($n=1, 2, 3$) через силы T_n и моменты M_n :

$$\varepsilon_n = \frac{h\sqrt{P_x}}{2(B^2 - AC)} (Ct_n - Bm_n); \quad z_n = \frac{\sqrt{P_x}}{B^2 - AC} (Bt_n + Am_n) \quad (1.30)$$

Величины ε_n, z_n выражаются по известным в теории упругости формулам через три перемещения u, v, w срединной поверхности оболочки, и поэтому на основании (1.30) можно составить все дополнительные уравнения для сил и моментов, необходимые для решения уравнений статики.

2. Конечные соотношения между силами и моментами. Интенсивность напряжений σ_i при пластической деформации тела можно считать величиной постоянной в двух случаях:

а. Если характеристика материала $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ действительно имеет резко выраженный горизонтальный участок (идеальная пластичность).

б. Если по условию задачи нас интересует лишь несущая способность тела, т. е. наибольшее значение нагрузки данного характера распределения, при которой тело целиком выходит за пределы упругости, причем величина деформации может остаться неопределенной.

В этих случаях между силами T_1 , T_2 , S и моментами M_1 , M_2 , H существует одно конечное соотношение. Итак, положим

$$\sigma_i = \sigma' = \text{const} \quad (2.1)$$

и вычислим интегралы (1.20); получаем

$$\begin{aligned} A &= \ln \frac{\sqrt{1+\alpha+2\beta} + \beta + 1}{\sqrt{1+\alpha-2\beta} + \beta - 1}, & B &= -\beta A + \sqrt{1+\alpha+2\beta} - \sqrt{1+\alpha-2\beta} \\ 2C &= (\alpha - 3\beta^2) A + (3\beta - 1) \sqrt{1+\alpha+2\beta} - (3\beta + 1) \sqrt{1+\alpha-2\beta} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Параметры α , β согласно (1.21) являются однородными функциями нулевой степени относительно деформаций ε_n , \varkappa_n ; так как величины A , B , C теперь зависят только от параметров α , β , то правые части равенств (1.18), (1.19) являются тоже однородными функциями нулевой степени относительно деформаций. Таким образом, из шести параметров ε_1 , ε_2 , ε_3 , \varkappa_1 , \varkappa_2 , τ в формулах (1.18), (1.19) остаются лишь пять их независимых отношений, благодаря чему шесть сил и моментов оказываются функциями пяти независимых параметров, т. е. они связаны соотношением $F(T_1, T_2, S, M_1, M_2, H) = 0$.

Параметрическое уравнение этой поверхности в пространстве шести измерений дается, следовательно, формулами (1.18), (1.19).

Обозначим через x , y , z инвариантные формы, эквивалентные (1.27)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} P_t = \frac{1}{T_0^2} (T_1^2 + T_2^2 - T_1 T_2 + 3S^2) \\ y &= P_m = \frac{1}{M_0^2} (M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2 + 3H^2) \\ z &= Q_{l,m} = \frac{2}{T_0 M_0} \left(T_1 M_1 + T_2 M_2 - \frac{1}{2} T_1 M_2 - \frac{1}{2} T_2 M_1 + 3SH \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где T_0 , M_0 — характерные значения сил и моментов:

$$T_0 = \sigma' h, \quad M_0 = \frac{1}{4} \sigma' h^2 \quad (2.4)$$

Тогда формулы (1.28) можно представить в виде

$$x = \varphi(\alpha, \beta), \quad y = \psi(\alpha, \beta), \quad z = \chi(\alpha, \beta) \quad (2.5)$$

причем функции φ , ψ , χ согласно (1.28) и (2.2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4} (\alpha A^2 + 2\beta AB + B^2), & \psi &= (\alpha B^2 - 2\beta BC + C^2), \\ \chi &= -(\alpha A + \beta B) B + (\beta A + B) C \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поверхность $G(x, y, z) = 0$ определяемая параметрическим уравнением (2.6), представляет собой образ поверхности F в трехмерном пространстве x, y, z .

