

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В. С. ТАТАРЕНЧИК

(Москва)

В работе рассматриваются некоторые простейшие течения сжимаемой жидкости, соответствующие точным решениям уравнений газовой динамики и аналогичные течениям несжимаемой жидкости¹.

На этих простых течениях можно проследить процесс перехода газового потока через скорость звука, а также дальнейшее поведение его при сверхзвуковых скоростях. Аналогия с течениями несжимаемой жидкости дает возможность установить изменения в структуре потока, появляющиеся при возрастании скорости.

В работе приняты следующие основные обозначения:

W — модуль вектора скорости,	ρ_0 — плотность покоящегося газа,
θ — угол наклона вектора скорости к оси x ,	a — скорость звука,
u — проекция скорости на ось x ,	a^* — критическая скорость (скорость потока, равная местной скорости звука),
v — проекция скорости на ось y ,	λ — относительная скорость,
p — давление,	M — число Маха
ρ — местная плотность,	

Остальные обозначения будут оговорены.

1. Уравнения движения сжимаемой и несжимаемой жидкости в плоскости годографа скорости. Плоское безвихревое установившееся движение идеальной сжимаемой жидкости определяется:

двумя динамическими уравнениями Эйлера

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.1)$$

уравнением неразрывности

$$\frac{\partial(u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

условием отсутствия вихрей

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

и уравнением адиабаты

$$\frac{p}{\rho_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \quad (1.4)$$

¹ Подобные течения при дозвуковых скоростях были рассмотрены С. А. Чаплыгиным в работе «О газовых струях», 1904. Все ссылки на С. А. Чаплыгина в дальнейшем относятся именно к этой работе.

Производя дифференцирование в уравнении (1.2) и исключая $\partial\rho/\partial x$ и $\partial\rho/\partial y$ с помощью (1.1), получим

$$(u^2 - a^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2uv \frac{\partial u}{\partial y} + (v^2 - a^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

Если произвести в уравнениях (1.3) и (1.5) замену переменных, приняв за независимые переменные модуль относительной скорости λ и угол ее наклона θ , а в качестве неизвестных функции потенциала φ и тока ψ , определяемые соотношениями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{u}{a^*}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{v}{a^*}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{v}{a^*}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{a^*} \quad (1.6)$$

то получится система уравнений Чаплыгина

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \frac{M^2 - 1}{\lambda} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\rho_0}{\rho} \lambda \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \quad (1.7)$$

определяющая движение в плоскости годографа скорости.

Величины ρ_0/ρ , M и λ связаны соотношениями

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad M^2 = \frac{2}{k+1} \frac{\lambda^2}{1 - (k-1)/(k+1) \lambda^2} \quad (1.8)$$

Уравнения движения несжимаемой жидкости в плоскости годографа скорости будут иметь вид

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\theta} = \bar{\lambda} \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\lambda} \quad (1.9)$$

Эту систему можно получить из (1.7) предельным переходом при $M \rightarrow 0$.

2. Область существования течения сжимаемой жидкости. Для того чтобы решение системы (1.7) при переходе в плоскость x, y давало течение, определяемое уравнениями (1.1)–(1.4), необходимо, чтобы якобиан

$$\Delta = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\lambda, \theta)} \neq 0$$

что вытекает также из условия ограниченности производных $\partial\lambda/\partial x$, $\partial\lambda/\partial y$, $\partial\theta/\partial x$ и $\partial\theta/\partial y$; так например,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\lambda}{\Delta} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \cos\theta + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \sin\theta \right)$$

Подобные выражения получаются и для остальных производных.

Пользуясь системой (1.7), якобиан Δ можно представить в виде

$$\Delta = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\lambda, \theta)} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1}{\lambda} \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 (M^2 - 1) \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right)^2 \right]$$

Следовательно, граница области существования течения или «линия, разрыва» определяется уравнением

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 (M^2 - 1) \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right)^2 = 0 \quad (2.1)$$

При $M < 1$ якобиан Δ в нуль обратиться не может.

Следовательно, решение системы (1.7) в дозвуковой области всегда дает действительное течение. Условием перехода непрерывного безвихревого течения от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым является неравенство $\partial\psi/\partial\theta \neq 0$, которое означает, что линия тока не должна быть ортогональна к линии $\lambda = 1$.

