Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том VIII, 1944

ЗАМЕТКИ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРУГОГО КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Б. А. СОКОЛОВ

(Москва)

1. Поместим рассматриваемый стержень в систему декартовых координат xyz так, чтобы ось кручения совпала с осью z. Помимо того отнесем стержень к триортогональной криволинейной системе координат α_i $(i=1, 2, 3)$ и определим ее с тем расчетом, чтобы боковая поверхность стержня совпадала с одной из поверхностей семейства $\alpha_1=\mathrm{const}$ и траектории касательного напряжения являлись образующими семейства поверхностей α_1. Поскольку боковая поверхность стержня должна быть свободна от внешних сил и к торцам $\alpha_3=\mathrm{const}$ приложены себя взаимно уравновешивающие моменты, в любой точке стержня должно быть

$$\sigma_1=\sigma_3=\tau_{12}=\tau_{13}=0$$

При отсутствии объемных сил уравнения равновесия, как известно, имеют вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_h}(\Delta\sigma_h)-\frac{1}{2}\sum_{\nu}\Delta\sigma_{\nu}\frac{\partial}{\partial \alpha_h}(\ln g_{\nu\nu})+\sum_{\nu}\frac{\partial}{\partial \alpha_{\nu}}\left(\Delta\sqrt{\frac{g_{hh}}{g_{\nu\nu}}}\,\tau_{\nu h}\right)=0 \qquad (\nu, h=1, 2, 3)$$

где $\Delta=\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}$, причем g_{ii}—фундаментальные величины первого рода.

В нашем случае из уравнения при $h=1$ находим $\sigma_2=0$, а остальные два уравнения принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\sqrt{g_{11}g_{22}}\,\tau_{23})=0, \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\sqrt{g_{11}g_{33}}\,\tau_{23})=0 \tag{1.1}$$

Интегрируя уравнения (1.1), находим соотношение

$$\frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2)}{g_{22}}=\frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_3)}{g_{33}} \tag{1.2}$$

где φ и ψ—две произвольные функции.

Обозначим через l_ν, m_ν и n_ν косинусы осей α_1, α_2 и α_3 с осями декартовой системы, полагая индекс $\nu=1, 2, 3$ соответственно для осей x, y и z. Воспользуемся известными соотношениями для напряжений, которые в нашем случае принимают вид [2]

$$\begin{aligned}
\sigma_x&=2\tau_{23}\,m_1n_1, & \tau_{xy}&=\tau_{23}\,(m_1n_2+m_2n_1)\\
\sigma_y&=2\tau_{23}\,m_2n_2, & \tau_{yz}&=\tau_{23}\,(m_2n_3+m_3n_2)\\
\sigma_z&=2\tau_{23}\,m_3n_3, & \tau_{xz}&=\tau_{23}\,(m_1n_3+m_3n_1)
\end{aligned}$$

В силу ортогональности системы $m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=0$, объемное расширение $\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=0$ и уравнения совместности принимают вид [2]

$$\begin{aligned}
\nabla^2\sigma_x&=0, & \nabla^2\tau_{xy}&=0\\
\nabla^2\sigma_y&=0, & \nabla^2\tau_{xz}&=0 \qquad \left(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\\
\nabla^2\sigma_z&=0, & \nabla^2\tau_{yz}&=0
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Если обозначить $\alpha_1=f_1(x, y, z)$, $\alpha_2=f_2(x, y, z)$, $\alpha_3=f_3(x, y, z)$, то, интегрируя второе из уравнений (1.1), находим

$$\tau_{23}=\frac{\varphi}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}=(f_{3x}^2+f_{3y}^2+f_{3z}^2)\sqrt{f_{1x}^2+f_{1y}^2+f_{1z}^2}\,\varphi$$

$$\sigma_x = A_1 \varphi, \quad \sigma_y = A_2 \varphi, \quad \sigma_z = A_3 \varphi; \qquad \tau_{xy} = B_1 \varphi, \quad \tau_{xz} = B_2 \varphi, \quad \tau_{yz} = B_3 \varphi$$

где $A_1, \ldots, B_1, \ldots$—выражения, содержащие производные первого порядка функций f_1, f_2 и f_3. Таким образом решение сводится к нахождению по крайней мере двух функций f_i и функции φ; при этом мы располагаем семью дифференциальными уравнениями. Эта задача в общем представляется очень трудной, однако некоторые частные случаи могут быть рассмотрены до конца.