Покажем, что поверхность G ограничена. Величины T , M должны иметь только действительные значения, и поэтому имеем

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad |z| < \sqrt{Nxy} \quad (2.7)$$

где N — некоторое число, не зависящее от α, β .

Формулы (2.6), (2.7), (2.2) показывают, что условия (2.7) будут выполнены, если параметры α, β удовлетворяют неравенствам

$$\alpha \geq 0 \quad |\beta| \leq \sqrt{\alpha} \quad (2.8)$$

причем функции $\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)$ четные, а $\chi(\alpha, \beta)$ — нечетная по β , т. е.

$$\varphi(\alpha, -\beta) = \varphi(\alpha, \beta), \quad \psi(\alpha, -\beta) = \psi(\alpha, \beta), \quad \chi(\alpha, -\beta) = -\chi(\alpha, \beta) \quad (2.9)$$

Таким образом плоскость $z=0$ является плоскостью симметрии поверхности G , причем линия пересечения их ($\beta=0$) имеет уравнение

$$x = \varphi(\alpha) = \frac{\alpha}{4} \left(\ln \frac{\sqrt{1+\alpha}+1}{\sqrt{1+\alpha}-1} \right)^2, \quad y = \psi(\alpha) = \left(\sqrt{1+\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\sqrt{1+\alpha}+1}{\sqrt{1+\alpha}-1} \right)^2$$

Эта выпуклая линия, расположенная в первом квадранте осей x, y , соединяет точки $A_1(x=1, y=0)$ и $B_1(x=0, y=1)$. Она указана на фиг. 1 и определяется следующими данными ($\beta=0$):

α	0	0.01	0.02	0.04	0.1	0.25	0.5	1	2	3	8	∞
x	0	0.090	0.141	0.214	0.342	0.522	0.660	0.782	0.875	0.908	0.96	1
y	1	0.950	0.917	0.861	0.746	0.574	0.416	0.275	0.168	0.122	0.05	0

Криволинейные координаты α, β вообще не ортогональны на поверхности G , но на линии $\beta=0$ они ортогональны. Действительно, из (2.5), (2.6) имеем при $\beta=0$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = \frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0 \quad (2.11)$$

откуда вытекает условие ортогональности

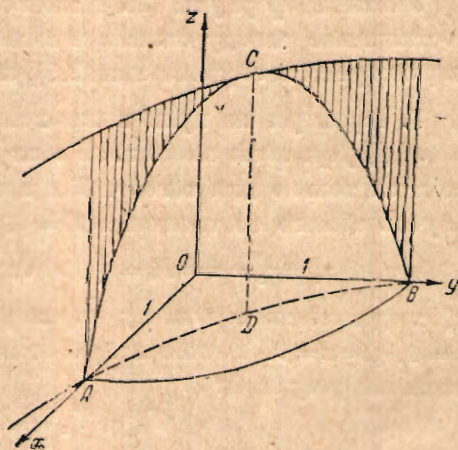
$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0$$

Вектор единичной нормали к поверхности G

$$n = \frac{\Delta(y, z) i + \Delta(z, x) j + \Delta(x, y) k}{\sqrt{\Delta(y, z)^2 + \Delta(z, x)^2 + \Delta(x, y)^2}}$$

где

$$\Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha}$$



Фиг. 1

Из (2.11) вытекает, что $\Delta(x, y) = 0$.

Это означает, что нормаль к поверхности G на линии ее пересечения с плоскостью (x, y) лежит в этой плоскости. Легко доказать, что поверхность G в окрестности линии $\beta=0$ не имеет особенностей и содержит только эллиптические точки, т. е. является выпуклой.

Соотношения (2.11) показывают, следовательно, что на линии $\beta=0$ величины $x \geq 0, y \geq 0$ имеют максимум и поверхность G ограничена.