Если это условие не выполняется, как, например, на линии симметрии потока, то для осуществления перехода в сверхзвуковую область и в этом случае необходимо, чтобы величина $\partial\psi/\partial\theta$ при подходе к точке перехода была порядка $(1 - M^2)^{-1}$. Если s — длина дуги линии $\lambda = \text{const}$, то

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial s} \frac{ds}{d\theta}$$

Так как линия $\lambda = 1$ не является в данном случае линией тока, то $\partial\psi/\partial s \neq 0$. Поэтому предыдущее требование равносильно тому, чтобы величина $d\theta/ds$ при подходе к точке перехода была порядка $1 - M^2$.

Уравнению (2.1), определяющему в сверхзвуковой области линию разрыва, можно дать геометрическое истолкование. Вычисления дают

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\lambda}{D(\lambda, \theta)} \left(-\cos\theta \frac{\partial\lambda}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial\lambda}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\lambda}{D(\lambda, \theta)} \frac{\rho}{\rho_0} \left(\sin\theta \frac{\partial\lambda}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial\lambda}{\partial x} \right)$$

Отсюда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\rho_0}{\rho} \operatorname{tg} \left(\theta - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\partial\lambda/\partial y}{\partial\lambda/\partial x} \right) \frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

Угол Маха α определяется соотношением $\sin \alpha = \frac{1}{M}$

Подставляя найденные величины в уравнение (2.1), можно получить

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\partial\lambda/\partial y}{\partial\lambda/\partial x} = \theta \pm \alpha \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.2)$$

Это значит, что при приближении к линии разрыва касательная к линии $\lambda = \text{const}$ будет стремиться к одной из линий Маха.

Аналогично можно показать, что линии $\theta = \text{const}$ также будут касаться той же линии Маха.

3. Частные решения. Рассмотрим решения системы (1.7) и (1.9) вида¹

$$\varphi = \varphi_\lambda(\lambda) \varphi_\theta(\theta), \quad \psi = \psi_\lambda(\lambda) \psi_\theta(\theta); \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_\lambda(\bar{\lambda}) \bar{\varphi}_\theta(\bar{\theta}), \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_\lambda(\bar{\lambda}) \bar{\psi}_\theta(\bar{\theta}) \quad (3.1)$$

Подставляя в уравнения (1.7) и (1.9), разделяя переменные и приравнявая части равенств постоянным, получим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_\lambda' = m \frac{1-M^2}{\lambda} \frac{\rho_0}{\rho} \varphi_\lambda, \quad \psi_\lambda' = n \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{\rho_0} \varphi_\lambda, \quad \varphi_\theta' = n \psi_\theta, \quad \psi_\theta' = -m \varphi_\theta \quad (3.2)$$

$$\bar{\varphi}_\lambda' = m \frac{1}{\bar{\lambda}} \bar{\varphi}_\lambda, \quad \bar{\psi}_\lambda' = n \frac{1}{\bar{\lambda}} \bar{\varphi}_\lambda', \quad \bar{\varphi}_\theta' = n \bar{\psi}_\theta, \quad \bar{\psi}_\theta' = -m \bar{\varphi}_\theta \quad (3.2)$$

определяющих функции $\varphi_\lambda, \varphi_\theta, \psi_\lambda, \psi_\theta, \bar{\varphi}_\lambda, \bar{\varphi}_\theta, \bar{\psi}_\lambda, \bar{\psi}_\theta$:

¹ Решения этого типа были рассмотрены С. А. Чаплыгиным.

Сравнение систем (3.2) и (3.3) показывает, что для решений данного типа зависимость функций потенциала и тока от угла θ одинакова для сжимаемой и несжимаемой жидкости, т. е. при одинаковых начальных данных и равных значениях параметров m и n

$$\varphi_0(\theta) = \bar{\varphi}_0(\bar{\theta}), \quad \psi_0(\theta) = \bar{\psi}_0(\bar{\theta}) \quad (3.4)$$

Это обстоятельство дает возможность ожидать, что общий характер течения сжимаемой и несжимаемой жидкости [в данном случае будет одинаков, и позволяет для предварительного ознакомления с течением сжимаемой жидкости брать течение несжимаемой, соответствующее тем же значениям параметров m и n .

Кроме того, для перехода в плоскость x, y имеем соотношения: для сжимаемой жидкости

$$dx = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{\lambda} d\psi, \quad dy = \frac{\sin \theta}{\lambda} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{\lambda} d\psi \quad (3.5)$$

для несжимаемой жидкости

$$d\bar{x} = \frac{\cos \bar{\theta}}{\bar{\lambda}} d\bar{\varphi} - \frac{\sin \bar{\theta}}{\bar{\lambda}} d\bar{\psi}, \quad d\bar{y} = \frac{\sin \bar{\theta}}{\bar{\lambda}} d\bar{\varphi} + \frac{\cos \bar{\theta}}{\bar{\lambda}} d\bar{\psi} \quad (3.6)$$