2. В случае вала переменного сечения триортогональную систему образуют поверхности

$$\alpha_1 = f_1(r, z), \qquad \alpha_2 = \frac{y}{x}, \qquad \alpha_3 = f_3(r, z) \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

Для фундаментальных величин первого рода находим

$$g_{11} = \frac{1}{f_{1r}^2 + f_{1z}^2}, \qquad g_{22} = \frac{x^4}{r^2} = \frac{r^2}{(1 + \alpha_2^2)^2}, \qquad g_{33} = \frac{1}{f_{3r}^2 + f_{3z}^2}$$

Поскольку $\sqrt{g_{11}}\, g_{33} \tau_{23} = \varphi(\alpha_1, \alpha_3)$, имеем

$$\tau_{23} = (f_{3r}^2 + f_{3z}^2) \sqrt{f_{1r}^2 + f_{1z}^2}\, \varphi$$

Перейдем к определению напряжений в декартовых координатах. Легко установить, что $m_3 = 0$ и n_3 должно быть отрицательной величиной, так как в противном случае уравнения равновесия в декартовых координатах окажутся не удовлетворенными.

Следовательно, получим

$$\sigma_x = -\sigma_y = -2qxy, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = q(x^2 - y^2), \quad \tau_{yz} = -px, \quad \tau_{xz} = py$$

где

$$p = \frac{f_{1r}(f_{3r}^2 + f_{3z}^2)}{r} \varphi, \qquad q = \frac{f_{1z}(f_{3r}^2 + f_{3z}^2)}{r^2} \varphi$$

При вычислениях было принято во внимание условие ортогональности

$$f_{1r} f_{3r} + f_{1z} f_{3z} = 0$$

Уравнения совместности приводятся к двум уравнениям

$$\nabla^2 p + \frac{3}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \nabla^2 q + \frac{5}{r} \frac{\partial q}{\partial r} = 0 \qquad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Поскольку $p = rq\delta$, где $\delta = f_{1r} / f_{1z}$, уравнения совместности принимают вид

$$\frac{\partial \delta}{\partial r} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial \delta}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\nabla^2 \delta + \frac{5}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} + \frac{3}{r^2} \delta\right) q = 0, \qquad \nabla^2 q + \frac{5}{r} \frac{\partial q}{\partial r} = 0 \qquad (2.1)$$

Первое из уравнений равновесия приведется к виду

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{r^4 q}{f_{1z}}\right) = 0 \qquad (2.2)$$

в то время как второе удовлетворено.

Задача привелась к отысканию функций q и f_1, которые должны удовлетворять уравнениям (2.1) и (2.2).

В большинстве случаев, имеющих практическое значение, контур стержня таков, что $\delta = RZ$, где R—функция r, а Z—функция одного z. В этом случае первое из уравнений (2.1) принимает вид

$$(\ln R)' \frac{\partial \ln q}{\partial r} + (\ln Z)' \frac{\partial \ln q}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\frac{R''}{R} + \frac{Z''}{Z} + \frac{5}{r} (\ln R)' + \frac{3}{r^2}\right] = 0 \qquad (2.3)$$

Дифференцируя это уравнение раз по r и раз по z, имеем

$$(\ln R)' \frac{\partial \ln \psi}{\partial r} + (\ln Z)' \frac{\partial \ln \psi}{\partial z} = 0, \qquad \text{где} \qquad \psi = (\ln R)' (\ln Z)' \frac{\partial^2 \ln q}{\partial r\, \partial z}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\psi = f(\overline{R}+\overline{Z}), \qquad \text{где} \quad \overline{R} = \int \frac{dr}{(\ln R)'}, \quad \overline{Z} = -\int \frac{dz}{(\ln Z)'}$$

Вводя новую функцию $f^*(\overline{R}+\overline{Z})$ посредством равенства

$$\psi = (\ln R)'(\ln Z)' \frac{\partial^2 \ln f^*}{\partial r \partial z}$$

имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \ln \frac{q}{f^*} = 0 \qquad \text{или} \qquad q = f^* \mu(r)\varphi(z)$$

где $\mu(r)$ и $\varphi(z)$—произвольные функции.

