Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

О РАВНОВЕСИИ КОНУСА И КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Г. С. ШАПИРО

(Москва)

Равновесие конуса под действием сосредоточенной силы в вершине было рассмотрено J. Michell [1]. Та же задача для конической оболочки переменной толщины была решена впоследствии H. Neuber [2].

Ниже рассматривается случай осесимметричной деформации конуса или конической оболочки. Нагрузка по боковым коническим поверхностям $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ предположена меняющейся по закону полинома.

Решение можно получить, пользуясь функцией напряжений Галеркина, совпадающей для случая осевой симметрии с функцией Love.

Для бигармонической функции φ принимаем выражение

$$\varphi=\sum_{n=3}^{\infty} r^n\left(A_{n-3}P_n+B_{n-3}P_{n-2}+C_{n-3}Q_n+D_{n-3}Q_{n-2}\right) \tag{1}$$

Здесь r, θ — сферические координаты, $P_n=P_n(\cos\theta)=P_n(z)$ и $Q_n=Q_n(\cos\theta)=Q_n(z)$ — полиномы Лежандра первого и второго рода:

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}z^{n-2k}$$

$$Q_n(z)=\frac{P_n(z)}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}-\sum_{k=1}\frac{1}{k}P_{k-1}(z)P_{n-k}(z)$$

В недавно опубликованной работе [3] Б. Г. Галеркин дал формулы для напряжений, выраженных через функцию φ

$$\begin{aligned}
\widehat{rr}&=\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\sigma\nabla^2\right)F+2(1-\sigma)\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\varphi\\
\widehat{\varphi\varphi}&=\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\sigma\nabla^2\right)F\\
\widehat{\theta\theta}&=\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\sigma\nabla^2\right)F-2(1-\sigma)\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2\varphi\\
\widehat{r\theta}&=-\frac{1}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)+(1-\sigma)\left(\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2\varphi-\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\varphi\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$F=\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

Функция (1) сходна с функциями, использованными Б. Г. Галеркиным для решения задачи о равновесии сферической оболочки [3].

Подставляя (1) в (2), находим для компонентов напряжений

$$\widehat{\theta\theta} = \sum_{n=3}^{\infty} r^{n-3}\left[A_{n-3}L_1(P)+B_{n-3}L_2(P)+C_{n-3}L_1(Q)+D_{n-3}L_2(Q)\right]$$

$$\widehat{r\theta} = \sum_{n=3}^{\infty} r^{n-3}\left[A_{n-3}L_3(P)+B_{n-3}L_4(P)+C_{n-3}L_3(Q)+D_{n-3}L_4(Q)\right] \qquad (3)$$

Здесь

$$L_1(P) = -n\left[\frac{d^2P_{n-1}}{d\theta^2}+(n-1)P_{n-1}\right]$$

$$L_2(P) = -\frac{1}{2n-3}\Big\{2(n-1)\frac{d^2P_{n-1}}{d\theta^2}+(n-2)(2n-1)\frac{d^2P_{n-3}}{d\theta^2}+$$

$$+4(2n-1)(2n-3)(1-\sigma)\sin\theta\frac{dP_{n-3}}{d\theta}+-2(n-1)P_{n-1}$$

$$+[(n-1)-2\sigma(2n-3)](n-2)(2n-1)P_{n-3}\Big\}$$

$$L_3(P) = -n(n-2)\frac{dP_{n-1}}{d\theta}$$

$$L_4(P) = -\frac{1}{2n-3}\Big\{2(n-2)(n-1)\frac{dP_{n-1}}{d\theta}+(n-2)^2(2n-1)\frac{dP_{n-3}}{d\theta}-$$

$$-2(2n-1)(2n-3)(1-\sigma)\left(\cos\theta\frac{dP_{n-2}}{d\theta}-\sin\theta P_{n-2}\right)$$

$$L_1(Q) = -n\left[\frac{d^2Q_{n-1}}{d\theta^2}+(n-1)Q_{n-1}\right] \qquad \text{и т. д.}$$