Вдоль линий равной скорости имеем:

для сжимаемой жидкости

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\varphi_\lambda}{\lambda} \varphi_0' \cos \theta - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\psi_\lambda}{\lambda} \psi_0' \sin \theta = A(\lambda) \varphi_0' \cos \theta - B(\lambda) \psi_0' \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{\varphi_\lambda}{\lambda} \varphi_0' \sin \theta + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\psi_\lambda}{\lambda} \psi_0' \cos \theta = A(\lambda) \varphi_0' \sin \theta + B(\lambda) \psi_0' \cos \theta$$

для несжимаемой жидкости

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{\theta}} = \frac{\bar{\varphi}_\lambda}{\bar{\lambda}} \bar{\varphi}_0' \cos \bar{\theta} - \frac{\bar{\psi}_\lambda}{\bar{\lambda}} \bar{\psi}_0' \sin \bar{\theta} = \bar{A}(\bar{\lambda}) \bar{\varphi}_0' \cos \bar{\theta} - \bar{B}(\bar{\lambda}) \bar{\psi}_0' \sin \bar{\theta}$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{\theta}} = \frac{\bar{\varphi}_\lambda}{\bar{\lambda}} \bar{\varphi}_0' \sin \bar{\theta} + \frac{\bar{\psi}_\lambda}{\bar{\lambda}} \bar{\psi}_0' \cos \bar{\theta} = \bar{A}(\bar{\lambda}) \bar{\varphi}_0' \sin \bar{\theta} + \bar{B}(\bar{\lambda}) \bar{\psi}_0' \cos \bar{\theta}$$

Отсюда получаем для линий равной скорости

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\theta + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{B}{A} \frac{\psi_0'}{\varphi_0'} \right), \quad \text{или} \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{dy}{dx} - \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{B}{A} \frac{\psi_0'}{\varphi_0'} \right)$$

Аналогично получим

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} - \bar{\theta} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{B}}{\bar{A}} \frac{\bar{\psi}_0'}{\bar{\varphi}_0'} \right)$$

Таким образом, пользуясь (3.4), найдем

$$\frac{\operatorname{tg} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} (dy/dx) - \theta]}{\operatorname{tg} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} (d\bar{y}/d\bar{x}) - \bar{\theta}]_{\bar{\theta}=\theta}} = \frac{\bar{A}(\bar{\lambda}) B(\lambda)}{\bar{B}(\bar{\lambda}) A(\lambda)} \quad (3.7)$$

т. е. в течениях, отвечающих решениям данного типа, отношение тангенсов углов между направлением касательной к линии равной скорости и самой скоростью в сжимаемой и несжимаемой жидкости зависит лишь от величины скорости и постоянно вдоль линий равной скорости.

4. Частные решения для некоторых значений параметров m и n .

1. *Случай* $m=0$, $n \neq 0$. Течение несжимаемой жидкости, соответствующее этому случаю, является простым вихрем. Комплексный потенциал течения в плоскости $\bar{\lambda}\bar{\theta}$ будет иметь вид

$$f = in \ln(\bar{\lambda} \exp - i\bar{\theta}) \quad (4.1)$$

Соответствие между плоскостями $\bar{\lambda}\bar{\theta}$ и \bar{z} устанавливается соотношением

$$\bar{z} = \bar{x} + i\bar{y} = -in \frac{1}{\lambda} \exp i\bar{\theta} \quad (4.2)$$

В сжимаемой жидкости имеем

$$\varphi = n\theta, \quad \psi = n \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{\rho_0} d\lambda \quad (4.3)$$

Переход в плоскость xy осуществляется по уравнениям

$$dx = \frac{\cos \theta}{\lambda} n d\theta - \frac{\sin \theta}{\lambda^2} n d\lambda, \quad dy = \frac{\sin \theta}{\lambda} n d\theta + \frac{\cos \theta}{\lambda^2} n d\lambda$$

Интегрируя и представляя в комплексной форме, получим такой же результат, как и для несжимаемой жидкости:

$$z = x + iy = -ni \frac{1}{\lambda} \exp i\theta \quad (4.4)$$

Течение является простым вихрем и существует при всех скоростях, физически возможных, так как

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\lambda, \theta)} = -n^2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1}{\lambda} \neq 0$$