Граничная линия поверхности G определяется уравнением

$$|\beta| = \sqrt{\alpha} \quad (2.12)$$

которое на основании (2.5), (2.6) можно преобразовать к виду

$$x = \alpha, \quad y = (1 - \alpha)^2, \quad z = \pm 2(1 - \alpha)\sqrt{\alpha} \quad (2.13)$$

или, исключая α , к виду

$$y = (1 - x)^2, \quad z = \pm 2(1 - x)\sqrt{x} \quad (2.14)$$

Граничная линия поверхности G , следовательно, является пересечением параболического цилиндра с образующей, параллельной оси z и цилиндра, образующая которого идет параллельно оси y , а направляющая является полукубической параболой (фиг. 1).

Максимальное значение величины z получается в точке

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{4}{9}, \quad z = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad z_{\max} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \quad (2.15)$$

Параметрическое уравнение (2.5) поверхности G можно заменить [приближенным уравнением, заменяя истинную поверхность либо эллипсоидом

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 + \frac{7}{4}z^2 = 13 \quad (2.16)$$

либо парой плоскостей

$$x + y + \frac{3\sqrt{3}}{18}|z| = 1 \quad (2.17)$$

причем граничная линия определяется их пересечением с параболическим цилиндром (2.14).

Учитывая формулы (2.3), мы получили, следовательно, искомое конечное соотношение между силами и моментами в ободочках либо в виде точного параметрического уравнения (2.5), либо в виде приближенных (2.16) или (2.17).

3. Примеры на применение конечного соотношения.

а. Деформация пластинок в их плоскости. Этот пример тривиален и приводится только для того, чтобы показать, что условие Мизеса есть частный случай общего соотношения $G = 0$. По условию задачи имеем

$$x_1 = x_2 = \tau = P_x = Q_{x,x} = 0, \quad M_1 = M_2 = H = P_{M'} = Q_{T,M'} = 0$$

и, следовательно, нашему примеру на поверхности G соответствует точка $x = 1, y = z = 0$. Точное и приближенное уравнения поверхности G дают одинаковый результат:

$$T_1^2 + T_2^2 - T_1 T_2 + 3S^2 = T_0^2 \quad (3.1)$$

совпадающий с условием Мизеса.

б. Изгиб пластинок. Предполагая, что силы T_1, T_2, S отсутствуют, получим

$$T_x = T_y = S = P_T = Q_{T,M} = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = P_{\varepsilon_x} = Q_{\varepsilon_x} = 0$$

и, следовательно, изгибу пластинок на поверхности G соответствует одна точка $x = z = 0, y = 1$. Точное и приближенные уравнения поверхности G дают одинаковый результат ($M_0 = \pm \sigma' h^2$):

$$M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2 + 3H^2 = M_0^2 \quad (3.2)$$

Учитывая уравнение равновесия пластинок при изгибе

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + q(x, y) = 0 \quad (3.3)$$

видим, что в общем случае задача об изгибе оказывается один раз статически неопределимой.

Параметры кривизны и кручения пластинок κ_1 , κ_2 , τ удовлетворяют дифференциальному уравнению совместности

$$\frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.4)$$

которое согласно (1.30) и (1.28) может быть записано через моменты M_1 , M_2 , H . При этом нужно иметь в виду, конечно, что нужно прежде написать уравнение (3.4) для $\sigma_i \neq \text{const}$ и уже затем положить упрочнение равным нулю.

Для задач с осевой симметрией уравнения (3.2), (3.3) принимают вид ($M_r = M_1$, $M_\theta = M_2$, $H = 0$)

$$M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 = M_0^2, \quad N = \frac{dM_1}{dr} + \frac{M_1 - M_2}{r} = \frac{Pa}{r} - \int_a^r q r dr \quad (3.5)$$

где N — перерезывающая сила, P — ее значение при $r = a$; эти уравнения легко решаются до конца. Нужно иметь в виду, что в местах заделки ($\kappa_2 = 0$)

$$M_1 = 2M_2 = \pm \frac{2M_0}{\sqrt{3}} \quad (3.6)$$

на свободных опорах

$$M_1 = 0, \quad M_2 = \pm M_0 \quad (3.7)$$

и в точках перегиба ($\kappa_1 = 0$)

$$M_2 = 2M_1 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} M_0 \quad (3.8)$$