Исключая из уравнения (2.3) q, получаем

$$(\ln R)' \frac{\mu'}{\mu} + (\ln Z)' \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{2}\left[\frac{R''}{R} + \frac{Z''}{Z} + \frac{5}{r}(\ln R)' + \frac{3}{r^2}\right] = 0$$

Отделяя переменные, находим

$$2(\ln R)' \frac{\mu'}{\mu} + \frac{R''}{R} + \frac{5}{r}(\ln R)' + \frac{3}{r^2} = a, \qquad 2(\ln Z)' \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{Z''}{Z} = -a \tag{2.4}$$

Подставляя значение q во второе уравнение совместности (2.1), находим

$$[\overline{R}'^2 + \overline{Z}'^2]\frac{d^2 f^*}{d\theta^2} + \left[\overline{R}'' + \left(2\frac{\mu'}{\mu} + \frac{5}{r}\right)\overline{R}' + \overline{Z}'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}\overline{Z}'\right]\frac{df^*}{d\theta} +$$
$$+\left(\frac{\mu''}{\mu} + \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{5}{r}\frac{\mu'}{\mu}\right) f^* = 0$$

где

$$\theta = \overline{R} + \overline{Z}$$

Это уравнение имеет место лишь в том случае, когда коэффициенты при f^* и ее производных—линейные функции θ, так что должно быть

$$(a_1\theta + b_1)\frac{d^2 f^*}{d\theta^2} + (a_2\theta + b_2)\frac{df^*}{d\theta} + (a_3\theta + b_3) f^* = 0 \tag{2.5}$$

Это нас приводит к двум системам уравнений

$$\overline{R}'^2 = a_1\overline{R} + \varepsilon_1, \qquad \overline{R}'' + \left(2\frac{\mu'}{\mu} + \frac{5}{r}\right)\overline{R} = a_2\overline{R} + \varepsilon_2, \qquad \frac{\mu''}{\mu} + \frac{5}{r}\frac{\mu'}{\mu} = a_3 R + \varepsilon_3 \tag{2.6}$$

$$\overline{Z}'^2 = a_1\overline{Z} + \omega_1, \qquad \overline{Z}'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}\overline{Z} = a_2\overline{Z} + \omega_2, \qquad \frac{\varphi''}{\varphi} = a_3\overline{Z} + \omega_3 \tag{2.7}$$

где $a_1, \ldots, \varepsilon_1, \ldots, \omega_1, \ldots$ — постоянные.

Из первого уравнения системы (2.6) находим

$$\overline{R} = \frac{a_1}{4}(r+m)^2 + m_1, \quad \text{следовательно,} \quad R = \overline{m}_1 (r+m)^{2/a_1}$$

Исключая μ'/μ с помощью второго уравнения (2.6) из первого уравнения (2.4), находим

$$\frac{a_1(a_2 - aa_1)}{4} r^2 (r+m)^2 + \frac{3a_1^2}{4}(r+m)^2 + (a_2 m_1 + \varepsilon_2 - a_1 + 1) r^2 = 0$$

откуда

$$a_1(a_2 - aa_1) = 0, \qquad \frac{3}{4}a_1^2 + a_2 m_1 + \varepsilon_2 - a_1 + 1 = 0, \qquad a_1^2 m = 0$$

Следовательно, $m=0$ или $a_1=0$. Допустим, что $m=0$ и $a_1 \neq 0$; тогда

$$\frac{\mu'}{\mu}=Ar+\frac{B}{r}, \qquad \frac{\mu''}{\mu}=A^2r^2+\frac{B^2-B}{r}+A(2B+1)$$

где

$$A=\frac{aa_1}{4}, \qquad B=-\frac{3a_1^2+8a_1+4}{4a_1}$$

так что третье уравнение системы (2.6) принимает вид

$$\left(A^2+\frac{a_1a_3}{4}\right)r^2+\frac{B^2+4B}{r^2}+2A(B+3)-a_3m_1-\varepsilon_3=0$$

откуда

$$4A^2-a_1a_3=0, \qquad B(B+4)=0, \qquad 2A(B+3)-a_3m_1-\varepsilon_3=0$$

Следовательно, либо $B=0$, либо $B=-4$.

При $B=0$ находим $a_1=-\frac{2}{3}$ или -2, а при $B=-4$, $a_1=\frac{2}{3}$ или 2.

