Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

ЗАДАЧА О МЕДЛЕННОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

(Москва)

Рассмотрим медленное осесимметрическое течение вязкой жидкости в трубе, радиус которой r периодически изменяется вдоль трубы, мало отклоняясь от некоторого среднего значения r_0.

Ограничимся изменением радиуса трубы по закону

$$r = r_0 + \delta \sin az \qquad (\delta \ll r_0)$$

где z — координата вдоль оси трубы, a — постоянный параметр, δ — наибольшее отклонение радиуса трубы от среднего значения.

Другие случаи могут быть получены соответствующей комбинацией частных решений, вид которых будет получен ниже.

Для осесимметрического сечения вязкой жидкости имеют место соотношения

$$\sigma_r = -p + \mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \sigma_z = -p + \mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad \sigma_\theta = -p + \mu \frac{u_r}{r},$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \qquad \tau_{r\theta} = 0, \qquad \tau_{z\theta} = 0$$

где через σ_r, σ_z, σ_θ, τ_{rz}, $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ обозначены компоненты тензора напряжений в цилиндрических координатах r, θ, z, через p — давление, u_r и u_z — составляющие скоростей частиц жидкости, μ — удвоенный коэффициент вязкости.

Предполагая движение жидкости весьма медленным, пренебрегаем инерционными членами в уравнениях движения, тогда

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

Массовые силы будем считать отсутствующими.

Подставляя сюда выражения компонент тензора напряжений, получим

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} \right) + \frac{1}{2} \mu \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0$$

Добавляя к ним уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными функциями p, u_r и u_z.

Полагая на основании уравнения неразрывности,

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \qquad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}$$

После этого первые два уравнения приводятся к виду

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{2r}\left(\chi_{zzz} + \chi_{rzz} - \frac{1}{r}\chi_{rz}\right), \qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{2r}\left(\chi_{rrr} - \frac{1}{r} + \chi_{rr}\ \frac{1}{r^2}\chi_r + \chi_{rzz}\right)$$

Исключая из них функцию p, приходим к одному уравнению

$$\chi_{rrrr} - \frac{2}{r}\chi_{rrr} + \frac{3}{r^2}\chi_{rr} - \frac{3}{r^3}\chi_r + 2\left(\chi_{rrzz} - \frac{1}{r}\chi_{rzz}\right) + \chi_{zzzz} = 0$$

содержащему одну неизвестную функцию.

Исходя из особенности задачи, будем искать решение в форме

$$\chi = R_0(r) + \varphi(ar)\sin az$$

где $R_0(r)$ — функция, определяющая движение вязкой жидкости в трубе постоянного сечения с радиусом r_0 (основное течение), а второе слагаемое дает поправку в скоростях течения при переходе к трубе переменного сечения (возмущение течения). Для функции $R_0(r)$ получаем уравнение

$$R_0^{\mathrm{IV}} - \frac{2}{r}R_0''' + \frac{3}{r^2}R_0'' - \frac{3}{r^3}R_0' = 0$$

общий интеграл которого имеет вид

$$R_0 = A_0 r^4 + B_0 r^2 + C_0 r^2 \ln r + D_0$$

Скорости, определяемые этой функцией, имеют выражения

$$u_r^0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial R_0}{\partial z} = 0, \qquad u_z^0 = \frac{1}{r}\frac{\partial R_0}{\partial r} = 4A_0 r^2 + 2B_0 + 2C_0 \ln r + C_0$$

Так как скорость на оси трубы $(r = 0)$ ограничена по величине, то следует принять константу C_0 равной нулю. При $r = r_0$ скорость жидкости обращается в нуль вследствие условия прилипания частиц жидкости к стенкам трубы постоянного сечения. Поэтому

$$4A_0 r_0^2 + 2B_0 = 0$$

и, следовательно,

$$R_0(r) = A_0(r^4 - 2r^2 r_0^2), \qquad u_z = 4A_0(r^2 - r_0^2)$$

Обозначим через U скорость течения жидкости на оси трубы (в основном течении); тогда получим

$$R_0 = -\frac{U}{4r_0^2}(r^4 - 2r_0^2 r^2), \qquad u_z = \frac{U}{r_0^2}(r_0^2 - r^2), \qquad u_r = 0$$

т. е. известный закон пуазелева течения вязкой жидкости в круглой трубе постоянного сечения.