Для кольцевой пластинки в местах заделки перерезывающая сила связана с радиусом, поскольку момент M_1 в них имеет экстремальное значение ($dM/dr = 0$); из (3.5) имеем

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M_0}{r} = P \frac{a}{r} + \int_a^r q r dr \quad (3.9)$$

Так, если внутренний край $r = a$ заделан, то максимальная перерезывающая сила на этом крае равна

$$P = \pm \frac{M_0}{a\sqrt{3}} \quad (3.10)$$

Если заделан также край $r = b$, то имеем еще соотношение

$$P - \frac{b}{a} \int_a^b q r dr = \pm \frac{M_0}{a\sqrt{3}}$$

т. е. нагрузка q должна давать нулевую результирующую.

Некоторые вопросы, относящиеся к деформации круглых пластинок, совершенно иным методом недавно рассмотрены В. В. Соколовским [2].

с. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки без осевого сжатия. Как уже нами было доказано^[1], из условий $T_1 = S = 0$ вытекает $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_2$, т. е. $Q_{xz} = 0$ и $\beta = 0$ и $M_1 - 2M_2 = 0$. Формулы (2.3) дают

$$x = \frac{T_1^2}{T_0^2}, \quad y = \frac{3}{4} \frac{M_1^2}{M_0^2}, \quad z = 0 \quad (3.11)$$

что на основании (2.12) преобразуется к виду

$$T_1 = \pm \frac{\sqrt{x}}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}, \quad M_1 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{1+x} - \frac{x}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1} \right) \quad (3.12)$$

Эти соотношения совпадают с указанными нами ранее в упомянутой работе и вместе с уравнением равновесия оболочки

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{1}{R} T_2 + q = 0 \quad (3.13)$$

делают поставленную задачу статически определимой.

Случай действия кольцевой сосредоточенной нагрузки интенсивности P на единицу длины окружности достаточно длинной оболочки ($l \geq 4\sqrt{hR}$) был рассмотрен нами. Предельная нагрузка оказывается равной

$$P = \frac{\tau \sqrt{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3}} \sigma' h \sqrt{\frac{h}{R}}$$

Случай кольцевой нагрузки, действующей на край достаточно длинной оболочки, исследован в диссертации Пивоварова^[3].

Поступила в редакцию
29 XI 1944.

Институт механики
Академии Наук СССР.

A. A. ILYUSHIN.—FINITE RELATIONSHIP BETWEEN STRESSES AND ITS RELATION WITH DEFORMATIONS IN THEORY OF SHELLS

For calculating the loading capacity of plates and shells it is usually supposed that the material is not perfectly plastic, which means that beyond the limit of elasticity exists the Mises condition for stresses

$$X_x^2 + Y_y^2 - X_x T_y + 3X_y^2 = \sigma_s^2$$

In this work it is shown that from the condition of Mises the existence of a relationship $F(T_1, T_2, S, M_1, M_2, H) = 0$ between the forces T, T_2, S and bending moments M_1, M_2, H follows, which represents the equation of a closed surface in the six-dimensional space of these variables.

It is also shown that this surface has a representation in three-dimensional space of variables P'_T, P'_M, Q'_{TM} which are invariant quadratic and bilinear forms determined by formulae (1.27). This means that the equation $F=0$ can be reduced to the form $G(P'_T, P'_M, Q'_{TM})=0$.

Furthermore the author gives a relationship between the forces T and moments M and deformations α, ε of a shell when an arbitrary relation holds between the intensities of stresses and deformations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Прикладная математика и механика. 1943 Т. VII: 1944. Т. VIII.
2. Соколовский В. В. Прикладная математика и механика. 1944 Т. VIII.
3. Пивоваров А. М. (диссертация). Рукопись в библиотеке им. Горького. Москва.