Обратимся к системе (2.7). Из первого уравнения системы находим

$$\overline{Z}=\frac{1}{4}a_1(z+n)^2+n_1, \qquad Z=\overline{n_1}\,(z+n)^{-2/a_1}$$

Исключая из второго уравнения системы φ'/φ посредством второго уравнения (2.4), находим

$$\frac{a_1(aa_1-a_2)}{4}(z+n)^2+a_1-a_2n_1-\omega_2+1=0$$

Следовательно,

$$a_1(aa_1-a_2)=0, \qquad a_1-a_2n_1-\omega_2+1=0$$

Поскольку $a_1 \neq 0$,

$$aa_1-a_2=0$$

Исключая из третьего уравнения системы φ''/φ, получим

$$\frac{a_1(a^2a_1-4a_3)}{16}(z+n)^2+\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(z+n)^2}+\frac{a}{2}(a_1+1)-a_3n_1-\omega_3=0$$

откуда

$$a_1(a^2a_1-4a_3)=0, \qquad \frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{4}=0; \qquad \frac{a}{2}(a_1+1)-a_3n_1-\omega_3=0$$

Следовательно, $a_1=\pm 2$.

Сопоставляя все выше найденное, имеем

$$m=0, \qquad a_1=\pm 2, \qquad a_2=aa_1; \qquad 4a_3=a^2a_1, \qquad \varepsilon_1-a_1+a_2m+4=0$$

$$\frac{aa_1}{2}(B+3)-a_3m_1-\varepsilon_3=0, \qquad a_1-a_2n_1-\omega_2+1=0, \qquad \frac{a}{2}(a_1+1)-a_3n_1-\omega_3=0$$

В первом случае, при $m=0$ и $a_1=-2$, имеем

$$a_2=-2a, \qquad 2a_3=-a^2, \qquad 2m_1+\varepsilon_1=0, \qquad 2n_1+\omega_1=0, \qquad \varepsilon_2+a_2m_1+6=0$$

$$\omega_2+a_2n_1+1=0, \qquad \varepsilon_3+a_3m_1+3a=0, \qquad 2\omega_3+2a_2n_1+a=0$$

Складывая последние четыре равенства, находим

$$2b_2-a_2b_1+14=0, \qquad 2b_3+2a_3b_1+7a=0$$

Поскольку $R=m_1/r$ и $Z=n_1(z+n)$, уравнение (2.3) принимает вид

$$(\ln R)'\frac{\partial q}{\partial r}+(\ln Z)'\frac{\partial q}{\partial z}=0, \qquad \text{откуда} \qquad q=f(\overline{R}+\overline{Z})$$

Сравнивая это значение q с ранее найденным, получаем $\varphi\mu = 1$, что может иметь место лишь при $a = 0$. Итак, должно быть

$$a_2 = a_3 = b_3 = 0, \qquad b_2 = -7$$

Уравнение (2.5) принимает вид

$$(2\theta - b_1)\frac{d^2 f^*}{d\theta^2} + 7\frac{df^*}{d\theta} = 0, \qquad \text{откуда} \qquad f^* = C_1\left(\frac{b_1}{2} - \theta\right)^{-5/2} + C_2$$

Подставляя значение θ, для q имеем

$$q = C_1\,[r^2 + (z+n)^2 + 2b_1]^{-5/2} + C_2$$

Поскольку $\delta = A\,(z+n)/r$, где $A = \overline{m}_1\overline{n}_1$,

$$\alpha_1 = (z+n)\,r^A$$

Ортогональные траектории в рассматриваемом случае найдутся

$$\alpha_3 = A\,(z+n)^2 - r^2$$

Уравнение (2.2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left\{\frac{C_1 r^{4(A+1)}}{[r^{2(A+1)} + \alpha_1^2 + 2b_1 r^{2A}]^{5/2}} + \frac{C_2}{r^{A-4}}\right\} = 0$$

Поскольку r зависит от α_1 и α_3, фигурная скобка не должна содержать r, что возможно, если

$$A = -1, \quad b_1 = 0, \quad C_2 = 0 \qquad \text{или} \qquad A = 4, \quad C_1 = 0$$

При $A = -1$, $b_1 = C_2 = 0$ имеем $z + n = \alpha_1 r$, и вал переменного сечения является конусом, так что

$$\tau_{23} = \frac{C_1 r}{[r^2 + (z+n)^2]^2}$$

При $A = 4$, $C_1 = 0$ имеем $(z+n)\,r^4 = \alpha_1$.

