Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том VIII, 1944

О СФЕРИЧЕСКИХ ШАТУННЫХ КРИВЫХ

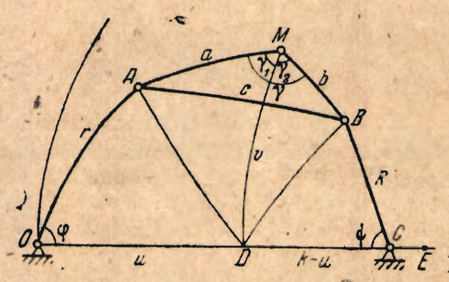
В. В. ДОБРОВОЛЬСКИЙ

(Москва)

На фиг. 1 представлен сферический шарнирный четырехзвенник $OABC$, у которого неподвижное звено $OC=k$, смежные с ним звенья $OA=r$ и $CB=R$, шатун $AB=c$. Радиус сферы полагаем равным единице.

Положение точки M определяется расстояниями $AM=a$, $BM=b$, измеряемыми по дугам больших кругов (которые в дальнейшем для краткости будем называть прямыми). Угол AMB обозначим буквой γ.

Примем прямую OC за экватор, а перпендикуляр к ней (т. е. тоже дугу большого круга) в точке O за начальный меридиан. Проведя меридиан MD точки M, определим ее положение на сфере долготой $OD=u$ и широтой $DM=v$.



Фиг. 1

Введем обозначения для переменных углов

$$\angle COA=\varphi,\quad \angle OCB=\psi;\quad \angle AMD=\gamma_1,\quad \angle BMD=\gamma_2$$

Проведя прямую AD, найдем из сферических треугольников OAD и ADM:

$$\cos r \sin u = \sin r \cos u \cos \varphi + \sin AD \cos ODA \tag{1}$$

$$\frac{\sin AD}{\sin \gamma_1} = \frac{\sin a}{\cos ODA}$$

Исключая из первого соотношения с помощью второго $\sin AD \cos ODA$, получим

$$\cos r \sin u = \sin r \cos u \cos \varphi + \sin a \sin \gamma_1 \tag{2}$$

С другой стороны, выражая $\cos AD$ из двух треугольников OAD и AMD, получим

$$\cos r \cos u + \sin r \sin u \cos \varphi = \cos a \cos v + \sin a \sin v \cos \gamma_1 \tag{3}$$

Исключая $\cos\varphi$ из (2) и (3), найдем

$$\cos r = \sin a \sin u \sin \gamma_1 + \cos a \cos u \cos v + \sin a \cos u \sin v \cos \gamma_1 \tag{4}$$

Из четырехугольника $DMBC$ получаем аналогичное уравнение

$$\cos R = \sin b \sin (k-u) \sin \gamma_2 + \cos b \cos (k-u) \cos v + \sin b \cos (k-u) \sin v \cos \gamma_2 \tag{5}$$

Подставляя сюда $\gamma_2=\gamma-\gamma_1$ и исключая из (4) и (5) угол γ_1, найдем уравнение шатунной кривой в форме

$$U^2+V^2=W^2 \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} U &= \sin a \sin u\,[\cos R - \cos b \cos v \cos (k-u)] - \\ &\quad - \sin b\,[\sin\gamma \sin v \cos (k-u) - \cos\gamma \sin (k-u)]\,(\cos r - \cos a \cos u \cos v) \\ V &= \sin a \cos u \sin v\,[\cos R - \cos b \cos v \cos (k-u)] - \\ &\quad - \sin b\,[\cos\gamma \sin v \cos (k-u) + \sin\gamma \sin (k-u)]\,(\cos r - \cos a \cos u \cos v) \\ W &= \sin a \sin b\,[\cos\gamma \sin k \sin v - \sin\gamma \cos k + \sin\gamma \cos u \cos (k-u) \cos^2 v] \end{aligned} \tag{7}$$

За порядок кривой на сфере будем принимать порядок центральной проекции этой кривой на плоскость, касательную к сфере.

Пусть плоскость касается сферы в точке O. За ось x примем касательную к экватору, за ось y — касательную к меридиану. Тогда точке $M(u, v)$ на сфере в центральной проекции будет соответствовать точка $m(x, y)$, причем легко установить из чертежа, что

$$\operatorname{tg} u = x, \qquad \operatorname{tg} v = \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} \tag{8}$$