Для функции $\varphi(r)$ получаем после сокращения на множители, содержащие $\sin az$, уравнение

$$\varphi^{\mathrm{IV}} - \frac{2}{x}\varphi''' + \left(\frac{3}{x^2} - 2\right)\left(\varphi'' - \frac{1}{x}\varphi'\right) + \varphi(x) = 0 \qquad (x = ar)$$

Можно показать, что это уравнение может быть представлено в виде [1]

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - 1\right)^2 \varphi(x) = 0$$

Так как уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-1\right)\psi(x)=0$$

имеет общее решение в виде $\psi(x)=C_1 x J_1(ix)+C_2 x N_1(ix)$, т. е — линейной комбинации двух функций Бесселя первого порядка чисто мнимого аргумента, умноженных на x, то общее решение для функции φ может быть найдено лагранжевым методом вариирования постоянных при рассмотрении уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-1\right)\varphi=C_1 x J_1(ix)+C_2 x N_1(ix)$$

Обозначим для краткости записи через u и v два каких-нибудь линейно независимых решения дифференциального уравнения для функции ψ, например $-ix J_1(ix)$ и $-ix N_1(ix)$, и будем искать частное решение уравнения

$$\varphi''-\frac{1}{x}\varphi'-\varphi=u$$

Полагая $\varphi=A(x)u+B(x)v$, получим, следуя методу Лагранжа, уравнения

$$A'u+B'v=0,\qquad A'u'+B'v'=u,\qquad \text{откуда}\qquad A'=\frac{-uv}{uv'-vu'},\qquad B'=\frac{u^2}{uv'-vu'}$$

Выражение $uv'-vu'$ представляет собой детерминант Вронского и может быть подсчитан непосредственно.

Действительно, для функции u и v имеют место равенства

$$u''-\frac{1}{x}u'-u=0,\qquad v''-\frac{1}{x}v'-v=0$$

Умножая первое из них на v, второе на u и составляя разность, получим

$$uv''-u''v=\frac{d}{dx}(uv'-vu')=\frac{1}{x}(uv'-vu'),\quad \text{откуда}\quad uv'-vu'=cx$$

Постоянная c, стоящая в правой части последнего равенства, может быть определена по виду разложения левой части равенства вблизи значения $x=0$. Таким образом

$$A=-\frac{1}{c}\int\frac{uv}{x}dx,\qquad B=\frac{1}{c}\int\frac{u^2}{x}dx$$

Из равенства $u''-u'/x-u=0$ имеем

$$\frac{u}{x}=\frac{u'}{x^2}-\frac{u''}{x}=-\frac{d}{dx}\frac{u'}{x}$$

Интегрированием по частям получаем для функций A и B выражения

$$A=\frac{vu'}{cx}-\frac{1}{c}\int\frac{u'v'}{x}dx,\qquad B=-\frac{uu'}{cx}+\frac{1}{c}\int\frac{u'^2}{x}dx$$

и, следовательно,

$$\varphi=Au+Bv=-\frac{u}{c}\int\frac{u'v'}{x}dx+\frac{v}{c}\int\frac{u'^2}{x}dx$$

Умножая равенства, $u''-u'/x-u=0$ и $v''-v'/x-v=0$ соответственно на v' и u' и складывая их, получаем

$$2\frac{u'v'}{x}=uv'+vu'-u'v''-v'u''=\frac{d}{dx}(uv)-\frac{d}{dx}(u'v')$$

Аналогично имеет место

$$2\frac{u'^2}{x}=\frac{d}{dx}u^2=\frac{d}{dx}u'^2$$

Поэтому

$$\int\frac{u'v'}{x}dx=\frac{uv}{2}-\frac{u'v'}{2}+A\,,\qquad \int\frac{u'^2}{x}dx=\frac{u^2}{x}-\frac{u'^2}{2}+B$$

и, следовательно,

$$\varphi=-\frac{u}{c}\int\frac{u'v'}{x}dx+\frac{v}{c}\int\frac{u'^2}{x}dx=\frac{u'}{2c}(uv'-vu')-A_1u+B_1v$$

или, вспоминая значение выражения $uv'-vu'$ и отбрасывая несущественные члены с произвольными постоянными A_1 и B_1, получаем частное решение уравнения для функции φ в виде $\frac{1}{2}xu'$.