Вал переменного сечения имеет очертание гиперболической поверхности и

$$\tau_{23} = C_2 r\sqrt{16(z+n)^2 + r^2}$$

Во втором случае, при $m = 0$ и $a_2 = +2$, должно быть

$$a_2 = 2a, \quad 2a_3 = a^2, \quad 2m_1 + \varepsilon_1 = 0, \quad 2n_1 + \omega_1 = 0, \quad 2am_1 + \varepsilon_2 + 2 = 0$$

$$2an_1 + \omega_1 - 3 = 0, \quad 2a + a^2 m_1 + 2\varepsilon_3 = 0, \quad 3a + a^2 n_1 - 2\omega_3 - 0$$

Складывая последние четыре равенства, находим

$$a^2 b_1 - 4b_3 + 2a = 0, \quad 2ab_1 - b_2 + 1 = 0$$

Поскольку

$$\theta = \frac{1}{2}[r^2 + (z+n)^2] - \frac{b_1}{2}, \quad \mu = \frac{C_1}{r^4}\exp\frac{ar^2}{4}, \quad \varphi = C_2\,(z+n)\exp\frac{a\,(z+n)^2}{4}$$

то

$$q = \frac{C\,(z+n)}{r^4}\,f^*\exp\frac{a\theta}{2}$$

Уравнение (2.5) принимает вид

$$f^{*\prime\prime} + \left(a + \frac{1}{2\theta + b_1}\right)f^{*\prime} + \frac{a}{4}\left(a + \frac{2}{2\theta + b_1}\right)f^* = 0$$

Легко установить, что частным решением этого уравнения будет $f_1^* = \exp\left(-\frac{a\theta}{2}\right)$, следовательно, общим решением будет

$$f^* = [C_1 (2\theta + b_1)^{3/2} + C_2] \exp\left(-\frac{a\theta}{2}\right)$$

Подставляя значение θ, для q находим

$$q = \frac{z+n}{r^4} \left\{ C_1 [r^2 + (z+n)^2] + C_2 \right\}$$

Поскольку $Z = \bar{n}_1 (z+n)^{-1}$ и $R = \bar{m}_1 r$, то $\delta = Ar/(z+n)$ и $\alpha_1 = Ar^2 + (z+n)^2$. Для ортогональных траекторий получаем $\alpha_3 r = (z+n)^A$. Уравнение (2.2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} \{ C_1 [r^2 + (z+n)^2] + C_2 \} = 0$$

Это уравнение будет удовлетворено, когда $A = 1$ или $A \neq 1$, но $C_1 = 0$.

При $A = 1$ имеем $\alpha_1 = r^2 + (z+n)^2$ — уравнение сферы и для нее

$$\tau_{23} = \frac{z+n}{r^3} \{ C_1 [r^2 + (z+n)^2] + C_2 \} \sqrt{r^2 + (z+n)^2}.$$

Поскольку $\tau_{23} = \infty$ при $r = 0$, найденное решение действительно для сферы с коническим вырезом или же для сферы с трещиной вдоль оси z.

При $A \neq 1$ имеем $\alpha_1 = Ar^2 + (r+n)^2$ — уравнение эллипсоида или гиперболоида в зависимости от знака A.

Для τ_{23} имеем

$$\tau_{23} = \frac{C_2 (z+n)}{r^3} \sqrt{A^2 r^2 + (z+n)^2}$$

Можно установить, что при $a_1 = 0$ решения не существует.

3. В случае цилиндрического стержня триортогональную систему образуют поверхности

$$\alpha_1 = f_1(x, y), \qquad \alpha_2 = f_2(x, y), \qquad \alpha_3 = z$$

и направляющие косинусы

$$n_1 = n_2 = l_3 = m_3 = 0$$

Это обстоятельство указывает, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

Для $g_{\nu\nu}$ имеем

$$g_{11} = \frac{1}{f_{1x}^2 + f_{1y}^2}, \qquad g_{22} = \frac{1}{f_{2x}^2 + f_{2y}^2}, \qquad g_{33} = 1$$

Из равенства (1.2) следует

$$\varphi = \frac{\mu(\alpha_1)}{f_{2x}^2 + f_{2y}^2}, \quad \text{так что} \quad \tau_{23} = \mu(\alpha_1) \sqrt{f_{1x}^2 + f_{1y}^2}$$

где $\mu(\alpha_1)$ — произвольная функция.

В силу удовлетворения уравнениям равновесия в декартовых координатах m_1 должно быть отрицательной величиной, так что для напряжений τ_{xz} и τ_{yz} находим

$$\tau_{xz} = f_{1y} \mu(\alpha_1), \qquad \tau_{yz} = -f_{1x} \mu(\alpha_1)$$

причем было принято во внимание условие ортогональности поверхностей f_1 и f_2.

Уравнения совместности принимают вид

$$(f_{1x}^3 + f_{1x} f_{1y}^2)\mu'' + (3 f_{1xx} f_{1x} + 2 f_{1xy} f_{1y} + f_{1x} f_{1yy})\mu' + (f_{1xxx} + f_{1xyy})\mu = 0$$

$$(f_{1y}^3 + f_{1y} f_{1x}^2)\mu'' + (3 f_{1yy} f_{1y} + 2 f_{1yx} f_{1x} + f_{1y} f_{1xx})\mu' + (f_{1yyy} + f_{1yxx})\mu = 0$$

Поскольку коэффициенты при μ, μ' и μ'' —функции α_1 и α_2, эти уравнения будут удовлетворены лишь в том случае, когда $\mu=\mathrm{const}$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 f_1)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 f_1)=0$$

откуда

$$\nabla^2 f_1 = \mathrm{const}$$

Итак, мы имеем решение Сен-Венана, но при этом триортогональная система остается не определенной.

4. В тех случаях, когда решения для вала переменного сечения или цилиндрического стержня в конечном виде найдено быть не может, оказывается целесообразным пользоваться методом потенциальной энергии. Для этой цели необходимо хотя бы приближенно отыскать функцию $\alpha_1=f_1(x, y, z)$ путем сравнения со стержнем других сечений, но близко подходящих по форме к рассматриваемому стержню, для которых решения уже известны, или прибегнуть к аналогиям. Подобрав должным образом α_1, в случае, например, вала переменного сечения определяем $\alpha_3=f_3(r, z)$ и, пользуясь соотношением (1.2), находим

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2)=\frac{g_{22}}{g_{33}}\varphi(\alpha_1, \alpha_3)=\frac{r^2}{(1+\alpha_2^2)^2}(f_{3r}^2+f_{3z}^2)\,\varphi(\alpha_1, \alpha_3)=$$

$$=\frac{F(\alpha_1, \alpha_3)}{(1+\alpha_2^2)^2}\,\mu(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_1, \alpha_3)=\frac{\mu(\alpha_1)}{(1+\alpha_2^2)^2}$$

поскольку функция φ произвольная.

Таким образом τ_{23} пропорционально $\mu(\alpha_1)$. К аналогичному результату приходим при рассмотрении цилиндрического стержня. Задаваясь $\mu(\alpha_1)$ в виде степенного ряда относительно α_1, дальнейшее разрешение задачи является очевидным.

Поступила в редакцию
14 VIII 1944

B. A. SOKOŁOW.—PROBLEMS OF ELASTIC TORSION OF BARS

The axis of a bar is taken as z axis of Decartes coordinate system (x, y, z). Simultaneously the author uses a curvilinear three-orthogonal system with the coordinate surfaces $\alpha_i=\mathrm{const}$ $(i=1, 2, 3)$. The surface of the bar is supposed to be one of the coordinate surfaces $\alpha_1=\mathrm{const}$ and to be free of external forces,

The trajectories of tangential stresses are supposed to be the generatives of the family of coordinate surfaces $\alpha_1=\mathrm{const}$. The twisting moments are applied to the butt-ends $\alpha_3=\mathrm{const}$. Then $\sigma_1=\sigma_3=\tau_{12}=\tau_{23}=0$.

From one equation of equilibrium it follows that $\sigma_2=0$. The other two equations are reduced to the form (1.1).

The general solution of these equations represents a great deal of difficulty.

For a bar of variable shape the equation of deformation have the form (2.1) and the first equations of (2.1) can be reduced to Eq. (2.2) where $\delta=f_{1r}/f_{1z}$, $\alpha_1=f_1(r, z)$ and g is a function of r and z.

Assuming $\delta=RZ$, where $R=R(r)$ and $Z=Z(z)$ the author obtains the solution in a closed form for a few particular cases.

ЛИТЕРАТУРА

1. Треффц Е. Математическая теория упругости. ОНТИ. 1934.
2. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз. 1939.