Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЛИННЫХ ВОЛН В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

И. А. КИБЕЛЬ

(Москва)

Рассмотрим стационарное движение идеальной сжимаемой жидкости, происходящее одинаково во всех плоскостях, параллельных одной, каковую примем за плоскость xy.

Будем считать, что наша жидкость ограничена волнистой стенкой и свободной поверхностью (или двумя стенками).

Пусть граница уходит по оси x в обе стороны на бесконечность, причем ее «волнистость» такова, что возвышения над осью x всюду плавны и их размеры вдоль оси x («горизонтальной» оси) малы по сравнению с размерами вдоль оси y («вертикальная» ось).

Такие случаи представляются, например, в газовой динамике в задаче о движении газа в сопле, если последнее вытянуто и имеет плавные очертания; к этому сводится также, например, задача о движении воздуха, переваливающего через горный хребет, если сечение хребта будет достаточно плавным. Уравнения гидродинамики удобно представить здесь в виде

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1}$$

$$\varepsilon\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho y}{\partial y}=0 \tag{3}$$

$$u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+v\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=0 \tag{4}$$

где ε — безразмерная дробь, дающая квадрат отношения характерной высоты к характерной длине, $x/\sqrt{\varepsilon}$ и y — координаты, u и $\sqrt{\varepsilon}\,v$ — составляющие скоростей по осям x и y соответственно, p — давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, наконец,

$$\vartheta=\frac{1}{\rho}\,p^{\frac{1}{k}} \tag{5}$$

(если движение — адиабатическое, то $k=c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей).

Для несжимаемой жидкости можно положить $k=\infty$, $\vartheta=1/\rho=\text{const}$. При этом получим обычные уравнения длинных волн в несжимаемой жидкости, если положим в уравнениях еще $\varepsilon=0$. Давление окажется линейной функцией от y

$$p = -g\rho y + f(x)$$

где $f(x)$ — функция одного x; зависимость u и v от y может быть явно определена, зависимость же всех величин от x найдется параметрически.

То же самое можно сказать и относительно всякой баротропной жидкости, когда плотность зависит лишь от давления $\rho = \rho(p)$, так как в этом случае

$$P = -gy + f(x), \quad \text{где} \quad P = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

Однако в случае жидкости бароклинной к уравнению (2) квадратуры непосредственно не применимы.

Чтобы построить решение по методу длинных волн, надо подвергнуть сперва уравнения гидродинамики некоторым преобразованиям. Преобразования, о которых здесь идет речь, применимы к общему случаю, и при их проведении нет необходимости заранее полагать $\varepsilon = 0$. Прежде всего, из уравнения (3) заключаем о существовании функции ψ (функция тока) такой, что

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6}$$

Тогда по (4) функция ϑ зависит лишь от ψ. Умножая уравнение (1) на u, уравнение (2) на v и складывая их, получим после простых преобразований закон Бернулли

$$\frac{u^2 + \varepsilon v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \vartheta p^{\frac{k-1}{k}} + gy = i_0(\psi) \tag{7}$$

где i_0 — новая функция одного лишь ψ. Уравнения (1) и (2) дадут затем

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} = \rho \left(\frac{di_0}{d\psi} - \frac{k}{k-1} p^{\frac{k-1}{k}} \frac{d\vartheta}{d\psi} \right) \tag{8}$$

Вместо независимых переменных x и y введем $\xi = x$ и ψ. Уравнения (5) и (7) будут теперь писаться попрежнему. Уравнения (6) дадут (см., например, Розе, Кочин, Кибель, Теоретическая гидродинамика, ч. II)

$$\rho u \frac{\partial y}{\partial \psi} = 1, \qquad u \frac{\partial y}{\partial \xi} = v \tag{9}$$

Уравнение (8) преобразуется к виду

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{g}{u} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \tag{10}$$

Здесь ϑ и i_0 — заданные функции от ψ, вид которых определяется из условий на бесконечности.

Если теперь положить $\varepsilon = 0$ (первый член разложения в ряд по ε !), то придем к уравнениям

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1} \vartheta(\psi) p^{\frac{k-1}{k}} + gy = i_0(\psi), \qquad \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{g}{u} = 0 \tag{11}$$

которые вместе с уравнениями (5) и (9) решают задачу о длинных волнах в сжимаемой жидкости.

Однако, в то время как в случае баротропной, а в частности, несжимаемой жидкости давление определялось в функциях от y одними квадратурами, теперь для нахождения p в функциях от ψ будет служить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

Чтобы установить это, исключим u из первого уравнения (11) с помощью второго (мы полагаем сперва $g \neq 0$). Получим

$$\frac{1}{2} g^2 \frac{1}{(\partial p / \partial \psi)^2} + \frac{k}{k-1} \vartheta p^{\frac{k-1}{k}} + gy = i_0 \tag{12}$$

Но из первого уравнения (9), соотношения (5) и второго соотношения (11) имеем

$$g \frac{\partial y}{\partial \psi} = -\vartheta p^{-\frac{1}{k}} \frac{\partial p}{\partial \psi} \tag{13}$$

Дифференцируя (12) по ψ и исключая с помощью (13) $\partial y / \partial \psi$, получим

$$\frac{1}{2} g^2 \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{1}{(\partial p / \partial \psi)^2} + \frac{k}{k-1} \frac{d\vartheta}{d\psi} p^{\frac{k-1}{k}} = \frac{di_0}{d\psi} \tag{14}$$

Уравнение это не содержит дифференцирования по ξ. Это и есть уравнение, о котором мы говорили.

Зависимость p от ξ найдется из краевых условий задачи.

Если движение происходит вдоль заданного контура (например, воздух переваливает через горный хребет, сечение которого задано), уравнение которого будет

$$y = y_0(\xi)$$

то, не ограничивая общности, можно считать, что на контуре $\psi = 0$, так что

$$y(\xi, 0) = y_0(\xi)$$

и одно из краевых условий задачи согласно уравнению (12) примет вид

$$\frac{1}{2} g^2 \left(\frac{1}{(\partial p / \partial \psi)^2} \right)_{\psi=0} + \frac{k}{k-1} \vartheta(0) \left(p^{\frac{k-1}{k}}\right)_{\psi=0} + g y_0(\xi) = i_0(0)$$

Второе краевое условие получим, привлекая к рассмотрению верхнюю стенку или свободную поверхность, или условие при $y \to \infty$. Например, если на свободной поверхности $\psi = \psi_0$, то $p(\xi, \psi_0) = 0$.

Как только p будет найдено, y найдется сразу же из уравнения (12), u — из уравнений (11), наконец, v — из уравнений (9). Задача будет решена.

Мы упоминали о том, что ϑ и i_0 надо считать известными функциями от ψ. Вид этих функций можно определить из условий на бесконечности.

Так, достаточно задать при $z = -\infty$ распределение скоростей и температур. Пусть, например, будет

$$y(-\infty, \psi) = Y, \qquad u(-\infty, \psi) = u_1(Y), \qquad T(-\infty, \psi) = \left(\frac{p}{R\rho}\right)_{\xi=-\infty} = T_1(Y)$$

где R — газовая постоянная. Тогда, если обозначить

$$p(-\infty, \psi) = p_1(Y), \qquad \rho(-\infty, \psi) = \rho_1(Y)$$

будем иметь

$$p_1 = p_{10} \exp\left\{ -\frac{g}{R} \int_0^Y \frac{dY}{T_1(Y)} \right\}, \qquad \psi = \int_0^Y \frac{p_1}{RT_1} u_1 \, dY$$

где p_{10} — постоянная. Последнее уравнение позволяет найти Y в функциях от ψ, а тогда ϑ и i_0 определятся по формулам

$$\vartheta = \frac{1}{\rho_1} p_1^{\frac{1}{k}}, \qquad i_0 = \frac{u_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT_1 + gY$$

Уравнение (14) решается сразу в ряде случаев, например, когда i_0 и ϑ суть линейные функции от ψ.

В задачах газовой динамики надо положить $g = 0$, и тогда из (10) получаем при $\varepsilon = 0$, что $\partial p / \partial\psi = 0$, т. е. что $p = p_0(\xi)$.

Теперь по (12) при $g = 0$ получим u в виде

$$u = u_0 = \pm \sqrt{2i_0(\psi) - \frac{2k}{k-1} \vartheta(\psi) p_0^{\lambda}(\xi)} \qquad \left(\lambda = \frac{k-1}{k}\right)$$

где i_0 и ϑ — попрежнему заданные функции от ψ.

Уравнение (9) позволит затем найти y в виде

$$y = \pm \int_0^{\psi} \frac{\vartheta}{u_0} p_0^{-\frac{1}{k}} d\psi + A(\xi)$$

Две произвольные функции интегрирования $p_0(\xi)$ и $A(\xi)$ найдутся из краевых условий.

Например, если движение газа происходит в сопле, симметричном относительно оси x, так что уравнение контура сопла имеет вид $y = \pm y_0(\xi)$, то $A(\xi) \equiv 0$ (линия тока $\psi = 0$ совпадает с осью x) и $p_0(\xi)$ найдется из уравнения

$$y_0(\xi) = \int_0^{\psi_0} \vartheta p_0^{-\frac{1}{k}} \left(2i_0 - \frac{2k}{k-1} \vartheta p_0^{\frac{k-1}{k}}\right)^{-\frac{1}{2}} d\psi$$

где $\psi = \psi_0$ отвечает «верхней» стенке ($\psi = -\psi_0$ — на нижней стенке).

Решение, полученное таким образом, можно принять за первое приближение и искать затем разложение в ряд по параметру ε. Все члены такого разложения (начиная с члена при ε в первой степени) будут находиться совершенно элементарно, квадратурами и дифференцированием.

Поступила в редакцию
18 VIII 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

I. A. KIEBEL.—APPLICATION OF THE METHOD OF LONG WAVES TO A COMPRESSIBLE FLUID

In the case of a stationary motion of a heavy barotropic (in particular incompressible) fluid the long-wave method gives the pressure in functions of the height by means of the simple quadratures. For the barocline fluid the method of long waves can not be applied directly.

The author first shows how the equations of hydrodynamics must be transformed, after which the pressure is determined by an ordinary differential equation of the second order.

The author then shows how this equation can be solved in the problem of flow past mountain chains and in certain questions of gas dynamics.