Аналогично получается второе частное решение в виде $\frac{1}{2}xv'$. В справедливости обоих частных решений легко убедиться непосредственной подстановкой их в уравнение четвертого порядка, определяющего φ.

Общее решение упомянутого равенства имеет, таким образом, вид

$$\varphi=Au+Bv+Cxu'+Dxv'$$

Так как $\chi=R_0(r)+\varphi(ar)\sin az$, то имеем

$$u_z=\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}=\frac{1}{r}R_0'(r)+\frac{a}{r}\varphi'(ar)\sin az$$

Компонента скорости вязкой жидкости u_z имеет ограниченное значение на оси трубы, т. е. при $r=0$. Поэтому постоянные B и D следует принять равными нулю, так как члены, содержащие функцию $v=-iN_1(ix)$, имеют при $x\to 0$ логарифмическую особенность. Следовательно,

$$u_z=u_z^0+\frac{a}{r}\left\{Au'(x)+C[xu''(x)+u'(x)]\right\}\sin az$$

где

$$u_z^0=U\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right),\qquad x=ar\,,\qquad u=-ixJ_1(ix)$$

Замечая, что $u''=u'/x+u$, приводим это выражение к виду

$$u_z=U\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)+\frac{a}{r}\Big(Au'+C(2u'+xu)\Big)\sin az \tag{*}$$

Для другой компоненты скорости имеем выражение

$$u_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial z}=-\frac{a}{r}\varphi(ar)\cos az=-\frac{a}{r}(Au+Cxu')\cos az \tag{**}$$

Согласно граничным условиям движения вязкой жидкости обе компоненты должны обращаться в нуль на стенках трубы, т. е. при $r=r_0+\delta\sin az$.

Имея в виду малость «возмущения» основного течения и отбрасывая малые порядка выше первого, получаем граничные условия в виде

$$0=-\frac{2U\delta}{r_0}+\frac{a}{r_0}\Big(Au'+C(2u'+xu)\Big),\qquad 0=Au+Cxu'\qquad (x=ar_0)$$

откуда имеем

$$A=-\frac{2xuu'U\delta}{a(2uu'+xu^2-xu'^2)}\,,\qquad C=\frac{2uU\delta}{a(2uu'+xu^2-xu'^2)} \tag{***}$$

причем в этих выражениях следует положить $x = ar_0$. Знаменатели выражений представляют собой существенно положительную величину, Действительно, если воспользоваться приведенным выше выражением для u'' через u и u', то

$$\frac{d}{dx}\,\frac{2uu' + xu^2 - xu'^2}{x} = \frac{u^2}{x}, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{2uu' + xu^2 - xu'^2}{x} = \int\limits_0^x \frac{u^2}{x}\,dx + \text{const}$$

Постоянная, стоящая в правой части, равна нулю, так как разложение функции $u = -i\,x\,J_1(ix)$ по степеням x начинается с членов второй степени и, следовательно, левая часть равенства обращается в нуль при $x = 0$.

Функция $-i\,J_1(ix)$ положительна при положительных значениях переменной x и, следовательно, интеграл, стоящий в правой части равенства, также положителен, откуда следует, что

$$2uu' + xu^2 - xu'^2 > 0$$

Заметим, что согласно известным соотношениям теории функций Бесселя

$$\int\limits_0^x \frac{u^2}{x}\,dx = \int\limits_0^x xJ_1{}^2(ix)\,dx = \frac{x^2}{2}\,J_1{}^2(ix) - J_0(ix)\,J_2(ix)$$

$$u'(x) = -iJ_2(ix) + xJ_2{}'(ix) = xJ_0(ix)$$

вследствие чего константы A и C могут быть вычислены с помощью таблиц функций Бесселя мнимого аргумента.