Пусть на внешней $\theta=\alpha$ и внутренней $\theta=\beta$ поверхностях оболочки нормальное p и касательное t напряжения заданы, соответственно, полиномами

$$p=\sum_{n=3}^{\infty} N_{n-3}r^{n-3}, \qquad t=\sum_{n=3}^{\infty} S_{n-3}r^{n-3}$$

$$p'=\sum_{n=3}^{\infty} N_{n-3}'r^{n-3}, \qquad t'=\sum_{n=3}^{\infty} S_{n-3}'r^{n-3} \qquad (4)$$

Пользуясь (3) и (4), получаем 4 группы уравнений для определения коэффициентов A_{n-3}, B_{n-3}, C_{n-3} и D_{n-3}, причем для каждой из поверхностей $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ можно написать по два уравнения:

$$A_{n-3}L_1(P)+B_{n-3}L_2(P)+C_{n-3}L_1(Q)+D_{n-3}L_2(Q)=N_{n-3}\,(N_{n-3}')$$

$$A_{n-3}L_3(P)+B_{n-3}L_4(P)+C_{n-3}L_3(Q)+D_{n-3}L_4(Q)=S_{n-3}\,(S_{n-3}') \qquad (5)$$

Переходим к частным случаям.

1. *Постоянная нагрузка* $p=N_0$, $t=0$

а) Сплошной конус

Полагаем

$$\varphi = r^3(A_0P_3+B_0P_1)$$

Тогда для напряжений имеем

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{3}{2}A_0(3\cos 2\theta-1)+2B_0[3-(4-5\sigma)\cos 2\theta]$$

$$\widehat{r\theta} = \left[\frac{9}{2}A_0-2(4-5\sigma)B_0\right]\sin 2\theta$$

Коэффициенты A_0 и B_0 определяются из системы

$$\frac{3}{2}(3\cos 2\alpha-1)A_0+2[3-(4-5\sigma)\cos 2\alpha]B_0=N,$$

$$\frac{9}{2}A_0-2(4-5\sigma)B_0=0$$

Отсюда

$$A_0=\frac{2(4-5\sigma)}{15(1+\sigma)}N_0, \qquad B_0=\frac{3}{10(1+\sigma)}N.$$

Напряжения

$$\widehat{\theta\theta}=\widehat{rr}=\widehat{\varphi\varphi}=N_0, \qquad \widehat{r\theta}=0$$

Получен очевидный результат, — материал конуса подвергается всестороннему равномерному растяжению.

б) Оболочка

Полагаем

$$\varphi=r^3(A_0P_3+B_0P_1+C_0Q_3+D_0Q_1)$$

Будем считать нагруженной поверхность $\theta=\alpha$. Коэффициенты A_0, B_0, C_0 и D_0 определяются из системы

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}(3\cos 2\alpha-1)A_0+2[3-(4-5\sigma)\cos 2\alpha]B_0+\sigma(\alpha)=N\\
&\frac{9}{2}\sin 2\alpha A_0-2(4-5\sigma)\sin 2\alpha B_0+\tau(\alpha)=0\\
&\frac{3}{2}(3\cos 2\beta-1)A_0+2[3-(4-5\sigma)\cos 2\beta]\beta_0+\sigma(\beta)=0\\
&\frac{9}{2}\sin 2\beta A_0-2(4-5\sigma)\sin 2\beta B_0+\tau(\beta)=0
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$\tau(\alpha)=\frac{9}{2}\left[\sin 2\alpha Q_0+\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{3\sin\alpha}\right]C_0-$$

$$-\left[2(4-5\sigma)\sin 2\alpha Q_0+2(4-5\sigma)\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}\right]D,$$

$$\sigma(\alpha)=\frac{3}{2}\left[(3\cos 2\alpha-1)Q_0+\frac{3\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{5\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]C_0+$$

$$+\left\{2[3-(4-5\sigma)\cos 2\alpha]Q_0-(4-5\sigma)\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+5(1-2\sigma)\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right\}D.$$

Приравнивая значения коэффициентов A_0 и B_0, найденных сначала из первых, а затем из двух последних уравнений (6), можно преобразовать систему (6) в систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решения этой последней системы, довольно громоздкого, мы не приводим.

В дальнейшем переходим от сферических координат R, θ к цилиндрическим r, z, что позволит сопоставить точные решения с элементарными, найденными по формулам сопротивления материалов[1].

2. *Сплошной конус под действием собственного веса*

Предварительно решим задачу о конусе под действием нормальной гидростатической нагрузки γz. Полагаем

$$\varphi=R^4(A_1P_4+B_1P_2)=A_1\left(z^4-3z^2r^2+\frac{3}{8}r^4\right)+B_1\left(z^4+\frac{1}{2}z^2r^2-\frac{1}{2}r^4\right)$$

---

[1] В отличие от цилиндрической будем в дальнейшем обозначать сферическую координату r через R.

Для напряжений имеем

$$\widehat{rr}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)=2\left[6A_1-(1-14\sigma)B_1\right]z$$

$$\widehat{zz}=\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\sigma)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]=4\left[-6A_1+(8-7\sigma)B_1\right]z$$

$$\widehat{\theta\theta}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma\nabla^2\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]=2\left[6A_1-(1-14\sigma)B_1\right]z$$

$$\widehat{rz}=\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\sigma)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]=2\left[6A_1-(8-7\sigma)B_1\right]r$$

Граничные условия будут

$$\widehat{rr}-\widehat{rz}\operatorname{tg}\alpha=\gamma z,\qquad \widehat{zz}\operatorname{tg}\alpha-\widehat{rz}=\gamma z\operatorname{tg}\alpha \tag{7}$$

Уравнения для определения коэффициентов A_1 и B_1 имеют вид

$$2\left\{6(1-\operatorname{tg}^2\alpha)A_1-\left[(1-14\sigma)-(8-7\sigma)\operatorname{tg}^2\alpha\right]B_1\right\}=\gamma$$

$$6\left[-6A_1+(8-7\sigma)B_1\right]=\gamma$$

Отсюда

$$A_1=\frac{\gamma}{252(1+\sigma)}\left[5(5-7\sigma)-(8-7\sigma)\operatorname{tg}^2\alpha\right],\qquad B_1=\frac{\gamma}{42(1+\sigma)}(4-\operatorname{tg}^2\alpha)$$

Напряжения

$$\widehat{rr}=\widehat{\theta\theta}=\frac{\gamma z}{2}(3-\operatorname{tg}^2\alpha),\qquad \widehat{zz}=\frac{2\gamma z}{3},\qquad \widehat{rz}=-\frac{\gamma r}{3} \tag{8}$$

Налагая на напряжения (8) всесторонние сжимающие напряжения $-\gamma z$ (где γ — объемный вес), находим напряжения в конусе от собственного веса (ось конуса вертикальна)

$$\widehat{zz}=-\frac{\gamma z}{3},\qquad \widehat{rr}=\widehat{\theta\theta}=\widehat{zz}\operatorname{tg}^2\alpha,\qquad \widehat{rz}=-\frac{\gamma r}{3} \tag{9}$$

Формула для напряжений $\widehat{zz}$ совпадает с элементарным решением сопротивления материалов.

Пусть теперь на боковой поверхности конуса касательное напряжение и нормальная составляющая смещения будут равны нулю. Коэффициенты A_1 и B_1 определятся из системы

$$6A_1(4-\operatorname{tg}^2\alpha)-\left[2(9-14\sigma)-(15-14\sigma)\operatorname{tg}^2\alpha\right]B_1=\frac{\gamma}{2}\,\frac{(1-2\sigma)}{(1+\sigma)}$$

$$6A_1(4-\operatorname{tg}^2\alpha)-\left[5(5-7\sigma)-(8-7\sigma)\operatorname{tg}^2\alpha\right]B_1=0$$

Отсюда

$$A_1=\frac{\left[5(5-7\sigma)-(8-7\sigma)\operatorname{tg}^2\alpha\right](1-2\sigma)\gamma}{84(4-\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\sigma^2)},\qquad B_1=\frac{(1-2\sigma)\gamma}{14(1-\sigma^2)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}$$

Для малого раствора конуса можно полагать $\operatorname{tg}^2\alpha=0$, тогда

$$A_1=\frac{5(1-2\sigma)(5-7\sigma)\gamma}{14\cdot 24\cdot(1-\sigma^2)},\qquad B_1=\frac{(1-2\sigma)\gamma}{14(1-\sigma^2)}$$

Нормальное давление p на боковой поверхности конуса в этом случае будет

$$p=-\frac{(1+2\sigma)}{4(1-\sigma)}\gamma z \tag{10}$$

Компоненты напряжений

$$\widehat{zz} = -\frac{\gamma z}{2(1-\sigma)}, \qquad \widehat{rr} = -\frac{(1+2\sigma)}{4(1-\sigma)}\gamma z, \qquad \widehat{rz} = \frac{(1-2\sigma)}{4(1-\sigma)}\gamma r \tag{11}$$

Формула (10) и первая из формул (11) получены А. А. Ильюшиным иным путем.

3. *Конус, вращающийся вокруг оси z*

Берем функцию напряжений в виде

$$\varphi = R^5(A_2P_5 + B_2P_3) = A_2\left(z^5 - 5r^2z^3 + \frac{15}{8}r^4z\right) + B_2\left(z^5 - \frac{1}{2}z^3r^2 - \frac{3}{2}zr^4\right)$$

Для напряжений имеем

$$\begin{aligned} \widehat{rr} &= -15\left(\frac{3}{2}r^2 - 2z^2\right)A_2 + 3[(1+18\sigma)z^2 + 3(2-3\sigma)r^2]B_2 \\ \widehat{zz} &= 30(r^2 - 2z^2)A_2 + 3[2(8-9\sigma)z^2 - (17-9\sigma)r^2]B_2 \\ \widehat{rz} &= 6[10A_2 - (8-9\sigma)B_2]rz \end{aligned} \tag{12}$$

Напряжения во вращающемся конусе можно получить, накладывая на напряжения $\widehat{rr}$ и $\widehat{zz}$ по (12) добавочные слагаемые [4]

$$\widehat{rr}_0 = -\frac{\rho\omega^2}{3}\left[r^2 + \frac{(1+2\sigma)(1+\sigma)}{2(1-\sigma)\sigma}z^2\right], \qquad \widehat{zz}_0 = \frac{\rho\omega^2}{6\sigma}(1+3\sigma)r^2$$

Коэффициенты A_2 и B_2 определяются из уравнений:

$$-15\left(\frac{11}{2}\mathrm{tg}^2\alpha - 2\right)A_2 + 3[(22-27\sigma)\mathrm{tg}^2\alpha + 1 + 18\sigma]B_2 = \\ = \frac{\rho\omega^2}{3}\left[\mathrm{tg}^2\alpha + \frac{(1+\sigma)(1+2\sigma)}{2\sigma(1-\sigma)}\right]$$

$$15(\mathrm{tg}^2\alpha - 4)A_2 + 3\left[2(8-9\sigma) - \frac{17-9\sigma}{2}\mathrm{tg}^2\alpha\right]B_2 = -\frac{\rho\omega^2}{12\sigma}(1+3\sigma)\mathrm{tg}^2\alpha$$

Поступила в редакцию
16 V 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

G. S. SHAPIRO.—EQUILIBRIUM OF A CONE AND A CONIC SHELL

This paper contains an exact solution of the problem for elastic equilibrium of a cone or a conic shell of variable thickness when the load acting on the side surface is distributed according to a polynomial law.

The solutions are obtained by means of the stress function (1) analogous to that used by B. Galerkin [3] for the problem concerning the spheric shell.

The following particular cases are considered: the action of the constant load, the action of the body's own weight and the case of rotation around the axis of symmetry.

ЛИТЕРАТУРА

1. Michell J. Proc. Math. Soc. London. 1900. V. 32.
2. Neuber H. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1934. V. 14.
3. Галеркин Б. Г. Прикладная математика и механика. 1942 Т. VI. Вып. 6.
4. Тимошенко С. П. Теория упругости. 1934. [Стр. 349].