Пользуясь этими соотношениями, заменим в уравнении функции от u и v их выражениями через x, y. В результате получим уравнение проекции сферической шатунной кривой

$$P_4^2 - 4P_2P_3^2 = 0 \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} P_4 &= (x^2+y^2)\,[(1+x^2+y^2)\cos^2 R + (\cos k + x \sin k)^2 \cos^2 b]\,\sin^2 a + \\ &\quad + [y^2 + (\sin k - x \cos k)^2]\,[(1+x^2+y^2)\cos^2 r + \cos^2 a]\,\sin^2 b + \\ &\quad + 2y(1+x^2+y^2)\,[\cos a \cos R + \cos b \cos r (\cos k + x \sin k)]\,\sin a \sin b \sin k \sin\gamma - \\ &\quad - \{y^2(1+x^2+y^2)\sin^2 k \cos^2\gamma + [(x^2+y^2)\cos k - x \sin k]^2 \sin^2\gamma\}\,\sin^2 a \sin^2 b \\ P_3 &= (x^2+y^2)(\cos k + x \sin k)\sin^2 a \cos b \cos R + \\ &\quad + [y^2 + (\sin k - x \cos k)^2]\,\sin^2 b \cos a \cos r + \\ &\quad + [y(1+x^2+y^2)\cos r \cos R + \cos a \cos b (\cos k + x \sin b)]\,\sin a \sin b \sin k \sin\gamma - \\ &\quad - y\,[(x^2+y^2)\cos k - x \sin k]\,\sin k \sin\gamma \cos\gamma \sin^2 a \sin^2 b \\ P_2 &= 1 + x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{10}$$

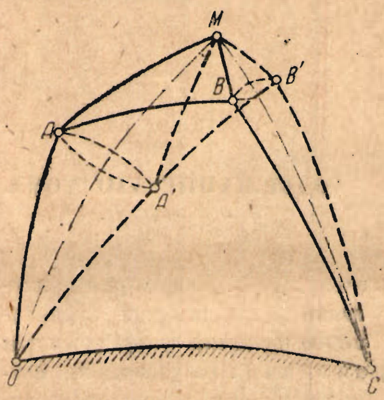
Таким образом согласно замечанию выше *сферическая шатунная кривая есть кривая восьмого порядка.*

Найдем двойные точки кривой и их свойства. Пусть M — такая точка (фиг. 2), причем $OABC$ и $OA'B'C$ — соответствующие положения механизма. Тогда прямая OM делит пополам угол AMA', а прямая CM делит пополам угол BMB'; вследствие же равенства углов AMB и $A'MB'$ углы AMA' и BMB' также равны, а потому равны и их половины, т. е. углы OMA' и BMC. Следовательно,

$$\angle OMC = \angle OMA' + \angle A'MB + \angle BMC = \angle AMA' + \angle A'MB = \angle AMB$$

Таким образом прямые, проведенные из двойной точки шатунной кривой к центрам вращения O и C, образуют угол, равный углу шатунного треугольника, противолежащему оси шатуна, т. е на сфере имеет место то же свойство двойной точки, что и на плоскости.

Так как это свойство принадлежит *всем двойным точкам кривой, то все двойные точки шатунной кривой лежат на геометрическом месте точек, из которых основание четырехзвенника видно под одним и тем же углом, равным углу шатунного треугольника.*



Фиг. 2

Это геометрическое место на сфере в отличие от плоскости представляет собой не совокупность двух кругов, а нераспадающуюся кривую четвертого порядка. Ее уравнение есть $W=0$, что дает согласно (7) и подстановок (8) для центральной проекции на касательной плоскости

$$y^2(1+x^2+y^2)\sin^2 k\cos^2\gamma-[(x^2+y^2)\cos k+$$
$$+x\sin k]^2\sin^2\gamma\sin^2 a\sin^2 b=0$$

Можно *показать, что геометрическое место тех точек шатуна, которые проходят (на сфере) через двойные точки своих траекторий, есть кривая третьего порядка.*

Шатунная кривая распадается на две кривые четвертого порядка в случае попарно равных противоположных звеньев механизма, что представляет аналогию с плоским шарнирным параллелограмом и антипараллелограмом. При попарно равных смежных звеньях шатунная кривая распадается на круг и кривую шестого порядка, что соответствует ромбоиду на плоскости.

При всех четырех равных звеньях в составе шатунной кривой окажутся два круга, как и для плоского шарнирного ромба; траекторией шатунной точки невыродившегося механизма будет кривая четвертого порядка (вместо третьего круга для плоского ромба).

Сферический кривошипно-шатунный механизм получается, как известно, из общего случая, если положить $R=\pi/2$, а для центрального механизма еще, кроме того, $k=\pi/2$. Подстановка этих значений в общее уравнение шатунной кривой не приводит к понижению ее порядка в противоположность плоскому шарнирному механизму.

Поступила в редакцию
8 III 1943

V. V. DOBROVOLSKY.—SPHERICAL THREE-BAR CURVE

The author deduces the equation of the three-bar curve for a spherical four-bar linkage. It is a curve of the 8th order. The properties of the double points of the curve are also established.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добровольский В. В. Основы теории сферических механизмов. Известия ОТН АН СССР. 1940. № 1
2. Добровольский В. В. Новая теория сферических механизмов. Труды МСИИ. 1940. Сб. VI.
3. Möbius. Analytische Sphärik. 1846.
4. Hübner. Ebene und räumliche Geometrie. 1895.
5. Weber u. Wellstein. Encyklopädie der elementaren Geometrie. S. 519—527 (Analytische Sphärik).
6. Heger. Analytische Geometrie auf der Kugel. 1910.
7. Darboux G. Principes de géometrie analytique. 1917.