2. *Случай* $m \neq 0$, $n=0$. Течение несжимаемой жидкости является простым источником. Комплексный потенциал его в плоскости $\bar{\lambda}\bar{\theta}$ имеет вид

$$f = m \ln(\bar{\lambda} \exp - i\bar{\theta}) \quad (4.5)$$

Соответствие между плоскостями z и $\bar{\lambda}\bar{\theta}$ устанавливается соотношением

$$\bar{z} = -m \frac{1}{\lambda} \exp i\bar{\theta} \quad (4.6)$$

Для сжимаемой жидкости имеем

$$\varphi = m \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1-M^2}{\lambda} \frac{\rho_0}{\rho} d\lambda, \quad \psi = -m\theta \quad (4.7)$$

Переход в плоскость xy производится по уравнению

$$z = -m \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\lambda} \exp i\theta \quad (4.8)$$

Течение является простым источником; в сверхзвуковую область не переходит, так как

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\lambda, \theta)} = -m^2 \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1-M^2}{\lambda}$$

обращается в нуль при $M=1$.

3. *Случай* $mn = p^2 \neq 0$. Комплексный потенциал течения несжимаемой жидкости этого случая в плоскости годографа скорости имеет вид

$$f = (\bar{\lambda} \exp - i\theta)^p \quad (4.9)$$

Переход в плоскость течения z производится согласно соотношению

$$\bar{z} = A (\bar{\lambda} \exp - i\theta)^{p-1} \quad (4.10)$$

Так что в плоскости \bar{z} комплексный потенциал примет вид

$$f = B \bar{z}^{\frac{p}{p-1}}$$

Здесь A и B — постоянные, а $p \neq 1$. В сжимаемой жидкости функции φ_λ и ψ_λ определяются первыми двумя уравнениями системы (3.2). Для решения удобно, следуя С. А. Чаплыгину, ввести вместо скорости λ величину

$$\tau = \frac{k-1}{k+1} \lambda^2$$

Осуществив эту подстановку, дифференцируя второе уравнение системы (3.2) и исключая функцию φ_λ , получим уравнение относительно ψ_λ

$$\tau^2 (1-\tau) \frac{d^2 \psi_\lambda}{d\tau^2} + \left(1 + \frac{2-k}{k-1} \tau\right) \tau \frac{d\psi_\lambda}{d\tau} - \frac{p^2}{4} \left(1 - \frac{k+1}{k-1} \tau\right) \psi_\lambda = 0 \quad (4.11)$$

Это уравнение можно привести к гипергеометрическому подстановкой

$$\psi_\lambda = \tau^{\frac{3p}{2}} y$$

как это сделано С. А. Чаплыгиным. Если проделать эту подстановку, то

$$\tau(1-\tau)y'' + \left[p+1 + \left(\frac{2-k}{k-1} - p\right)\tau\right]y' + \frac{p}{2} \frac{p+1}{k-1} y = 0 \quad (4.12)$$

Обычно гипергеометрическое уравнение принято писать в форме

$$\tau(1-\tau)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\tau]y' - \alpha\beta y = 0 \quad (4.13)$$

Сравнивая коэффициенты у соответствующих членов, получим

$$\gamma = p+1, \quad \alpha + \beta = p - \frac{1}{k-1}, \quad \alpha\beta = -\frac{p}{2} \frac{p+1}{k-1}$$

Замечая, что α и β являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - \left(p - \frac{1}{k-1}\right)x - \frac{p}{2} \frac{p+1}{k-1} = 0$$

найдем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2(k-1)} (p(k-1) - 1 + \sqrt{p^2(k^2-1) + 1}) \\ \beta &= \frac{1}{2(k-1)} (p(k-1) - 1 - \sqrt{p^2(k^2-1) + 1}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Одно из решений уравнения (4.13), отнесенное к точке $\tau=0$, имеет вид

$$y = F(\alpha, \beta, \gamma, \tau) = 1 + \frac{\alpha^3}{\gamma} \tau + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2! \gamma(\gamma+1)} \tau^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3! \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \tau^3 + \dots$$

Возвращаясь к функции ψ_λ , получим

$$\psi_\lambda = \tau^{\frac{3p}{2}} \left(1 + \frac{\alpha^3}{\gamma} \tau + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2! \gamma(\gamma+1)} \tau^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3! \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \tau^3 + \dots\right) \quad (4.15)$$

Функция φ определится из второго уравнения системы (3.2). Ряд, с помощью которого определяется решение, сходится при $|\tau| < 1$, если только γ не равна нулю или целому отрицательному числу. Мы всегда будем иметь $|\tau| < 1$, так как $\tau = 1$ соответствует максимально возможной скорости.

Функции ψ_0 и φ_0 определяются из второй пары уравнений (3.2). Дифференцируя четвертое уравнение по θ и исключая функцию φ_0' , получим

$$\psi_0'' + p^2 \psi_0 = 0 \quad (4.16)$$

Отсюда

$$\psi_0 = c_1 \cos p\theta + c_2 \sin p\theta \quad (4.17)$$

Функция φ_0 определится из четвертого уравнения (3.2).

5. Пример. Обтекание прямого угла. Комплексный потенциал течения несжимаемой жидкости, обтекающей прямой угол, имеет вид

$$f = \bar{z}^2$$

Следовательно, течение сжимаемой жидкости, аналогичное данному, определяется системой (3.2) при значении параметра

$$p = \sqrt{mn} = 2$$

Параметры α , β и γ , входящие в коэффициенты ряда (4.15), будут равны при $k = 1.4$

$$\alpha = 2.5, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 3$$

Подставляя эти значения, получим

$$\psi_\lambda = \tau - 2.5\tau^2 + 2.1875\tau^3 - 0.65625\tau^4 \quad (5.1)$$

Для функции ψ_0 положим в (4.17) постоянные $c_1 = 0$, $c_2 = -2$

$$\psi_0 = -2 \sin 2\theta \quad (5.2)$$

При определении функций φ_λ и φ_0 будем считать $n = 1$. Из второго и четвертого уравнений получаем

$$\varphi_\lambda = \frac{1}{(1-\tau)^2 \sqrt{1-\tau}} (2\tau - 10\tau^2 + 13.125\tau^3 - 5.25\tau^4), \quad \varphi_0 = \cos 2\theta \quad (5.3)$$

Таким образом

$$\varphi = C \cos 2\theta \frac{1}{(1-\tau)^2 \sqrt{1-\tau}} (2\tau - 10\tau^2 + 13.125\tau^3 - 5.25\tau^4) \quad (5.4)$$

$$\psi = -2C \sin 2\theta (\tau - 2.5\tau^2 + 2.1875\tau^3 - 0.65625\tau^4)$$

Здесь C — произвольное постоянное. Соответствие между плоскостями $\lambda\theta$ и xu будем устанавливать вдоль линии $\lambda = \text{const}$. Формулы (3.5) примут вид

$$dx = \left[-2C \frac{\varphi}{\lambda} \cos \theta \sin 2\theta + 4C \frac{\psi_0}{\rho} \frac{\psi_\lambda}{\lambda} \sin \theta \cos 2\theta \right] d\theta$$

$$dy = \left[-2C \frac{\varphi_\lambda}{\lambda} \sin \theta \sin 2\theta - 4C \frac{\psi_0}{\rho} \frac{\psi_\lambda}{\lambda} \cos \theta \cos 2\theta \right] d\theta$$

Интегрируя в пределах от 0 до θ , получим

$$\begin{aligned}x - x_0 &= -2C \frac{\varphi_\lambda}{\lambda} \frac{2}{3} (1 - \cos^3 \theta) + 4C \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\psi_\lambda}{\lambda} \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos^3 \theta - \frac{1}{3} \right) \\y - y_0 &= -2C \frac{\varphi_\lambda}{\lambda} \frac{2}{3} \sin^3 \theta + 4C \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\psi_\lambda}{\lambda} \left(\frac{2}{3} \sin^3 \theta - \sin \theta \right)\end{aligned}$$

Полагая $x=0$ при $\theta = \pm \frac{1}{3}\pi$, $y=0$ при $\theta=0$, найдем

$$x_0 = \frac{4}{3} C \frac{\varphi_\lambda}{\lambda} \left(1 + \frac{\rho_0}{\rho} \right), \quad y_0 = 0$$

Таким образом после небольших преобразований

$$\begin{aligned}x &= 4C \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\lambda} \left[\frac{2}{3} \left(\tau \frac{d\psi_\lambda}{d\tau} - \psi_\lambda \right) \cos^3 \theta + \psi_\lambda \cos \theta \right] \\y &= -4C \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\lambda} \left[\frac{2}{3} \left(\tau \frac{d\psi_\lambda}{d\tau} - \psi_\lambda \right) \sin^3 \theta + \psi_\lambda \sin \theta \right]\end{aligned} \quad (5.5)$$

Линия разрыва течения определится из уравнения (2.4) после подстановки значений φ и ψ . Получим

$$\sin 2\theta = 2 \frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{M^2 - 1} \frac{\psi_\lambda}{\varphi_\lambda} \left[1 + 4 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 (M^2 - 1) \left(\frac{\psi_\lambda}{\varphi_\lambda} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

На линии тока

$$\psi_\lambda \sin 2\theta = C = \text{const}$$

разрыв наступает при скорости, удовлетворяющей соотношению

$$\psi_\lambda^2 \left[4 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 (M^2 - 1) \psi_\lambda^2 \right] \left[\varphi_\lambda^2 + 4 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 (M^2 - 1) \psi_\lambda^2 \right]^{-1} = C^2 \quad (5.6)$$

Вдоль линии тока $C=0$ течение в сверхзвуковую область не переходит. На фиг. 1 дана картина течения.