Обратимся теперь к определению функции p, т. е. давления внутри жидкости. Выше (на стр. 396) даны уравнения, содержащие производные функции p и χ. Если подставить в них выражение функции χ

$$\chi = \frac{U}{4}\left(2r^2 - \frac{r^4}{r_0{}^2}\right) + \varphi(ar)\sin ar$$

то получим

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{a^4}{2x}\left(\varphi'' - \frac{1}{x}\,\varphi' - \varphi\right)\cos az$$

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial z} = -2\,\frac{U}{r_0{}^2} + \frac{a^4}{2x}\left(\varphi''' - \frac{1}{x}\,\varphi'' + \frac{1}{x^2}\,\varphi' - \varphi'\right)\sin az \qquad (x = ar)$$

Интегрируя второе уравнение по переменной z, имеем

$$\frac{1}{\mu}\,p = -\frac{2U}{r_0{}^2}\,z - \frac{a^3}{2x}\left(\varphi''' - \frac{1}{x}\,\varphi'' + \frac{1}{x^2}\,\varphi' - \varphi'\right)\cos az + f(z)$$

Нетрудно убедиться на основании первого уравнения и дифференциального уравнения четвертого порядка, которому удовлетворяет функция φ, что произвольная функция $f(z)$ в последнем соотношении сводится к постоянной.

Первый член, стоящий в правой части последнего соотношения, представляет изменение давления вдоль трубы по закону Пуазеля. Второй член представляет «возмущение» давления при переходе от трубы постоянного сечения к трубе переменного сечения. Для подсчета этого члена заменим функцию φ ее выражением $\varphi = Au + Cxu'$. Имеем

$$\varphi''' - \frac{1}{x}\,\varphi'' + \frac{1}{x^2}\,\varphi' - \varphi' =$$

$$= A\left(u''' - \frac{1}{x}\,u'' + \frac{1}{x^2}\,u' - u'\right) + C\left[\,xu^{\text{IV}} + 2u''' - \left(\frac{1}{x} + x\right)u'' + \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)u'\,\right]$$

Из равенства $u''-u'/x-u=0$ диференцированием получаем

$$u'''-\frac{1}{x}u''+\frac{1}{x^2}u'-u'=0\,, \qquad u^{\mathrm{IV}}-\frac{1}{x}u'''+\frac{2}{x^2}u''-u''-\frac{2}{x^2}u'=0$$

Отсюда

$$u'''=u'+\frac{1}{x}u\,; \qquad u^{\mathrm{IV}}=\frac{2u'}{x}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)u$$

Производя упрощения с помощью этих равенств, имеем

$$\varphi'''-\frac{1}{x}\varphi''+\frac{1}{x^2}\varphi'-\varphi'=2Cu'$$

и, таким образом,

$$p=p_0-\mu\frac{a^3}{x}2Cu'\cos az\,, \quad \text{где} \quad p_0=-\mu\frac{2U}{r_0^2}z+\mathrm{const}$$

или, подставляя значение константы C,

$$p=p_0-\mu\frac{4a^2u_0u'U\delta\cos az}{x\,(2uu'+xu^2-xu'^2)_0} \qquad \left(u_0=u\,(ar_0)\right)$$

Так как

$$u=-ixJ_1(ix)>0\,, \qquad u'>0\,, \qquad \frac{dr}{dz}=\frac{d}{dz}\left(r_0+\delta\sin az\right)=a\delta\cos az$$

то при переходе от меньших сечений трубы к большим, при движении по направлению течения жидкости, происходит уменьшение давления в отличие от того, что можно было бы ожидать при движении идеальной жидкости (разумеется, при учете инерционных членов).

Выражение для давления p можно, заменяя функции u и u' их представлением через функции Бесселя, привести к виду

$$p=p_0-\frac{8\mu Ua^2\delta J_0(ix)\cos az}{x_0\left[x_0^2J_1^2(ix_0)-2J_0(ix_0)J_2(ix_0)\right]} \qquad (x_0=ar_0) \qquad (****)$$

Поступила в редакцию
15 II 1944

A. J. ISHLINSKY.—A SLOW MOTION OF A VISCOUS FLUID IN A TUBE OF VARIABLE CROSS-SECTION

The problem expressed in the title is considered for a tube of circular cross-section having a variable radius $r=r_0+\delta\sin az$, where δ is a very small value in comparison with r_0.

The inertia terms in the equations for the motion of an incompressible viscous fluid are not taken into consideration.

For the components of the velocity of fluid along the axis of tube u_z and along the radius u_r the formulae (*) and (**) are obtained (page 398), where $x=ar$, $u=-ixJ_1(ix)$ and U is the velocity of the fluid on the axis of the tube. The constant values A and C are determined by formulae (***), where x supposed to be equal to ar_0.

The formula (****) for the distribution of pressure p is given at the end of the Russian text.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII.