Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

А. А. ИЛЬЮШИН

(Москва)

Проблема упругой устойчивости пластинок, оболочек и вообще тонкостенных элементов металлических конструкций и машин разрешена в основных работах Брайана [1], Тимошенко [2] и многочисленных их последователей [3]. Однако уже на первых порах ее разрешения в связи с экспериментальной проверкой формул Эйлера встретилось существенное затруднение, которое не могло быть разрешено в рамках теории упругости. Практически применяемые стержни, пластинки, трубы и другие виды оболочек, являясь обычно лишь относительно тонкостенными, под действием сжимающих сил зачастую выходят за пределы упругости прежде, чем силы достигают критических (упругих) значений, и затем при значительно меньших силах теряют устойчивость.

Это обстоятельство, как бы умаляющее достоинство формул, определяющих критические силы при упругих деформациях, было полностью разъяснено в фундаментальных работах Энгессера [4] и Кармана [5], показавших границы применимости формул Эйлера и расширивших эти границы на весь диапазон упруго-пластических деформаций сжатых стержней. Общеизвестный результат, состоящий в том, что формулы Эйлера остаются верными и при пластических деформациях, если модуль Юнга E заменить на модуль Кармана K, получил столь точное экспериментальное подтверждение, что его стали переносить автоматически на многие другие случаи потери устойчивости.

Так, для прямоугольной пластинки, сжатой в направлении оси x силой P, Блейх [6] без доказательства предлагает обобщить уравнение Брайана в случае пластических деформаций введением поправочного множителя

$$D\left(\frac{K}{E}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\sqrt{\frac{K}{E}}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{1}$$

Геккелер [7] столь же формально обобщает уравнение продольного изгиба тонкостенной трубы, получающей в результате потери устойчивости осесимметричные гофры,

$$D\frac{K}{E}\frac{d^4 w}{dx^4}+P\frac{d^2 w}{dx^2}+\frac{Eh}{R^2}w=0 \tag{2}$$

и указывает, что аналогичный учет пластичности с помощью модуля Кармана возможен во многих других случаях.

Среди инженеров имеет большое распространение убеждение, что если материал пластины или оболочки имеет резко выраженную площадку текучести, то при напряжении, равном пределу текучести, она полностью теряет несущую способность.

Отметим уже с самого начала, что все эти предположения являются не только необоснованными, но и, вообще говоря, неверными. Они приводят к неправильной оценке несущей способности конструкций и излишнему их утяжелению.

Бижляру [8] принадлежит попытка формулировать проблему устойчивости сжатых пластин за пределами упругости на основании теории пластичности Генки-Мизеса. Однако ему не удалось справиться с трудностями анализа напряжений и деформаций в упруго-пластической области и, получив расчетные формулы, он вынужден был ввести в них эмпирические поправки. Из других работ трудно указать такую, в которой рассуждения и выводы были бы более обоснованы или, лучше сказать, менее не обоснованы, чем в указанных работах Блейха и Геккелера.

В настоящей статье рассматривается метод исследования устойчивости пластинок и оболочек за пределами упругости, вытекающий из обобщения теории упруго-пластических деформаций Генки-Мизеса, данного в работах Смирнова-Аляева [9], Шмидта [10] и в наших статьях [11].

§ 1. Закон пластичности для плоского напряженного состояния в вариациях

Определим координатный трехгранник x, y, z так, чтобы плоскость xy являлась касательной к серединной поверхности оболочки, причем оси x, y направлены по касательным к произвольно выбранным ортогональным криволинейным координатам α, β, а ось z по нормали к поверхности.

Основное положение теории оболочек состоит в том, что в каждой поверхности $z = \text{const}$ имеет место плоское напряженное состояние, изменяющееся по z. Связь между напряжениями X_x, Y_y, X_y и деформациями e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} записывается в виде

$$X_x = 4G\,[1-\omega(\varepsilon_i)]\,(e_{xx}+\tfrac{1}{2}e_{yy}), \qquad Y_y = 4G\,[1-\omega(\varepsilon_i)]\,(e_{yy}+\tfrac{1}{2}e_{xx})$$

$$X_y = G\,[1-\omega(\varepsilon_i)]\,e_{xy} \tag{1.1}$$

Интенсивность напряжения σ_i

$$\sigma_i = \sqrt{X_x^2 + Y_y^2 - X_xY_y + 3X_y^2} \tag{1.2}$$

и интенсивность деформации ε_i

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{xx}e_{yy} + \tfrac{1}{4}e_{xy}^2} \tag{1.3}$$

связаны соотношением

$$\sigma_i = 3\mu\varepsilon_i = 3G\,(1-\omega)\,\varepsilon_i \tag{1.4}$$

так что функция ω определяется физическими свойствами материала.

Найдем вариацию интенсивности деформаций

$$\delta\varepsilon_i = \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial e_{xx}}\delta e_{xx} + \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial e_{yy}}\delta e_{yy} + \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial e_{xy}}\delta e_{xy} = \frac{1}{3\mu\varepsilon_i}\,(X_x\,\delta e_{xx} + Y_y\,\delta e_{yy} + X_y\,\delta e_{xy})$$

Отсюда получаем

$$\sigma_i\delta\varepsilon_i = X_x\,\delta e_{xx} + Y_y\delta e_{yy} + X_y\,\delta e_{xy} \tag{1.5}$$

Пусть под действием заданной системы внешних сил оболочка имеет определенное напряженное состояние X_x, Y_y, X_y. Явление потери устойчивости состоит в том, что при некоторых значениях внешних сил наряду с указанным напряженным состоянием равновесия оказывается возможным другое состояние $X_x+\delta X_x$, $Y_y+\delta Y_y$, $X_y+\delta X_y$, причем переход из первого во второе происходит при неизменных силах.

Предположим, что разности деформаций второго и первого состояния равновесия δe_{xx}, δe_{yy}, δe_{xy} нам известны.

Перед потерей устойчивости оболочка может в некоторой части $П$ находиться в пластическом состоянии, в другой части $У$ — в упругом. После потери устойчивости область $П$ разобьется в свою очередь на две части $П \to П$ и $П \to У$, — в первой будет продолжаться нагружение, т. е. переход из первого состояния во второе вызовет дальнейшие пластические деформации

$$\sigma_i \delta \varepsilon_i > 0$$

во второй разгрузка, т. е. этот переход вновь вызовет упругие деформации

$$\sigma_i \delta \varepsilon_i < 0$$

Таким образом граница, разделяющая области $П \to П$ и $П \to У$, имеет уравнение

$$\sigma_i \delta \varepsilon_i = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + X_y \delta e_{xy} = 0 \tag{1.6}$$

и представляет собой некоторую поверхность $z = z_0(\alpha, \beta)$.

Область чисто упругих деформаций оболочки $У$ нет нужды рассматривать особо, так как функция $\omega(\varepsilon_i)$ для обычных материалов имеет всюду непрерывную производную и потому при потере устойчивости область $У$ будет оставаться упругой; к ней приложимы результаты теории упругости.

Рассмотрим связь между вариациями напряжений и деформаций для области $П \to П$. Варьируя (1.1), находим

$$\delta X_x = 4G\left[(1-\omega)\left(\delta e_{xx} + \frac{1}{2}\delta e_{yy}\right) - \left(e_{xx} + \frac{1}{2} e_{yy}\right)\frac{d\omega}{d\varepsilon_i}\delta\varepsilon_i\right]$$

$$\delta X_y = G\left[(1-\omega)\delta e_{xy} - e_{xy}\frac{d\omega}{d\varepsilon_i}\delta\varepsilon_i\right]$$

Введем обозначения

$$a = \frac{X_x}{\sigma_i}\sqrt{\frac{\omega'}{1-\omega}}, \qquad b = \frac{Y_y}{\sigma_i}\sqrt{\frac{\omega'}{1-\omega}}, \qquad c = \frac{X_y}{\sigma_i}\sqrt{\frac{\omega'}{1-\omega}} \tag{1.7}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\sigma_i} = \frac{G}{\sigma_i}(1-\omega) \tag{1.8}$$

Принимая во внимание (1.1) и (1.5), находим окончательно

$$\begin{aligned}
\frac{\delta X_x}{\sigma_i} &= (4\bar{\mu} - a^2)\,\delta e_{xx} + (2\bar{\mu} - ab)\,\delta e_{yy} - ac\,\delta e_{xy} \\
\frac{\delta Y_y}{\sigma_i} &= (2\bar{\mu} - ab)\,\delta e_{xx} + (4\bar{\mu} - b^2)\,\delta e_{yy} - bc\,\delta e_{xy} \\
\frac{\delta X_y}{\sigma_i} &= -ac\,\delta e_{xx} - bc\,\delta e_{yy} + (\bar{\mu} - c^2)\,\delta e_{xy}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Для области $П \to У$ в соотношениях (1.9) нужно положить $\omega = 0$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0 = G/\sigma_i$. Таким образом

$$\frac{\delta X_x}{\sigma_i} = 4\bar{\mu}_0\delta e_{xx} + 2\bar{\mu}_0\delta e_{yy}, \quad \frac{\delta Y_y}{\sigma_i} = 2\bar{\mu}_0\delta e_{xx} + 4\bar{\mu}_0\delta e_{yy}, \quad \frac{\delta X_y}{\sigma_i} = \bar{\mu}_0\delta e_{xy} \tag{1.10}$$

Выражения (1.9) показывают, что в области $П \to П$, вследствие потери устойчивости, возникает особый вид анизотропии, когда добавочные нормальные напряжения зависят также от вариаций сдвигов, а добавочные касательные напряжения — от вариаций удлинений.

§ 2. Закон пластичности в вариациях для пластинок и оболочек

Потеря устойчивости сопровождается изменениями первой и второй квадратичных форм срединной поверхности. Пусть ε_1, ε_2 будут удлинения по осям x, y, а $\gamma = 2\varepsilon_3$ — сдвиг в плоскости x, y, соответствующие изменению первой квадратичной формы, и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ — параметры кривизны и кручения, соответствующие изменению второй квадратичной формы. Рассматриваемые величины представляют собой разности величин удлинений и кривизн после и до потери устойчивости, вследствие чего параметры $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ называются также искривлениями.

Шесть величин ε_1, ε_2, ε_3, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ можно выразить через три компоненты перемещения u, v, w, с помощью частных производных не выше второго порядка по криволинейным координатам α, β в самом общем случае. Эти выражения мы будем считать известными, поскольку они приводятся во многих курсах по теории упругости и упругой устойчивости.

Удлинения и сдвиг в поверхности, расположенной на расстоянии z от срединной поверхности, являются линейной функцией z и имеют значения:

$$\delta e_{xx} = \varepsilon_1 - z\varkappa_1, \qquad \delta e_{yy} = \varepsilon_2 - z\varkappa_2, \qquad \delta e_{xy} = 2\varepsilon_3 - 2z\tau \tag{2.1}$$

На основании (1.6) находим границу областей $П \to П$ и $П \to У$, обозначая соответствующую ординату через z_0

$$z_0 = \frac{X_x\varepsilon_1 + Y_y\varepsilon_2 + 2X_y\varepsilon_3}{X_x\varkappa_1 + Y_y\varkappa_2 + 2X_y\tau} \tag{2.2}$$

Для определенности предположим, что область $П \to П$ примыкает к поверхности оболочки $z = +\frac{1}{2}h$, а область $П \to У$ к поверхности $z = -\frac{1}{2}h$, где h — толщина оболочки. Тогда на основании (1.9), (1.10) и (2.1) имеем:

для $\frac{1}{2}h \geqslant z \geqslant z_0$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta X_x}{\sigma_i} &= (4\bar{\mu} - a^2)\,\varepsilon_1 + (2\bar{\mu} - ab)\,\varepsilon_2 - 2ac\varepsilon_3 - z\,[(4\bar{\mu} - a^2)\,\varkappa_1 + (2\bar{\mu} - ab)\,\varkappa_2 - 2ac\tau] \\
\frac{\delta Y_y}{\sigma_i} &= (2\bar{\mu} - ab)\,\varepsilon_1 + (4\bar{\mu} - b^2)\,\varepsilon_2 - 2bc\varepsilon_3 - z\,[(2\bar{\mu} - ab)\,\varkappa_1 + (4\bar{\mu} - b^2)\,\varkappa_2 - 2bc\tau] \\
\frac{\delta X_y}{\sigma_i} &= -ac\varepsilon_1 - bc\varepsilon_2 + 2(\bar{\mu} - c^2)\,\varepsilon_3 - z[-ac\varkappa_1 - bc\varkappa_2 + 2\,(\bar{\mu} - c^2)\,\tau]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

для $z_0 \geqslant z \geqslant -\frac{1}{2}h$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta X_x}{\sigma_i} &= 4\bar{\mu}_0\varepsilon_1 + 2\bar{\mu}_0\varepsilon_2 - z\,(4\bar{\mu}_0\varkappa_1 + 2\bar{\mu}_0\varkappa_2) \\
\frac{\delta Y_y}{\sigma_i} &= 2\bar{\mu}_0\varepsilon_1 + 4\bar{\mu}_0\varepsilon_2 - z\,(2\bar{\mu}_0\varkappa_1 + 4\bar{\mu}_0\varkappa_2) \\
\frac{\delta X_y}{\sigma_i} &= 2\bar{\mu}_0\varepsilon_3 - z2\bar{\mu}_0\tau
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Теперь мы можем подсчитать вариации результирующих сил

$$\delta T_1 = \int\limits_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \delta X_x dz, \qquad \delta T_2 = \int\limits_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \delta Y_y\, dz, \qquad \delta S = \int\limits_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \delta X_y\, dz \tag{2.5}$$

лежащих в серединной поверхности оболочки. Принимая обозначения для безразмерных параметров искривлений и ординаты z

$$\bar{\varkappa}_1=\frac{1}{2}h\varkappa_1,\qquad \bar{\varkappa}_2=\frac{1}{2}h\varkappa_2,\qquad \bar{\tau}=\frac{1}{2}h\tau=\bar{\varkappa}_3,\qquad \bar{z}=\frac{2}{h}z\qquad (1\geqslant z\geqslant -1)\qquad (2.6)$$

и учитывая различные выражения величин δX_x, δY_y, δX_y для значений $1\geqslant \bar{z}\geqslant \bar{z}_0$ и $\bar{z}_0\geqslant \bar{z}\geqslant -1$, находим

$$\begin{aligned}
\frac{2\delta T_1}{h\sigma_i}&=\int_{-1}^{\bar{z}_0}\frac{\delta X_x}{\sigma_i}\,d\bar{z}+\int_{\bar{z}_0}^{1}\frac{\delta X_x}{\sigma_i}\,d\bar{z}=\sum_{i=1}^{3}\left[\varepsilon_i t_1^{(i)}+\bar{\varkappa}_i\tau_1^{(i)}\right]\\
\frac{2\delta T_2}{h\sigma_i}&=\int_{-1}^{\bar{z}_0}\frac{\delta Y_y}{\sigma_i}\,d\bar{z}+\int_{\bar{z}_0}^{1}\frac{\delta Y_y}{\sigma_i}\,d\bar{z}=\sum_{i=1}^{3}\left[\varepsilon_i t_2^{(i)}+\bar{\varkappa}_i\tau_2^{(i)}\right]\qquad (2.7)\\
\frac{2\delta S}{h\sigma_i}&=\int_{-1}^{\bar{z}_0}\frac{\delta X_y}{\sigma_i}\,d\bar{z}+\int_{\bar{z}_0}^{1}\frac{\delta X_y}{\sigma_i}\,d\bar{z}=\sum_{i=1}^{3}\left[\varepsilon_i t_3^{(i)}+\bar{\varkappa}_i\tau_3^{(i)}\right]
\end{aligned}$$

где коэффициенты $t_k^{(i)},\tau_k^{(i)}$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
&t_1'=4(\bar{\mu}_0+\bar{\mu})+4(\bar{\mu}_0-\bar{\mu})\,\bar{z}_0-a^2(1-\bar{z}_0), && \tau_1'=\left[2(\bar{\mu}_0-\bar{\mu})+\frac{1}{2}a^2\right](1-\bar{z}_0^2)\\
&t''_1=2(\bar{\mu}_0+\bar{\mu})+2(\bar{\mu}_0-\bar{\mu})\,\bar{z}_0-ab(1-\bar{z}_0), && \tau_1''=\left(\bar{\mu}_0-\bar{\mu}+\frac{1}{2}ab\right)(1-\bar{z}_0^2)\\
&t_1'''=-2ac(1-\bar{z}_0), && \tau_1'''=ac(1-\bar{z}_0^2)\\
&t_2'=2(\bar{\mu}_0+\bar{\mu})+2(\bar{\mu}_0-\bar{\mu})\,\bar{z}_0-ab(1-\bar{z}_0), && \tau_2'=\left(\bar{\mu}_0-\bar{\mu}+\frac{1}{2}ab\right)(1-\bar{z}_0^2)\\
&t_2''=4(\bar{\mu}_0+\bar{\mu})+4(\bar{\mu}_0-\bar{\mu})\,\bar{z}_0-b^2(1-\bar{z}_0), && \tau_2''=\left[2(\bar{\mu}_0-\bar{\mu})+\frac{1}{2}b^2\right](1-\bar{z}_0^2)\\
&t_2'''=-2bc(1-\bar{z}_0), && \tau_2'''=bc(1-\bar{z}_0^2)\\
&t_3'=-ac(1-\bar{z}_0), && \tau_3'=\frac{1}{2}ac(1-\bar{z}_0^2)\\
&t_3''=-bc(1-\bar{z}_0), && \tau_3''=\frac{1}{2}bc(1-\bar{z}_0^2)\\
&t_3'''=2(\bar{\mu}_0+\bar{\mu})+2(\bar{\mu}_0-\bar{\mu})\,\bar{z}_0-2c^2(1-\bar{z}_0), && \tau_3'''=(\bar{\mu}_0-\bar{\mu}+c^2)(1-\bar{z}_0^2)
\end{aligned}$$

Чтобы упростить полученные равенства (2.7), обратим внимание на выражения (2.3), (2.4). Если ввести обозначения

$$\varepsilon=\frac{a}{s_i}\varepsilon_1+\frac{b}{s_i}\varepsilon_2+\frac{2c}{s_i}\varepsilon_3,\qquad \bar{\varkappa}=\frac{a}{s_i}\bar{\varkappa}_1+\frac{b}{s_i}\bar{\varkappa}_2+\frac{2c}{s_i}\bar{\tau},\qquad s_i^2=a^2+b^2-ab+3c^2\qquad (2.8)$$

то эти выражения для $1\geqslant \bar{z}\geqslant \bar{z}_0$ можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_i}\left(\delta X_x-\frac{1}{2}\delta Y_y\right)&=3\bar{\mu}(\varepsilon_1-\bar{z}\bar{\varkappa}_1)-s_i\left(a-\frac{1}{2}b\right)(\varepsilon-\bar{z}\bar{\varkappa})\\
\frac{1}{\sigma_i}\left(\delta Y_y-\frac{1}{2}\delta X_x\right)&=3\bar{\mu}(\varepsilon_2-\bar{z}\bar{\varkappa}_2)-s_i\left(b-\frac{1}{2}a\right)(\varepsilon-\bar{z}\bar{\varkappa})\qquad (2.9)\\
\frac{1}{\sigma_i}\delta X_y&=2\bar{\mu}(\varepsilon_3-\bar{z}\bar{\tau})-s_i c(\varepsilon-\bar{z}\bar{\varkappa})
\end{aligned}$$

Умножим числителя и знаменателя выражения (2.2) на

$$\frac{1}{s_i \sigma_i} \sqrt{\frac{\omega'}{1-\omega}}$$

и обе части равенства разделим на половину толщины оболочки $\frac{1}{2}h$; как нетрудно видеть, получим

$$\bar{z}_0 = \frac{\varepsilon}{\bar{\varkappa}} \tag{2.10}$$

Внося значение $\varepsilon = \bar{z}_0 \bar{\varkappa}$ в (2.9), получим окончательно:

для $1 \geqslant \bar{z} \geqslant \bar{z}_0$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sigma_i}\left(\delta X_x - \frac{1}{2}\,\delta Y_y\right) = 3\bar{\mu}\varepsilon_1 - 3\bar{\mu}\,\bar{\varkappa}_1 \bar{z} + s_i\left(a - \frac{1}{2}\,b\right)(\bar{z} - \bar{z}_0)\,\bar{\varkappa} \\
\frac{1}{\sigma_i}\left(\delta Y_y - \frac{1}{2}\,\delta X_x\right) = 3\bar{\mu}\varepsilon_2 - 3\bar{\mu}\,\bar{\varkappa}_2 \bar{z} + s_i\left(b - \frac{1}{2}\,a\right)(\bar{z} - \bar{z}_0)\,\bar{\varkappa} \\
\frac{1}{\sigma_i}\,\delta X_y = 2\bar{\mu}\varepsilon_3 - 3\bar{\mu}\,\bar{\tau}\,\bar{z} + s_i c\,(\bar{z} - \bar{z}_0)\,\bar{z}
\end{gathered} \tag{2.11}$$

для $\bar{z}_0 \geqslant \bar{z} \geqslant -1$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sigma_i}\left(\delta X_x - \frac{1}{2}\,\delta Y_y\right) = 3\bar{\mu}_0\varepsilon_1 - 3\bar{\mu}_0\bar{\varkappa}_1\bar{z} \\
\frac{1}{\sigma_i}\left(\delta Y_y - \frac{1}{2}\,\delta X_x\right) = 3\bar{\mu}_0\varepsilon_2 - 3\bar{\mu}_0\bar{\varkappa}_2\bar{z} \\
\frac{1}{\sigma_i}\,\delta X_y = 2\bar{\mu}_0\varepsilon_3 - 2\bar{\mu}_0\bar{\tau}\bar{z}
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Из этих ревенств видно, что система уравнений (2.7) может быть преобразована к виду

$$\begin{gathered}
\frac{2}{h\sigma_i}\left(\delta T_1 - \frac{1}{2}\,\delta T_2\right) = 3\left[\bar{\mu}_0 + \bar{\mu} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})\,\bar{z}_0\right]\varepsilon_1 + \frac{3}{2}\,(\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})(1 - \bar{z}_0^2)\,\bar{\varkappa}_1 + \\
+ \frac{1}{2}\,s\left(a - \frac{b}{2}\right)(1 - \bar{z}_0)^2\,\bar{\varkappa} \\
\frac{2}{h\sigma_i}\left(\delta T_2 - \frac{1}{2}\,\delta T_1\right) = 3\left[\bar{\mu}_0 + \bar{\mu} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})\,\bar{z}_0\right]\varepsilon_2 + \frac{3}{2}\,(\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})(1 - \bar{z}_0^2)\,\bar{\varkappa}_2 + \\
+ \frac{1}{2}\,s_i\left(b - \frac{1}{2}\,a\right)(1 - \bar{z}_0)^2\,\bar{\varkappa} \\
\frac{2}{h\sigma_i}\,\delta S = 2\left[\bar{\mu}_0 + \bar{\mu} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})\,\bar{z}_0\right]\varepsilon_3 + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})(1 - \bar{z}_0^2)\,\bar{\tau} + \frac{1}{2}\,s_i c\,(1 - \bar{z}_0)^2\,\bar{\varkappa}
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Соотношения (2.13) позволяют вывести весьма важное для теории устойчивости оболочки следствие: умножая первое на a / s_i, второе на b / s_i, третье на $3c / s_i$ и складывая, получим

$$\begin{gathered}
\{s_i^2 (1 - \bar{z}_0)^2 + 3(\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})(1 - \bar{z}_0^2) + 6\bar{z}_0\,[\bar{\mu}_0 + \bar{\mu} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})\,\bar{z}_0]\}\,\bar{\varkappa} = \\
= \frac{4}{h\sigma_i s_i}\left[\left(a - \frac{b}{2}\right)\delta T_1 + \left(b - \frac{1}{2}\,a\right)\delta T_2 + 3c\,\delta S\right]
\end{gathered} \tag{2.14}$$

На основании (1.7), (2.8) имеем

$$s_i = \sqrt{\frac{\omega'}{1-\omega}} \tag{2.15}$$

Дифференцируя (1.4), получаем

$$\frac{\omega'}{1-\omega} = s_i^2 = 3\bar{\mu} - \frac{1}{\sigma_i}\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{1}{\sigma_i}\left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right) \tag{2.16}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям сил и деформаций перед потерей устойчивости оболочки ($T_1 = hX_x$, $S = hX_y$, ...), преобразуем (2.14) к виду

$$(1-\bar{z}_0)^2 - \frac{4E}{E - d\sigma_i / d\varepsilon_i}(1-\bar{z}_0) + \frac{4E}{E - d\sigma_i / d\varepsilon_i}\left[1 - (1-\omega)\frac{e_{xx}\,\delta T_1 + e_{yy}\,\delta T_2 + e_{xy}\,\delta S}{\bar{\varkappa}_1 T_1 + \bar{\varkappa}_2 T_2 + 2\bar{\tau} S}\right] = 0 \tag{2.17}$$

где обозначено $E = 3G$.

Разрешая это квадратное уравнение относительно $\bar{z}_0 = 2z_0 / h$, находим толщину слоя области $\Pi \rightarrow \Pi$, отнесенную к толщине оболочки

$$\frac{1-\bar{z}_0}{2} = \frac{1}{h}\left(\frac{h}{2} - z_0\right) = \frac{E - \sqrt{E\sigma_i'(1+\varphi)}}{E - \sigma_i'} \tag{2.18}$$

Здесь величина φ определяется выражением

$$\varphi = \frac{E - \sigma_i'}{\sigma_i'}(1-\omega)\frac{e_{xx}\,\delta T_1 + e_{yy}\,\delta T_2 + e_{xy}\,\delta S}{T_1\bar{\varkappa} + T_2\bar{\varkappa}_2 + 2S\bar{\tau}} \tag{2.19}$$

и является инвариантой преобразования осей координат x, y серединной поверхности путем поворота около оси z, так как стоящие в числителе и знаменателе билинейные формы являются инвариантными.

Мы получили следующий результат: области $\Pi \rightarrow \Pi$ и $\Pi \rightarrow У$, получающиеся после потери устойчивости оболочки, разделяются поверхностью, имеющей уравнение (2.18); положение этой поверхности внутри толщин оболочки зависит в общем случае как от напряженного и деформированного ее состояния до потери устойчивости, так и от формы устойчивости, а именно от отношения работы дополнительно возникающих в серединной поверхности сил на деформациях ее в основном состоянии $e_{xx}\delta T_1 + e_{yy}\delta T_2 + e_{xy}\delta S$ к работе проекции на нормаль сил T_1, T_2, S, дополнительно возникающей при потере устойчивости основного состояния, вследствие искривления серединной поверхности оболочки $T_1\bar{\varkappa}_1 + T_2\bar{\varkappa}_2 + 2S\bar{\tau}$.

Переходим к подсчету изгибающих и крутящих моментов, возникающих от системы напряжений (2.11), (2.18). По определению имеем

$$\delta M_1 = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \delta X_x z\,dz, \qquad \delta M_2 = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \delta Y_y z\,dz, \qquad \delta H = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \delta X_y z\,dz \tag{2.20}$$

Вычисления дают

$$\frac{24}{h^2\sigma_i}\left(\delta M_1 - \frac{1}{2}\delta M_2\right) = -9(\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})(1-\bar{z}_0^2)\,\varepsilon_1 - 6\left[\bar{\mu}_0 + \bar{\mu} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})\,\bar{z}_0^3\right]\bar{\varkappa}_1 + $$
$$+ s_i\left(a - \frac{1}{2}b\right)(\bar{z}_0^3 - 3\bar{z}_0 + 2)\,\bar{\varkappa}$$

$$\frac{24}{h^2\sigma_i}\left(\delta M_2 - \frac{1}{2}\delta M_1\right) = -9(\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})(1-\bar{z}_0^2)\,\varepsilon_2 - 6\left[\bar{\mu}_0 + \bar{\mu} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})\,\bar{z}_0^3\right]\bar{\varkappa}_2 + $$
$$+ s_i\left(b - \frac{1}{2}a\right)(\bar{z}_0^3 - 3\bar{z}_0 + 2)\,\bar{\varkappa} \tag{2.21}$$

$$\frac{24}{h^2\sigma_i}\delta H = -6(\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})(1 - z_0^2)\,\varepsilon_3 - 4\left[\bar{\mu}_0 + \bar{\mu} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})\,\bar{z}_0^3\right]\bar{\tau} + s_i c\,(\bar{z}_0^3 - 3\bar{z}_0 + 2)\,\bar{\varkappa}$$

Отсюда также можно получить соотношение, аналогичное (17,2), но уже кубическое относительно $\bar{z}_0$, и вместо величины φ войдет новая величина, содержащая отношение

$$\frac{e_{xx}\,\delta M_1 + e_{yy}\,\delta M_2 + e_{xy}\,\delta H}{T_1\bar{\varkappa}_1 + T_2\bar{\varkappa}_2 + 2S\bar{\tau}}$$

Таким образом для общего случая потери устойчивости связи между вариациями результирующих сил и моментов и вариациями деформаций и параметров кривизны и кручения или в конечном счете вариациями трех перемещений определяются соотношениями (2.13) и (2.21), причем вместо величины $\bar{z}_0$ должно быть внесено ее выражение (2.10).

Пять величин: вариации трех компонент перемещения u, v, w и вариации двух перерезывающих сил: N_1, N_2, должны удовлетворять пяти дифференциальным уравнениям равновесия оболочки в вариациях.

Все полученные выше соотношения остаются справедливыми как при упруго-пластической деформации, так при чисто упругой; в последнем случае нужно только положить

$$\omega(\varepsilon_i) \equiv 0$$

Отметим интересные особенности выражений (2.13), (2.21).

1°. Если в пределе упругости вариации сил $\delta T_1, \delta T_2, \delta S$ зависят только от деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, а вариации моментов $\delta M_1\, \delta M_2\, \delta H$ — только от искривлений $\varkappa_1, \varkappa_2, \tau$, то за пределами упругости те и другие зависят как от деформаций, так и от искривлений.

2°. Если в пределе упругости жесткости оболочки при растяжении и изгибе постоянны и зависят лишь от толщины стенок и модуля упругости то за пределами упругости они переменны и зависят как от конструкции оболочки, так и от действующих сил.

§ 3. Случай, когда потеря устойчивости не сопровождается изменением сил, лежащих в срединной поверхности оболочки

Полагая

$$\delta T_1 = \delta T_2 = \delta S = 0 \tag{3.1}$$

находим соответственно из (2.19) и (2.18)

$$\varphi = 0, \qquad \frac{1}{2}\,(1 - \bar{z}_0) = \frac{1}{h}\left(\frac{h}{2} - z_0\right) = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{d\sigma_i / d\varepsilon_i}} \tag{3.2}$$

В этом случае, как видим, поверхность, разделяющая области $П \to П$ и $П \to У$, не зависит от формы потери устойчивости и определяется только напряженным состоянием до потери устойчивости, а именно инвариантом $E'' = d\sigma_i / d\varepsilon_i$, т. е. углом наклона кривой $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ в каждой точке оболочки; если интенсивность напряжений σ_i до выпучивания одинакова в любой точке, то граница областей $П \to П$ и $П \to У$ представляет собой поверхность, параллельную срединной поверхности оболочки.

Принимая во внимание соотношения (1.7), (2.8), (2.15), имеем

$$\begin{gathered} s_i\left(a - \frac{1}{2}\,b\right) = \frac{1}{\sigma_i}\left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right)\left(\bar{X}_x - \frac{1}{2}\,\bar{Y}_y\right), \qquad s_i c = \frac{1}{\sigma_i}\left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right)\bar{X}_y \\ s_i\left(b - \frac{1}{2}\,a\right) = \frac{1}{\sigma_i}\left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right)\left(\bar{Y}_y - \frac{1}{2}\,\bar{X}_x\right), \qquad \bar{\varkappa} = \bar{\varkappa}_1\,\bar{X}_x + \bar{\varkappa}_2\,\bar{Y}_y + 2\bar{\tau}\,\bar{X}_x \end{gathered} \tag{3.3}$$

где величины

$$\overline{X}_x = \frac{X_x}{\sigma_i}, \qquad \overline{Y}_y = \frac{Y_y}{\sigma_i}, \qquad \overline{X}_y = \frac{X_y}{\sigma_i}$$

представляют собой напряжения, отнесенные к их интенсивности перед потерей устойчивости, так что

$$\overline{X}_x^2 + \overline{Y}_y^2 - \overline{X}_x \overline{Y}_y + 3\overline{X}_y^2 = 1$$

На основании (3.1) находим из (2.13) выражения деформаций серединной поверхности оболочки

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_1 &= \frac{(\mu_0-\mu)(1-\bar{z}_0^2)}{2[\mu_0+\mu+(\mu_0-\mu)\bar{z}_0]}\bar{\varkappa}_1 + \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right)\frac{(1-\bar{z}_0)^2(\overline{X}_x - \frac{1}{2}\overline{Y}_y)}{6[\mu_0+\mu+(\mu_0-\mu)\bar{z}_0]}\bar{\varkappa} \\
-\varepsilon_2 &= \frac{(\mu_0-\mu)(1-\bar{z}_0^2)}{2[\mu_0+\mu+(\mu_0-\mu)\bar{z}_0]}\bar{\varkappa}_2 + \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right)\frac{(1-\bar{z}_0)^2(\overline{Y}_y - \frac{1}{2}\overline{X}_x)}{6[\mu_0+\mu+(\mu_0-\mu)\bar{z}_0]}\bar{\varkappa} \\
-\varepsilon_3 &= \frac{(\mu_0-\mu)(1-\bar{z}_0^2)}{2[\mu_0+\mu+(\mu_0-\mu)\bar{z}_0]}\bar{\tau} + \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right)\frac{(1-\bar{z}_0)^2\overline{X}_y}{4[\mu_0+\mu+(\mu_0-\mu)\bar{z}]}\bar{\varkappa}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

В противоположность случаю упругой потери устойчивости здесь наблюдается следующее явление: если потеря устойчивости оболочки за пределами упругости происходит при неизменных силах в серединной поверхности, то она сопровождается деформациями серединной поверхности, пропорциональными получающимся искривлениям.

Внося полученные значения деформаций в выражение изгибающих моментов (2,21) и собирая подобные члены, получим

$$\begin{aligned}
\frac{24}{h^3}\left(\delta M_1 - \frac{1}{2}\delta M_2\right) &= -12\mu_0(1-\psi)\bar{\varkappa}_1 + 12\mu_0(1-\chi)\left(\overline{X}_x - \frac{1}{2}\overline{Y}_y\right)\bar{\varkappa} \\
\frac{24}{h^3}\left(\delta M_2 - \frac{1}{2}\delta M_1\right) &= -12\mu_0(1-\psi)\bar{\varkappa}_2 + 12\mu_0(1-\chi)\left(\overline{Y}_y - \frac{1}{2}\overline{X}_x\right)\bar{\varkappa} \\
\frac{24}{h^3}\delta H &= -8\mu_0(1-\psi)\bar{\tau} + 12\mu_0(1-\chi)\overline{X}_y\bar{\varkappa}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
8\mu_0\psi &= \frac{3(\mu_0-\mu)^2(1-\bar{z}_0^2)}{\mu_0+\mu+(\mu_0-\mu)\bar{z}_0} + 4(\mu_0-\mu)(1-\bar{z}_0^3) \\
12\mu_0\chi &= 12\mu_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right)\left[\frac{3(\mu_0-\mu)(1-\bar{z}_0^2)(1-\bar{z}_0)^2}{\mu_0+\mu+(\mu_0-\mu)\bar{z}_0} + 2(\bar{z}_0^3 - 3\bar{z}_0 + 2)\right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Введем теперь в рассмотрение величины

$$K = \frac{4E\, d\sigma_i/d\varepsilon_i}{(\sqrt{E} + \sqrt{d\sigma_i/d\varepsilon_i})^2}, \qquad k = \frac{K}{E} \tag{3.7}$$

Первая представляет собой обобщение модуля Кармана на случай сложного напряженного состояния, вторая — относительный модуль.

На основании (1.4) и (3.2) имеем

$$\mu_0 - \mu = \mu_0\omega, \qquad \bar{z}_0 = -1 + \sqrt{k}$$

и, следовательно, функции ψ и χ могут быть выражены через функцию разупрочнения ω и относительный модуль k. После довольно громоздких преобразований получим

$$\psi = \omega\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)\left[\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)^2+\frac{3}{4}\frac{k}{1-\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)\omega}\right], \qquad \chi = k+\psi \quad (3.8)$$

Разрешая систему (3.5) относительно величин изгибающих моментов, получим окончательно основные формулы

$$\begin{aligned} \frac{\delta M_1}{D} &= -(1-\psi)\left(\varkappa_1+\frac{1}{2}\varkappa_2\right)+\frac{3}{4}(1-\psi-k)\overline{X}_x(\overline{X}_x\varkappa_1+\overline{Y}_y\varkappa_2+2\overline{X}_y\tau) \\ \frac{\delta M_2}{D} &= -(1-\psi)\left(\varkappa_2+\frac{1}{2}\varkappa_1\right)+\frac{3}{4}(1-\psi-k)\overline{Y}_y(\overline{X}_x\varkappa_1+\overline{Y}_y\varkappa_2+2\overline{X}_y\tau) \qquad (3.9) \\ \frac{\delta H}{D} &= -\frac{1}{2}(1-\psi)\tau+\frac{3}{4}(1-\psi-k)\overline{X}_y(\overline{X}_x\varkappa_1+\overline{Y}_y\varkappa_2+2\overline{X}_y\tau) \end{aligned}$$

где D означает обычную цилиндрическую жесткость оболочки

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0.5$.

Укажем некоторые следствия полученных соотношений.

1. Если характеристика материала оболочки $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ имеет резко выраженную площадку текучести, так что в некоторой точке интенсивность напряжения $\sigma_i = \sigma_s$ и $d\sigma_i / d\varepsilon_i = 0$, то обобщенный модуль Кармана в этой точке обращается в нуль, но в общем случае оболочка все же не теряет жесткости полностью, так как при этом $k = 0$, $\psi = \omega < 1$.

Наименьшая жесткость будет соответствовать концу площадки текучести, когда разупрочнение имеет наибольшее из всех других значений на площадке текучести. Исключение составляют лишь некоторые частные случаи, к числу которых относится и задача Кармана об устойчивости стержня.

2. Возникающие при потере устойчивости изгибающие моменты являются линейными однородными функциями искривлений и имеют потенциал

$$W = \frac{D}{2}\left[(1-\psi)(\varkappa_1^2+\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_1^2+\tau^2)-\frac{3}{4}(1-\psi-k)(\overline{X}_x\varkappa_1+\overline{Y}_y\varkappa_2+2\overline{X}_y\tau)^2\right]$$

$$\delta M_1 = -\frac{\partial W}{\partial \varkappa_1}, \qquad \delta M_2 = -\frac{\partial W}{\partial \varkappa_2}, \qquad \delta H = -\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial \tau} \qquad (3.10)$$

Функция W представляет собой работу изгибающих моментов на получающихся вследствие потери устойчивости искривлениях серединной поверхности, отнесенную к единице площади серединной поверхности, так что полная работа будет равна

$$\iint W\,df$$

Отсюда вытекает возможность применения метода Тимошенко к исследованию упруго-пластической устойчивости оболочки.

3. Как показывают вторые слагаемые правых частей соотношений (3.9), жесткость оболочки при потере устойчивости за пределом упругости зависит как от степени пластической деформации перед потерей устойчивости, так и от соотношения между действующими напряжениями X_x, Y_y, X_y.

Исключение составляют те случаи, когда перед потерей устойчивости имеет место соотношение

$$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \qquad \sigma_i = A\varepsilon_i$$

справедливое, вообще говоря, только в пределах упругости, причем $A = E$.

Однако, для некоторых материалов характеристика $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ может иметь точки, где касательная к ней проходит через начало координат, так что $A < E$; в этих точках

$$\omega = \frac{4(1-\sqrt{k})}{(2-\sqrt{k})^2}, \qquad 1-\psi = k = \frac{4A}{(\sqrt{E}+\sqrt{A})^2}$$

Формулы (3.9) в этом случае показывают, что жесткость оболочки пропорциональна модулю K и критические силы получаются из упругих их значений путем замены модуля.

4. Силы T_1, T_2, S на деформациях серединной поверхности ε_1, ε_2, $\gamma = 2\varepsilon_3$ совершают работу, которая на основании (3.4) или (2.2) равна

$$T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + 2S\varepsilon_3 = z_0(T_1\varkappa_1 + T_2\varkappa_2 + 2S\tau)$$

Если устойчивость рассматривается по методу Тимошенко, эта величина может быть опущена в выражении работы внутренних сил, причем также должна быть опущена равная ей величина работы контурных (внешних) сил на перемещениях, соответствующих деформациям ε_1, ε_2, ε_3, т. е. работа внешних сил должна вычисляться лишь на перемещениях, возникающих за счет искривленной серединной поверхности.

§ 4. Устойчивость пластинок

Пусть x, y — декартовы координаты в серединной плоскости пластинки и $w(x, y)$ — прогиб ее, получающийся в результате потери устойчивости. Кривизны, как известно, будут выражаться формулами

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \tag{4.1}$$

Работа контурных сил на перемещениях, получающихся вследствие искривления серединной поверхности, равна

$$-\frac{1}{2}\iint\left[T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + T_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2S\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]dx\,dy =$$
$$= -\frac{h}{2}\iint \sigma_i(\overline{X}_x w_x^2 + \overline{Y}_y w_x^2 + 2\overline{X}_y w_x w_y)\,dx\,dy \tag{4.2}$$

и, следовательно, прирост (вариация) полной энергии деформаций пластинки за счет потери устойчивости имеет выражение

$$J = \iint\left[W + \frac{h}{2}\sigma_i(\overline{X}_x w_x^2 + \overline{Y}_y w_y^2 + 2\overline{X}_y w_x w_y)\right]dx\,dy \tag{4.3}$$

Условие равенства нулю этой величины

$$J = 0 \tag{4.4}$$

представляет собой обобщение уравнения Тимошенко для случая пластических деформаций.

По первому приближению равновесие пластинки после потери устойчивости является безразличным, т. е.

$$\delta J = 0$$

Чтобы доказать это положение, достаточно показать, что из условия (4.4) вытекает дифференциальное уравнение равновесия пластинки после потери устойчивости и граничные условия. Варьируя (4.3), получим на основании (3.10)

$$\delta J = \iint \Big[-\delta M_1 \delta \varkappa_1 - \delta M_2 \delta \varkappa_2 - 2\delta H\, \delta\tau + h\sigma_i (\overline{X}_x w_x + \overline{X}_y w_y) \delta w_x +$$

$$+ h\sigma_i (\overline{Y}_y w_y + \overline{X}_y w_x)\delta w_y \Big] dx\,dy =$$

$$= -\iint \Big[\frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \delta H}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial y^2} + h\sigma_i (\overline{X}_x \varkappa_1 + \overline{Y}_y \varkappa_2 + 2\overline{X}_y \tau) \Big] \delta w\, dx\,dy -$$

$$- \int \Big\{ (\delta M_1 l + \delta H m)\delta w_x + (\delta M_2 m + \delta H l)\delta w_y -$$

$$- \Big[h\sigma_i (\overline{X}_\nu w_x + \overline{Y}_\nu w_y) + \Big(\frac{\partial \delta M_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta H}{\partial y}\Big) l + \Big(\frac{\partial \delta M_2}{\partial y} + \frac{\partial \delta H}{\partial x}\Big) m \Big] \delta w \Big\} ds = 0 \quad (4.5)$$

Здесь l, m — направляющие косинусы нормали к линии контура пластинки с осями координат, $\overline{X}_\nu$, $\overline{Y}_\nu$ — напряжения на контуре

$$\overline{X}_\nu = \overline{X}_x l + \overline{X}_y m, \qquad \overline{Y}_\nu = \overline{Y}_y m + \overline{X}_y l$$

а величины

$$\frac{\partial \delta M_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta H}{\partial x} = \delta N_1, \qquad \frac{\partial \delta M_2}{\partial y} + \frac{\partial \delta H}{\partial x} = \delta N_2$$

представляют собой перерезывающие силы.

Вследствие произвольности вариаций δw и $\partial \delta w / \partial \nu = \delta w_x l + \delta w_y m$ из (4.5) находим как дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \delta H}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial y^2} + h\sigma_i (\overline{X}_x \varkappa_1 + \overline{Y}_y \varkappa_2 + 2\overline{X}_y \tau) = 0 \qquad (4.6)$$

так и граничные условия кинематического характера, или смешанные, или в форме условий Кирхгофа, т. е. обычные для пластинок.

В общем случае силы T_1, T_2, S являются известными функциями координат x, y и, следовательно, напряжения

$$X_x = \frac{T_1}{h}, \qquad Y_y = \frac{T_2}{h}, \qquad X_y = \frac{S}{h}$$

и величины φ и k являются также переменными. Принимая во внимание равенства (3.9) и (4.1), заключаем, что уравнение равновесия (4.6) будет однородным линейным дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами, содержащим все возможные производные по x и y от четвертого до второго порядка.

Напишем это уравнение в явном виде для случая, когда силы, действующие в серединной плоскости, постоянны. За оси координат x, y возьмем главные оси напряжений, так как последние будут прямолинейными.

В этом случае, не уменьшая общности, можно положить касательное напряжение X_y равным нулю. Из (3.9) имеем

$$\frac{\delta M_1}{D}=-(1-\psi)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{3}{4}(1-\psi-k)\,X_x\left(\overline{X}_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\overline{Y}_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\delta M_2}{D}=-(1-\psi)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{3}{4}(1-\psi-k)\,\overline{Y}_y\left(X_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\overline{Y}_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{4.7}$$

$$\frac{\delta H}{D}=-\frac{1}{2}(1-\psi)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

Внося эти выражения в (4.6), находим основное дифференциальное уравнение устойчивости (обобщение уравнения Брайана)

$$\left(1-\frac{3}{4}\frac{1-\psi-k}{1-\psi}\overline{X}_x{}^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(1-\frac{3}{4}\frac{1-\psi-k}{1-\psi}\overline{Y}_y\overline{X}_x\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+$$

$$+\left(1-\frac{3}{4}\frac{1-\psi-k}{1-\psi}\overline{Y}_y{}^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{h\sigma_i}{(1-\psi)\,D}\left(X_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+Y_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0 \tag{4.8}$$

Величины ψ и k являются функциями интенсивности напряжений и могут быть вычислены для данной интенсивности σ_i, если характеристика материала пластинки $\sigma_i=\sigma_i(\varepsilon_i)$ задана по формулам (3.7), (3.8).

Если под действием заданных сил пластинка не слишком сильно выходит за предел упругости, так что σ_i мало отличается от предела текучести материала, σ_s, функция ψ будет весьма малой величиной и ею можно пренебречь. Напротив, величина обобщенного модуля Кармана k, равная 1, в пределе упругости может весьма сильно уменьшаться в соответствии с весьма сильным изменением модуля $d\sigma_i/d\varepsilon_i$ в зоне перехода к пределу текучести.

Обобщенное уравнение Тимошенко (4.4) для равномерно напряженных пластинок принимает вид

$$(1-\psi)\iint(\varkappa_1{}^2+\varkappa_2{}^2+\varkappa_1\varkappa_2+\tau^2)\,dx\,dy-\frac{3}{4}(1-\psi-k)\iint(\overline{X}_x\varkappa_1+\overline{Y}_y\varkappa_2)^2\,dx\,dy+$$

$$+\frac{h\sigma_i}{D}\iint(X_x w_x{}^2+\overline{Y}_y w_y{}^2)\,dx\,dy=0 \tag{4.9}$$

Легко видеть, что трудности отыскания критических сил по уравнению (4.8) или (4.9) не намного больше, чем при решении упругой задачи. Усложнение состоит а том, что искомое критическое напряжение (например, σ_i) неявно входит в коэффициенты всех членов уравнения (4.8) или (4.9), в то время как для упругой задачи оно является множителем лишь для одного из слагаемых. Эту трудность легко обойти, если вместо критического напряжения $\sigma_{i\,\text{кр}}$, соответствующего данным размерам пластинки, искать, наоборот, критическое значение какого-нибудь характерного размера, соответствующего данной величине σ_i.

Пусть l будет характерный размер пластинки в плане. По аналогии со стержнем назовем условно гибкостью пластинки по отношению к размеру l величину

$$\lambda=\frac{l}{h}\sqrt{12(1-\nu^2)} \tag{4.10}$$

т. е. гибкость полоски пластинки длиной l и шириной 1.

Обозначая безразмерные координаты точки пластинки через

$$\bar{x}=\frac{x}{l}, \qquad \bar{y}=\frac{y}{l}$$

уравнение (4.8) можно привести к виду

$$\frac{(1-\psi)E}{\sigma_i}\left(\Phi_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4}+2\Phi_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^2\partial \bar{y}^2}+\Phi_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4}\right)-\lambda^2\left(\bar{X}_x\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}+Y_y\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2}\right)=0 \qquad (4.11)$$

а уравнение (4.9) разрешить относительно λ^2

$$\lambda^2=\frac{\Psi E}{\sigma_i}\frac{\iint\left[\Phi_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}\right)^2+2\Phi_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2}+\Phi_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}\,\partial \bar{y}}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2}\right]dx\,dy}{-\bar{X}_x\iint\left(\frac{dw}{\partial \bar{x}}\right)^2dx\,dy-\bar{Y}_y\iint\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{y}}\right)^2dx\,dy} \qquad (4.12)$$

где

$$\Phi_{11}=1-\frac{3}{4}\,\frac{1-\psi-k}{1-\psi}\,\bar{X}_x^2, \qquad \Phi_{22}=1-\frac{3}{4}\,\frac{1-\psi-k}{1-\psi}\,Y_y^2$$

$$\Phi_{12}=1-\frac{3}{4}\,\frac{1-\psi-k}{1-\psi}\,\bar{X}_x\bar{Y}_y, \qquad \Psi=1-\psi$$

задача сводится к отысканию характеристических значений параметра λ.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

1. *Устойчивость сжатой полосы.* Полоса, длина которой l значительно больше ширины b, сжата в продольном направлении напряжением $-X_x$, два других напряжения равны нулю $Y_y=X_y=0$; длинные края свободны от нагрузки. Имеем

$$-\bar{X}_x=1, \qquad X_x=\sigma_i$$

Так как изгибающий δM_2 и крутящий δH моменты на длинных краях $y=0$, $y=b$) обращаются в нуль, то вследствие малости ширины их можно считать равными нулю всюду.