6. Пример. Течение с комплексным потенциалом $f = \bar{z}^{\frac{1}{2}}$. Линии тока этого течения суть параболы, симметричные относительно оси x . Линии равных скоростей — окружности, а линии равных углов наклона скорости — прямые, исходящие из начала координат.

Функция тока течения сжимаемой жидкости определится уравнениями (4.11) или (4.12) и (4.17) при значении $p = -1$. Уравнение (4.12) примет вид

$$(1 - \tau) y'' + \frac{1}{k-1} y' = 0 \quad (6.1)$$

Общее решение этого уравнения будет

$$y = a_1 (1 - \tau)^{\frac{k}{k-1}} + a_2$$

Отсюда

$$\psi_\lambda = \tau^{-\frac{1}{2}} y = \frac{a_1}{\sqrt{\tau}} (1 - \tau)^{\frac{k}{k-1}} + \frac{a_2}{\sqrt{\tau}} = \frac{1}{\lambda} \left[b_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} + b_2 \right] \quad (6.2)$$

Для функции ψ_0 имеем согласно (4.17)

$$\psi_0 = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta \quad (6.3)$$

Функции φ_λ и φ_θ определяются из второго и четвертого уравнений системы (1.3). Опять полагаем $n = 1$.

$$\varphi_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \left[b_1 (1 + \lambda^2) + b_2 \frac{\rho_0}{\rho} \right], \quad \varphi_\theta = C_1 \sin \theta - C_2 \cos \theta \quad (6.4)$$

Рассмотрим частные случаи.

а. При $b_1 = 0, b_2 = 1, C_1 = 0, C_2 = 1$

$$\varphi = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho_0}{\rho} \cos \theta, \quad \psi = \frac{1}{\lambda} \sin \theta \quad (6.5)$$

Для перехода в плоскость xy имеем вдоль линии $\lambda = \text{const}$

$$dx = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\rho_0}{\rho} \sin 2\theta d\theta,$$

$$dy = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\rho_0}{\rho} \cos 2\theta d\theta$$

Интегрируя в пределах от $\frac{1}{2}\pi$ до θ , получим

$$x - x_0 = \frac{1}{2\lambda^2} \frac{\rho_0}{\rho} (1 + \cos 2\theta),$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\rho_0}{\rho} \sin 2\theta$$

Отсюда

$$[x - (x_0 + R)]^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\left(R = \frac{1}{2\lambda^2} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \quad (6.6)$$

Для определения x_0 и y_0 построим линию $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Вдоль этой линии

$$dx_0 = \frac{1}{\lambda^3} \frac{\rho_0}{\rho} d\lambda, \quad dy_0 = 0; \quad \text{отсюда } x_0(\lambda) = x_0(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{\lambda^3} \frac{\rho_0}{\rho} d\lambda \quad (6.7)$$

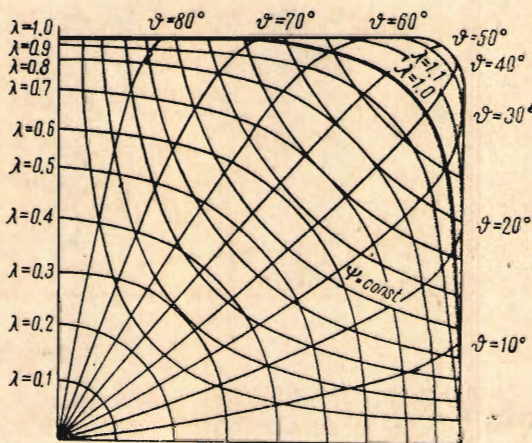
При $k = 1.4$

$$x_0(\lambda) = x_0(\lambda_0) + \left[-\frac{1}{6} \sqrt{1 - \frac{1}{6} \lambda^2} \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{6} \lambda^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda^2/6} \right) + \frac{5}{2^4} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2/6}}{1 - \sqrt{1 - \lambda^2/6}} \right]_{\lambda_0}^{\lambda}$$

Линия разрыва течения определится соотношением

$$\sin^2 \theta = \frac{M^2 - 1}{M^2} = \cos^2 \alpha \quad (6.8)$$

Отсюда следует, что в точках разрыва одна из линий Маха будет перпендикулярна к оси x . В точке пересечения линии тока $\psi = C$ с линией $\theta = \frac{1}{2}\pi$ будем иметь величину скорости $\lambda_1 = 1/C$.



Фиг. 1

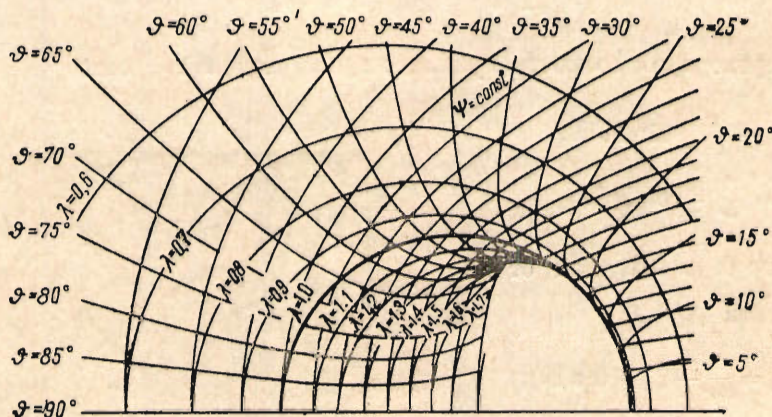
На данной линии тока разрыв наступит при скорости $\lambda = \lambda_{cr}$, удовлетворяющей уравнению

$$\lambda^4 - \frac{k+1}{2} \lambda^2 \lambda_1^2 + \frac{k+1}{2} \lambda_1^4 = 0$$

Отсюда

$$\lambda_{cr}^2 = \frac{k+1}{4} \left(\lambda_1^2 - \lambda_1 \sqrt{\lambda_1^2 - \frac{8}{k+1}} \right)$$

Из последнего равенства следует, что на линиях тока, на которых зна-



Фиг. 2

чение $\theta = \frac{1}{2} \pi$ достигается при скорости

$$\lambda_1 \leq \sqrt{\frac{8}{k+1}}$$

разрыва не происходит. Течение изображено на фиг. 2.

б. При $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$

$$\varphi = \frac{1+\lambda^2}{\lambda} \cos \theta, \quad \psi = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) \frac{\rho}{\rho_0} \sin \theta.$$

Для линий $\lambda = \text{const}$

$$dx = -\frac{1}{\lambda^2} \left(1 + \frac{1}{k+1} \lambda^2 \right) \sin 2\theta d\theta, \quad dy = \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} \cos 2\theta - \frac{2k}{k+1} \cos^2 \theta \right) d\theta$$

Интегрируя в пределах от $\frac{1}{2} \pi$ до θ , получим

$$x - x_0 = \frac{1}{2\lambda^2} \left(1 + \frac{1}{k+1} \lambda^2 \right) (1 + \cos 2\theta)$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2\lambda^2} \left(1 + \frac{1}{k+1} \lambda^2 \right) \sin 2\theta - \frac{k}{k+1} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

Для линии $\theta = \frac{1}{2} \pi$ имеем

$$dx_0 = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} d\lambda, \quad dy_0 = 0$$

Интегрирование дает

$$x_0(\lambda) = x_0(\lambda_0) + \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda^2} + \ln \lambda \right]_{\lambda_0}^{\lambda}, \quad y_0 = 0$$

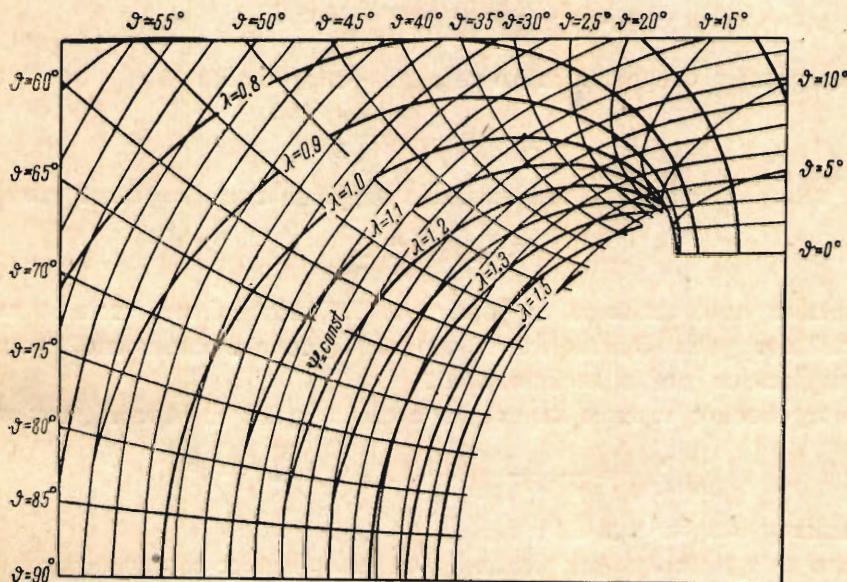
Линия разрыва определится из уравнения

$$\sin^2 \theta = (\lambda^2 - 1) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) : \left\{ (\lambda^2 - 1) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) + (1 + \lambda^2)^2 \right\}$$

На линии тока $\psi = C$, пересекающей линию $\theta = \frac{1}{2}\pi$ при значении $\lambda = \lambda_1$, разрыв произойдет при скорости λ_{cr} , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{(\lambda^2 - 1)(1 - \alpha\lambda^2)}{(\lambda^2 - 1)(1 - \alpha\lambda^2) + (1 + \lambda^2)^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} \frac{(1 - \alpha\lambda_1^2)^2}{(1 - \alpha\lambda^2)^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \left(\frac{p}{p_0} \right)^2_{\lambda=\lambda_1}$$

где $\alpha = (k-1)/(k+1)$. Картина течения дана на фиг. 3.



Фиг. 3

7. Сложение решений. Системы уравнений (1.7) и (1.9), определяющие в плоскости $\lambda\theta$ функции φ , ψ , $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$, являются системами линейными. Поэтому линейные комбинации частных решений будут также решениями этих систем. Как видно из (3.5) и (3.6), дифференциалы координат также линейны относительно дифференциалов функций φ , ψ , $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$. Поэтому координаты точек, соответствующих заданной скорости $\lambda \exp i\theta$, для решений систем (1.7) и (1.9) являющихся линейной комбинацией частных решений, равны таким же линейным комбинациям координат точек слагаемых решений, соответствующих тому же значению $\lambda \exp i\theta$.

Для примера произведем сложение решений 1 и 2. В несжимаемой жидкости будем иметь комплексный потенциал суммарного течения

$$f = -(m + ni) \ln(\bar{\lambda} \exp - i\bar{\theta})$$

Переход в плоскость \bar{z} будет совершаться по уравнению

$$\bar{z} = -(m + ni) \frac{1}{\lambda} \exp i\bar{\theta}$$

Линии тока этого течения — спирали, угол наклона которых к окружности $\bar{\lambda} = \text{const}$

$$\bar{\beta} = \text{arc tg } \frac{m}{n} \quad (7.1)$$

Для сжимаемой жидкости имеем

$$\varphi = m \int_{\lambda_0} \frac{1-M^2}{\lambda} \frac{\rho_0}{\rho} d\lambda + n\theta, \quad \psi = n \int_{\lambda_0} \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{\rho_0} d\lambda - m\theta$$

Соответствие между плоскостями $\lambda\theta$ и $xу$ устанавливается соотношением

$$\bar{z} = - \left(m \frac{\rho_0}{\rho} + ni \right) \frac{1}{\lambda} \exp i\theta$$

Линия равных скоростей этого течения — окружности

$$|z| = \left| m \frac{\rho_0}{\rho} + ni \right| \frac{1}{\lambda},$$

а линии тока — спирали, составляющие с окружностями $\lambda = \text{const}$ угол

$$\beta = \text{arc tg } \frac{m}{n} \frac{\rho_0}{\rho} \quad (7.2)$$

Сравнение этого значения с формулой (7.1) показывает, что в сжимаемой жидкости этот угол больше, т. е. что линии тока в сжимаемой жидкости менее искривлены, чем в несжимаемой.

Рассматриваемое течение переходит в сверхзвуковую область, так как

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\lambda, \theta)} = - \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{\rho_0} \left[(1-M^2) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 m^2 + n^2 \right]$$

не обращается в нуль при $M=1$.

Разрыв наступает при скоростях, удовлетворяющих соотношению

$$n^2 - m^2 (M^2 - 1) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 = 0$$

или, принимая во внимание (7.2),

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{M^2} = \sin^2 \alpha$$

Поступила в редакцию
8 VIII 1944

V. S. TATARENCHIK.—CONCERNING PARTICULAR SOLUTIONS FOR EQUATIONS OF GAS DYNAMICS

The author deals with some simple flows in a compressible fluid corresponding to the exact solutions for equations of gas dynamics and analogous to those in an incompressible fluid.

On the basis of these examples of fluid motion the passing of the flow beyond the velocity of sound can be considered as well as the further conduct of the flow at super-sound velocities.

The analogy with the motions of non-compressible fluid gives the possibility of establishing the change in the structure of a flow due to an increase in the velocity.