Из (4.7) находим

$$\tau=0, \qquad \varkappa_2=-\frac{1}{2}\varkappa_1, \qquad \delta M_1=-\frac{3}{4}\,kD\varkappa_1 \qquad (4.13)$$

Из (4.6) получаем

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4}+\frac{4\sigma_i}{3Ek}\lambda^2\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2}=0 \qquad (4.14)$$

Если известно характеристическое значение параметра

$$\gamma^2=\frac{4\sigma_i}{3Ek}\lambda^2$$

соответствующее заданным краевым условиям на концах $\bar{x}=0$, $\bar{x}=1$, то критическая гибкость становится известной:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda_{\text{кр}}=\gamma_{\text{кр}}\sqrt{\frac{E}{\sigma_i}k} \qquad (4.15)$$

Так, для свободно опертой полосы $\gamma_{\text{кр}}=\pi$ и формула (4.15) совпадает с результатами Кармана-Энгессера.

2. *Цилиндрическая форма потери устойчивости.* Если поперечный размер b прямоугольной пластинки достаточно велик по сравнению с толщиной h и края $y=0$, $y=b$ свободны, или, если размер b значительно больше

длины l, так что по принципу Сен-Венана краевые условия на сторонах $y=0$, $y=b$ не влияют на деформацию пластинки, форма потери устойчивости будет цилиндрическая. Полагая в (4.11)

$$\overline{X}_x=-1, \qquad \overline{Y}_y=0, \qquad w=w(\overline{x})$$

получаем уравнение

$$\frac{E(1-\psi+3k)}{4\sigma_i}\frac{d^4w}{dx^4}+\lambda^2\frac{d^2w}{dx^2}=0 \tag{4.16}$$

Находя критическое значение параметра

$$\gamma^2=\frac{4\sigma_i}{E(1-\psi+3k)}\lambda^2$$

соответствующее краевым условиям на сторонах $\overline{x}=0$, $\overline{x}=1$, получаем критическую гибкость

$$\lambda_{\text{кр}}=\gamma_{\text{кр}}\sqrt{\frac{E(1-\psi+3k)}{4\sigma_i}} \tag{4.17}$$

Для свободно опертых сторон имеем $\gamma_{\text{кр}}=\pi$.

3. *Устойчивость равномерно сжатых пластин произвольной форм в плане.* Полагая по условию задачи

$$X_x=Y_y=-\sigma_i, \qquad \overline{X}_x=\overline{Y}_y=-1$$

преобразуем дифференциальное уравнение (4.11) к виду

$$\nabla^4w+\gamma^2\nabla^2w=0, \qquad \gamma^2=\frac{4\sigma_i}{E(1-\psi+3k)}\lambda^2 \tag{4.18}$$

Это уравнение отличается от известного уравнения, определяющего упругие формы потери устойчивости, лишь выражением параметра γ, и потому характеристические числа $\gamma_{\text{кр}}$ будут те же, что и в упругих задачах. Следовательно, общее решение поставленного вопроса дается формулой

$$\lambda_{\text{кр}}=\gamma_{\text{кр}}\sqrt{\frac{E(1-\psi+3k)}{4\sigma_i}} \tag{4.19}$$

причем числа $\gamma_{\text{кр}}$ нужно брать из решения упругих задач. Например, для круглой пластинки радиуса l, защемленной по контуру, имеем $\gamma_{\text{кр}}=3.8317$.

4. *Устойчивость свободно опертой прямоугольной пластинки, сжатой в одном направлении.* Пластинка, ограниченная контуром

$$x(x-a)y(y-b)=0$$

равномерно сжата вдоль оси x. Имеем

$$\overline{Y}_y=0 \qquad \overline{X}_x=-1, \qquad \sigma_i=-X_x$$

Полагая в соответствии с граничными условиями задачи

$$w=B\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}$$

находим из обобщенного уравнения Тимошенко (4.12)

$$\lambda=\frac{\pi l}{a}\sqrt{\frac{E(1-\psi)}{\sigma_i}\left[\frac{1-\psi+3k}{4(1-\psi)}m^2+\frac{a^4}{m^2b^4}+\frac{2a^2}{b^2}\right]} \tag{4.20}$$

Рассмотрим вначале пластинку, бесконечно длинную в направлении сжатия $a=\infty$. В качестве характерного размера l можно взять ширину b. Число полуволн m будет бесконечно велико и длина полуволны a' будет

$$a'=\left(\frac{a}{m}\right)_{\substack{a=\infty\\ m=\infty}} \qquad l=b$$

Имеем

$$\lambda=\pi\sqrt{\frac{E(1-\psi)}{\sigma_i}\left[\frac{1-\psi+3k}{4(1-\psi)}\left(\frac{b}{a'}\right)^2+\left(\frac{a'}{b}\right)^2+2\right]}$$

и, следовательно, наименьшая гибкость соответствует длине волны

$$a'=b\sqrt[4]{\frac{1-\psi+3k}{4(1-\psi)}} \tag{4.21}$$

и равна

$$\lambda_{\text{кр}}=\pi\sqrt{\frac{2E(1-\psi)}{\sigma_i}\left(1+\sqrt{\frac{1-\psi+3k}{4(1-\psi)}}\right)} \tag{4.22}$$

Из (4.21) видно, что каждому критическому напряжению σ_i соответствует своя особая длина волны и, например, на начале площадки текучести материала она может быть на 30—40% меньше, чем на пределе пропорциональности. Как видно из (4.20), для пластинки с произвольным отношением сторон a, b критическое число полуволн равно одному из целых чисел, соседних в натуральном ряду и удовлетворяющих неравенству

$$m+1>\frac{a'a}{b^2}>m>0$$

Для квадратной пластинки $a=b=l$ имеем $m=1$ и

$$\lambda_{\text{кр}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{\sigma_i}[13(1-\psi)+3k]} \tag{4.23}$$

Нет надобности еще увеличивать число примеров на устойчивость сжатых пластинок, поскольку метод решения задач остается общим и мало чем отличается от решения соответствующих вопросов об упругой устойчивости не только по ходу выкладок, но даже и по возможным формам потери устойчивости в смысле вида функции $w(x, y)$. Точное или, во всяком случае, приближенное значение критической гибкости или критических сил мы получим всегда, если подставим, например, выражение прогиба $w(x, y)$, принимаемое для упругой задачи, в обобщенное условие Тимошенко (4.12). Так, мы получим точное выражение критических сил и гибкости для прямоугольной опертой пластинки, сжатой в двух направлениях, если положим

$$w=B\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

и подберем соответствующие значения чисел m, n.

§ 5. Устойчивость цилиндрической оболочки, сжатой внешним давлением и осевой силой

Рассмотрим цилиндрическую форму потери устойчивости цилиндрической оболочки под действием равномерного внешнего давления p и равномерно распределенной осевой силы. Ось x направлена по образующей цилиндра, ось y по касательной к направляющей. Напряжения X_x, Y_y предполагаем сжимающими (отрицательными).

По условию задачи имеем

$$\varkappa_1 = \tau = 0, \qquad X_y = 0, \qquad \overline{X}_x = \frac{X_x}{\sqrt{X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2}}, \qquad \overline{Y}_y = \frac{Y_y}{\sqrt{X_x^2 - X_x Y_y + Y_y^2}}$$

Из формул (3.9) получаем выражение моментов через отличное от нуля искривление $\varkappa_2$

$$\begin{aligned} \delta M_1 &= -\frac{D}{2}\left[1-\psi-\frac{3}{2}(1-\psi-k)\overline{X}_x\overline{Y}_y\right]\varkappa_2 \\ \delta M_2 &= -D\left[1-\psi-\frac{3}{4}(1-\psi-k)\overline{Y}_y^2\right]\varkappa_1 \end{aligned} \qquad \delta H = 0 \qquad (5.1)$$

Жесткость

$$D'' = D\left[1-\psi-\frac{3}{4}(1-\psi-k)\overline{Y}_y^2\right] \qquad (5.2)$$

зависит не только от степени пластической деформации (σ_i, k, ψ), но и от отношения тангенциального и осевого напряжений. Наименьшая жесткость получается при условии, когда величина $\overline{Y}_y^2$ имеет максимум $X_x = \frac{1}{2} Y_y$.

Для круговой оболочки это условие означает, что результирующая осевая сила равна боковому давлению, умноженному на площадь дна цилиндра; оно выполняется, следовательно, в цилиндрах с доньями, подвергнутых внешнему давлению по всей поверхности. Наименьшая жесткость будет

$$D'' = kD$$

т. е. получается путем замены модуля Юнга на обобщенный модуль Кармана K.

В качестве примера рассмотрим полную круговую оболочку радиуса R, подвергнутую постоянному внешнему давлению p и действию осевой сжимающей силы Q, так что

$$Y_y = -p\frac{R}{h}, \qquad X_x = -\frac{Q}{2\pi R h}$$

Соответствующая упругая задача впервые решена М. Леви [12]. Ссылаясь на известную книгу Тимошенко [13], мы выпишем выражение кривизны $\varkappa_2$ через нормальный прогиб w и момента δM_2 без вывода

$$\varkappa_2 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{d^2w}{d\theta^2} + w\right), \qquad \delta M_2 = Rpw = -h\sigma_i \overline{Y}_y w \qquad (5.3)$$

На основании (5.1) дифференциальное уравнение устойчивости будет иметь вид

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{\sigma_i R^2 h}{D''}\, Y_y\right) w = 0$$

и критическое напряжение находится из условия периодичности его решения

$$\frac{\sigma_i R^2 h}{D''}\overline{Y}_y = -3 \tag{5.4}$$

Пользуясь выражением (4.10) для гибкости λ и выбирая в качестве характерного размера длину окружности $l = 2\pi R$, получаем критическую гибкость

$$\lambda_{\text{кр}} = \pi \sqrt{\frac{3E}{\sigma_i}\,\frac{4(1-\psi)-3(1-\psi-k)\overline{Y}_y^2}{-\overline{Y}_y}} \tag{5.5}$$

или в случае равномерного давления по всей поверхности цилиндра $(X_x = \frac{1}{2} Y_y)$

$$\lambda_{\text{кр}} = \pi \sqrt{\frac{6\sqrt{3Ek}}{\sigma_i}} \tag{5.6}$$

и в случае отсутствия осевой силы $(X_x = 0)$

$$\lambda_{\text{кр}} = \pi \sqrt{\frac{3E}{\sigma_i}(1-\psi+3k)}$$

§ 6. Продольная устойчивость полой цилиндрической трубы при действии осевой силы и равномерного бокового давления

Рассмотрим осесимметричные формы продольной потери устойчивости цилиндрической трубы радиуса R. В упругой области с различных точек зрения эта задача изучена Лоренцем [14], Целли, Тимошенко [15] и другими. Сложность ее за пределами упругости состоит в том, что потеря устойчивости сопровождается изменением сил, лежащих в серединной поверхности, и потому вместо простой системы соотношений (3.9) приходится пользоваться общими выражениями сил и моментов по формулам (2.13), (2.18), (2.19), (2.21), причем граница области пластичности z_0 будет функцией формы потери устойчивости, благодаря чему в общем случае дифференциальные уравнения значительно усложняются и являются нелинейными.

Сохраним систему координат § 5. Основное состояние оболочки до потери устойчивости возьмем таким, что осевое сжимающее напряжение $-X_x$ в два раза больше тангенциального $-Y_y$, вызываемого приложенным на боковой поверхности равномерным давлением

$$X_x = 2Y_y, \qquad T_1 = 2T_2, \qquad S = 0 \tag{6.1}$$

Как известно, в пределе упругости выбор величины Y_y не влияет на критическое значение осевого напряжения X_x, а за пределами упругости наше условие вносит принципиальные упрощения в решение задачи. В самом деле, условие (6.1) эквивалентно предположению, что до потери устойчивости тангенциальная деформация $e_{yy} = 0$, как это следует из соотношений (1.1); кроме того, после потери устойчивости имеем

$$\delta T_1 = 0, \qquad \delta S = 0, \qquad \delta T_2 \neq 0 \tag{6.2}$$

Из (2.19) теперь получаем

$$\varphi = 0$$

и, следовательно, граница z_0 упругой и пластической областей, согласно (2.18) оказывается постоянной:

$$\bar{z}_0 = -\frac{\sqrt{E} - \sqrt{d\sigma_i / d\varepsilon_i}}{\sqrt{E} + \sqrt{d\sigma_i / d\varepsilon_i}} = -1 + \sqrt{k} \tag{6.3}$$

Из соотношений (2.13) имеем

$$-\frac{\delta T_2}{h\sigma_i} = 3\left[\bar{\mu}_0 + \bar{\mu} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})\bar{z}_0\right]\varepsilon_1 + \frac{3}{2}(\bar{\mu}_0 - \mu)(1 - z_0^2)\bar{\varkappa}_1 + \frac{3}{8}a^2(1 - z_0)^2\left(\bar{\varkappa}_1 + \frac{1}{2}\bar{\varkappa}_2\right)$$

$$\frac{2\delta T_2}{h\sigma_i} = 3\left[\bar{\mu}_0 + \bar{\mu} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})\bar{z}_0\right]\varepsilon_2 + \frac{3}{2}(\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})(1 - \bar{z}_0^2)\bar{\varkappa}_2 \tag{6.4}$$

$$\delta S = 0, \qquad \varepsilon_3 = 0$$

Искривления $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и деформация ε_2 выражаются через нормальное перемещение w (положительное внутрь оболочки) формулами

$$\varkappa_1 = \frac{2}{h}\bar{\varkappa}_1 = \frac{d^2 w}{ax^2}, \qquad \varkappa_2 = \frac{2}{h}\bar{\varkappa}_2 = \frac{w}{R^2}, \qquad \varepsilon_2 = -\frac{w}{R} \tag{6.5}$$

и, следовательно, равенства (6.4) дают, во-первых,

$$\delta T_2 = -k' E h \frac{w}{R}$$

$$k' = 1 - \frac{1}{2}\omega\left[1 - \bar{z}_0 + \frac{h}{8R}(1 - \bar{z}_0^2)\right] = 1 - \omega\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{k}\right) \tag{6.6}$$

где k — попрежнему относительный обобщенный модуль Кармана, и, во-вторых,

$$-\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right) = \frac{4(\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})(1 - \bar{z}_0^2) + a^2(1 - \bar{z}_0)^2}{8\left[\bar{\mu}_0 + \bar{\mu} + (\bar{\mu}_0 - \bar{\mu})\bar{z}_0\right]}\left(\bar{\varkappa}_1 + \frac{1}{2}\bar{\varkappa}_2\right) \tag{6.7}$$

Формулы (2.21) дают значения для момента δM_1

$$\delta M_1 = -k'' D\left(\varkappa_1 + \tfrac{1}{2}\varkappa_2\right)$$

где коэффициент k'' имеет выражение

$$k'' = 1 - \frac{1}{2}\omega(1 - \bar{z}_0^3) - \frac{1}{4}\left(1 - \omega - \frac{1}{E}\frac{d\sigma_i}{a\varepsilon_i}\right)(2 - 3\bar{z}_0 + \bar{z}_0^3) -$$

$$- \frac{3}{8}\,\frac{\omega(1 - \bar{z}_0^2)}{2 - \omega(1 - \bar{z}_0)}\left[\omega(1 - \bar{z}_0^2) + \left(1 - \omega - \frac{1}{E}\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\right)(1 - \bar{z}_0)^2\right]$$

Учитывая, что на основании (6.3)

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \left(\frac{1 + \bar{z}_0}{1 - \bar{z}_0}\right)^2$$

получим после несложных преобразований

$$K'' = (1 + \bar{z}_0)^2 = k$$

Таким образом

$$\delta M_1 = -kD\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{w}{2R^2}\right) \tag{6.8}$$

Дифференциальное уравнение равновесия элемента оболочки после выпучивания будет

$$\frac{d^2\delta M_1}{dx^2}+T_1\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{\delta T_2}{R}=0 \tag{6.9}$$

Принимая за характерный размер оболочки радиус R и пользуясь выражением (4.10) для гибкости λ, имеем

$$k\frac{d^4w}{d\bar{x}^4}-\lambda^2\frac{X_x}{E}\frac{d^2w}{d\bar{x}^2}+k'\lambda^2 w=0,\qquad \lambda=\frac{R}{h}\sqrt{12(1-\nu^2)}\approx\frac{3R}{h},\qquad \bar{x}=\frac{x}{R} \tag{6.10}$$

причем мы отбросили малые величины порядка h/R по сравнению с 1.

В нашем случае

$$\sigma_i=-\frac{\sqrt{3}}{2}X_x \tag{6.11}$$

и так как коэфициенты k, k' есть функции интенсивности напряжений σ_i, то удобнее выражение (6.10) окончательно переписать в виде

$$k\frac{d^4w}{d\bar{x}^4}+\frac{2\sigma_i}{E\sqrt{3}}\lambda^2\frac{d^2w}{d\bar{x}^2}+k'\lambda^2 w=0 \tag{6.12}$$

Удовлетворяя условию опирания концов трубы

$$w=0,\qquad d^2w/d\bar{x}^2=0$$

находим критическую гибкость

$$\lambda_{\text{кр}}=\frac{E}{\sigma_i}\sqrt{3kk'}=\frac{E}{\sigma_i}\sqrt{3k\left(1-\frac{2-\sqrt{k}}{2}\omega\right)} \tag{6.13}$$

Полученный результат является весьма простым и легко может быть подвергнут экспериментальной проверке, причем надо помнить, что он справедлив строго только в том случае, если труба подвергнута действию осевой силы и бокового давления, так что отношение осевого напряжения к тангенциальному равно 2.

§ 7. Числовые данные для мягкой стали, примененной в опытах Кармана

В этой статье, указывая метод исследования устойчивости, мы не можем подробно останавливаться на анализе многочисленных технически важных задач устойчивости и тем более приводить расчетные формулы, таблицы и графики для всего многообразия сталей, применяемых в технике. Стремясь доказать, что установившийся взгляд о возможности широкого применения формул для упругих критических сил в практике с поправкой на модуль Кармана является в общем совершенно неправильным, мы приведем числовые данные согласно выведенным выше формулам лишь для стали, примененной в опытах Кармана.

Механические свойства стали определяются кривой растяжения, причем модуль Юнга, временное сопротивление, предел пропорциональности и предел текучести соответственно будут

$$E=2.17\times10^6,\qquad \sigma_b=6800,\qquad \sigma_p=2600,\qquad \sigma_s=3250\qquad (\text{в кг}/\text{см}^2)$$

На основании диаграммы растяжения вычислены три первые графы табл. 1 и затем, пользуясь формулами (4.4), (3.7), (3.8), определены величина разупрочнения ω, обобщенный модуль Кармана k и параметр ψ, значения которых помещены в следующих трех графах табл. 1.

Таблица 1

σ_i	$\varepsilon_i\, 10^{+3}$	$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}\, 10^{-6}$	ω	k	ψ
2600	1.20	2.17	0.000	1.000	0.000
2800	1.31	1.98	0.014	0.940	0.007
3000	1.43	1.54	0.034	0.825	0.017
3100	1.51	1.12	0.054	0.685	0.026
3240	1.92	0.06	0.212	0.0805	0.149
3250	2.1∼2.7	0.00	0.285∼0.445	0.000	0.285∼0.445
3260	2.9	0.042	0.482	0.056	0.360
3300	3.3	0.117	0.540	0.141	0.369
3500	4.7	0.140	0.657	0.163	0.456
4000	8.8	0.115	0.790	0.139	0.605

В табл. 2 приведены значения критических гибкостей

$$\lambda = \frac{l}{h}\sqrt{12(1-\nu^2)}$$

для всех выше рассмотренных случаев потери устойчивости пластинок и оболочек, причем для каждого значения критического напряжения σ_i даются три значения гибкостей, в первой строке λ' — точное по нашим формулам, во второй λ'' — приближенное с поправкой на модуль Кармана, в третьей — λ''', вычисленное по формулам теории упругости.

Последнее значение λ''' получается из наших формул, если положить $\omega = 0\,(k=1,\ \psi=0)$.

Таким образом в табл. 2 приведены числовые значения величин гибкостей, вычисленные по данным табл. 1 для следующих случаев;

1°. Стержень Кармана и узкая полоса ($l=a$, $\sigma_i = -X_x$, $Y_y = 0$)

$$\lambda_1' = \lambda_1'' = \pi\sqrt{\frac{Ek}{\sigma_i}}, \qquad \lambda_1''' = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_i}}$$

2°. Широкая пластинка со свободными двумя краями (цилиндрический изгиб; $l=a$, $\sigma_i = -X_x$, $Y_y = 0$)

$$\lambda_2' = \pi\sqrt{\frac{E(1-\psi+3k)}{4\sigma_i}}, \qquad \lambda_2'' = \pi\sqrt{\frac{Ek}{\sigma_i}}, \qquad \lambda_2''' = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_i}}$$

3°. Круглая пластинка, защемленная по контуру при равномерном давлении ($l=R$, $X_x = Y_y = -\sigma_i$)

$$\lambda_3' = 3.84\sqrt{\frac{E(1-\psi+3k)}{4\sigma_i}}, \qquad \lambda_3'' = 3.84\sqrt{\frac{Ek}{\sigma_i}}, \qquad \lambda_3''' = 3.84\sqrt{\frac{E}{\sigma_i}}$$

4°. Длинная узкая пластинка, свободно опертая по всему краю и сжатая в направлении длинной стороны (ширина $b=l$, через a' обозначена длина полуволны; $X_x=-\sigma_i$, $Y_y=0$):

$$\lambda_4'=\pi\sqrt{\frac{2E(1-\psi)}{\sigma_i}\left(1+\sqrt{\frac{1-\psi+3k}{4(1-\psi)}}\right)},\qquad \left(\frac{a'}{b}\right)'=\sqrt[4]{\frac{1-\psi+3k}{4(1-\psi)}}$$

$$\lambda_4''=\pi\sqrt{\frac{4E}{\sigma_i}\sqrt{k}},\qquad \left(\frac{a'}{b}\right)''=\sqrt[4]{k};\qquad \lambda_4'''=\pi\sqrt{\frac{4E}{\sigma_i}},\qquad \left(\frac{a'}{b}\right)'''=1$$

5°. Квадратная свободно опертая пластина, сжатая в одном направлении ($l=a=b$, $X_x=-\sigma_i$, $Y_y=0$):

$$\lambda_5'=\pi\sqrt{\frac{E}{4\sigma_i}[13(1-\psi)+3k]},\quad \lambda_5''=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_i}(1+2\sqrt{k}+k)},\quad \lambda_5'''=\pi\sqrt{\frac{4E}{\sigma_i}}$$

6°. Труба под внешним давлением при отсутствии осевой силы $l=2\pi R$, $X_x=0$, $Y_y=-\sigma_i=-pR/h$):

$$\lambda_6'=\pi\sqrt{\frac{3E}{\sigma_i}(1-\psi+3k)},\qquad \lambda_6''=\pi\sqrt{\frac{12Ek}{\sigma_i}},\qquad \lambda_6'''=\pi\sqrt{\frac{12E}{\sigma_i}}$$

7°. То же при наличии давления p по всей поверхности трубы, т. е. при осевой силе $Q=\pi R^2 p$ $\left(\text{(при этом } l=2\pi R,\ X_x=\frac{1}{2}Y_y=-\frac{pR}{2h}=-\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\right)$:

$$\lambda_7'=\lambda_7''=\pi\sqrt{\frac{12Ek}{\sigma_i}};\qquad \lambda_7'''=\pi\sqrt{\frac{12E}{\sigma_i}}$$

8°. Продольная устойчивость трубы при осевой силе и боковом давлении

$\left(l=R,\ X_x=2Y_y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i\right)$:

$$\lambda_8'=\frac{E}{\sigma_i}\sqrt{3k\left(1-\frac{2-\sqrt{k}}{2}\omega\right)},\qquad \lambda_8''=\frac{E}{\sigma_i}\sqrt{3k},\qquad \lambda_8'''=\frac{E}{\sigma_i}\sqrt{3}$$

Если нанести на графике кривые $\sigma_i=\sigma_i(\lambda)$, все они будут иметь точку возврата на площадке текучести стали $\sigma_i=\sigma_s=3250$ кг/см².

Как правило, приближенная теория с поправочным множителем Кармана дает значительно заниженные значения для критических величин гибкости λ и, напротив, упругая теория — значительно завышенные. Интересно отметить, что почти во всех случаях (исключая квадратную пластинку, для которой $\lambda_5''=81.3$) величины гибкости λ'' в точках возврата обращаются в нуль, что означает полную потерю несущей способности оболочки на пределе текучести по приближенной теории, в то время как на самом деле в большинстве случаев гибкости в точках возврата имеют конечные значения

$$\lambda_2'=30\sim34,\quad \lambda_3'=37\sim42,\quad \lambda_4'=105\sim119,\quad \lambda_5'=119\sim123,\quad \lambda_6'=104\sim118$$

и, следовательно, оболочки сохраняют несущую способность не только на пределе текучести, но и значительно выше. Так при гибкостях

$$\lambda_2=30,\qquad \lambda_3=36,\qquad \lambda_4=85,\qquad \lambda_5=87,\qquad \lambda_6=104$$

оболочки устойчивы при всех напряжениях до $\sigma_i=4000$ кг/см² включительно.

Таблица 2

σ_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
	90.8	90.8	111	181.6	181.6	314	314	1440
2600	90.8	90.8	111	181.6	181.6	314	314	1440
	90.8	90.8	111	181.6	181.6	314	314	1440
	84.8	85.4	104	173	173	296	296	1290
2800	84.8	84.8	103.6	173	175	296	296	1300
	88.5	88.5	108	177	177	306	306	1340
	76.8	78.7	96.1	166	166	273	266	1120
3000	76.8	76.8	91.3	161	161	266	266	1130
	84.5	84.5	103	169	169	293	293	1250
	69.0	72.4	88.4	162	160	251	239	984
3100	69.0	69.0	84.2	151	152	239	239	1000
	83.2	83.2	101.5	166.4	166.4	289	289	1210
	23.0	42.2	51.6	132	136	146	80.5	296
3240	23.0	23.0	28.0	46.2	105	80.5	80.5	328
	81.5	81.5	99.5	163	163	283	283	1155
	0	34—30	41.5—36.6	119—105	123—119	118—104	0	0
3250	0	0	0	0	81.3	0	0	0
	81.3	81.3	99.4	162.6	162.6	282	282	1150
	19.3	36.5	44.5	114	118	126	66.5	206
3260	19.3	19.3	23.6	38.5	100	66.5	66.5	271
	81.1	81.1	99.3	162.2	162.2	281	281	1145
	30.3	41.6	50.9	116.5	119	144	105	318
3300	30.3	30.3	37.0	60.5	110.5	105	105	425
	80.5	80.5	98.3	161.0	161.0	279	279	1130
	31.6	39.7	48.5	106	108	138	108	298
3500	31.6	31.6	38.6	63.2	109.5	109	108	482
	78.3	78.3	95.5	156.6	156.5	271	271	1070
	27.3	33.0	40.2	85.5	87	114	95	210
4000	27.3	27.3	33.4	54.6	100	95	95	350
	73.2	73.2	89.5	146.4	146.4	254	254	935

Табл. 2 указывает на полную несостоятельность приближенной теории устойчивости пластинок и оболочек, в которой учет пластических деформаций производится с помощью поправочного модуля Кармана. Окончательно этот вывод может быть установлен лишь опытом, но, учитывая, что: 1) опыты Кармана дали полное согласие с его теорией устойчивости стержня и 2) предлагаемая здесь теория устойчивости пластинок и оболочек не содержит произвольных гипотез и основана на классических законах пластичности и законах механики, можно с большой степенью достоверности делать его уже теперь.

Поступила в редакцию
2 III 1943

Институт механики
Академии Наук СССР

A. A. ILYUSHIN.—STABILITY OF PLATES AND SHELLS STRESSED BEYOND THE ELASTIC LIMIT

The paper develops a method for investigating the stability of plates and shells stressed beyond the elastic limit. This method is based on the generalized Hencky-Mises equations obtained by Smirnov-Alyaev [9], by Schmidt [10] and by author [11]. It is shown that the Bleich equations for plates[6]

$$D\left(k\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\sqrt{k}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

as well as the Heckeler equation [7] for shells

$$Dk\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+P\frac{d^2 w}{\partial x^2}+\frac{Eh}{R^2}w=0$$

are erroneous.

General relationships are derived between the additional forces, moments and deformations arising when plates and shells exhibit a failing of stability beyond the elastic limit.

On the basis of these relationships the author constructs the differential quations for plates and for certain shells. The solutions of a few problems are given in which the numerical data for steel used in the experiment of Th. Kárman are calculated.

The conclusion is reached that the accommodation of the formulae of elastic stability for stability beyond the elastic limit by introducing the correcting modulus of Kárman is generally erroneous.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bryan C. H. Proc. Math. Soc. 1891. V. 22. [p. 54].
2. Тимошенко С. П. Об устойчивости упругих систем, Киев, 1910.
3. Love-Timpe. § 331. [p. 337]; Reissner H. Z. A. M. M. 1925; Динник А. Н. Устойчивость упругих систем. 1935; Southwell P. Proc. Roy. Soc. 1924. V. 105.
4. Engesser F. Schweiz. Bauzeitung. 1895. [S. 21].
5. Kàrman Th. Mitt. Forschungsarb. 1910. 81.
6. Блейх Ф. Теория и расчет железных мостов. 1931. [Стр. 251].
7. Геккелер И. Статика упругого тела. 1934.
8. Bijlaard. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. V. XVI.
9. Йсследования по теории пластичности. Сборник III под ред. Смирнова-Аляева. ГОНТИ. 1939.
10. Schmidt R. Ingenieur-Archiv. 1932. B. III.
11. Ильюшин А. А. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. Вып. 4; 1944. Т. VIII. Вып. 1.
12. Levy M. Journ. Math. 1884. V. 10.
13. Тимошенко С. П. Вопросы устойчивости упругих систем. Л. 1935.
14. Lorenz H. 1908. B. 52
15. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. 1916.
16. Гартман Ф. Устойчивость инженерных сооружений. Госстройиздат. 1939.