Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. МАЛКИН

(Свердловск)

Пусть движение динамической системы описывается уравнениями

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i(t, z_1, \ldots, z_{n+k}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+k) \tag{1}$$

где функции Z_i непрерывные в некоторой области G пространства переменных $z_1, \ldots, z_{n+k}$ и при всех $t \geqslant t_0$ допускают непрерывные частные производные по переменным $z_1, \ldots, z_{n+k}$ до второго порядка включительно. Относительно t функции Z_i — периодические и имеют период ω.

Допустим, что уравнения (1) допускают в области G решение

$$z_i = \varphi_i(t, h_1, \ldots, h_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+k) \tag{2}$$

содержащее k произвольных постоянных, и что функции φ_i периодичны относительно t с периодом ω при всех значениях постоянных $h_1, \ldots, h_k$, лежащих в области

$$|h_s| \leqslant H \qquad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

Мы не исключаем также из рассмотрения и тот случай, когда функции Z_i не зависят явно от t, если только период ω функций φ_i не зависит от постоянных $h_1, \ldots, h_k$.

Исследуем устойчивость решений (2). Будем считать для этого решение $\varphi_i(t, 0, \ldots, 0)$ за ведущее (невозмущенное) и составим дифференциальные уравнения возмущенного движения, т. е. уравнения, которым должны удовлетворять величины $\xi_1, \ldots, \xi_{n+k}$, если положить

$$z_i = \varphi_i(t, 0, \ldots, 0) + \xi_i$$

Имеем

$$\frac{d\xi_i}{dt} = p_{i1}\xi_1 + \ldots + p_{in}\xi_{n+k} + \Xi_i(t, \xi_1, \ldots, \xi_{n+k}) \tag{3}$$

где

$$p_{ij} = \left(\frac{\partial Z_i}{\partial z_k}\right)_{z_s = \varphi_s(t, 0, \ldots, 0)}$$

а Ξ_i — функции, имеющие относительно $\xi_1, \ldots, \xi_{n+k}$ второй порядок малости. Как p_{ij}, так и Ξ_i будут периодическими относительно t с периодом ω.

Рассмотрим уравнения в вариациях

$$\frac{d\xi_i}{dt} = p_{i1}\xi_1 + \ldots + p_{i,\,n+k}\xi_{n+k} \tag{4}$$

которые мы будем называть *уравнениями первого приближения.*

Так как уравнения (1) допускают решение $z_i = \varphi_i(t, h_1, \ldots, h_k)$, то уравнения (3) допускают решение

$$\bar{\xi}_i = \varphi_i(t, h_1, \ldots, h_k) - \varphi_i(t, 0, \ldots, 0)$$

зависящее от k произвольных постоянных. Это решение можно представить в виде

$$\bar{\xi}_i = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial h_1}\right)_0 h_1 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial h_k}\right)_0 h_k + F_i(t, h_1, \ldots, h_k) \tag{5}$$

где F_i — некоторые функции $h_1, \ldots h_k$, t, с периодом ω относительно t и имеющие относительно $h_1, \ldots, h_k$ порядок малости не ниже второго.

Отсюда непосредственно убеждаемся, что уравнения первого приближения допускают периодическое решение

$$\xi_i^* = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial h_1}\right)_0 h_1 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial h_k}\right)_0 h_k \tag{6}$$

зависящее линейно от k произвольных постоянных.

Поэтому, как известно из теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, уравнения первого приближения имеют k характеристических показателей с вещественными частями, равными нулю. Допустим, что остальные n характеристических показателей имеют вещественные части, отличные от нуля. Тогда, как это показал Ляпунов [1], если среди этих показателей имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение (исследуемое периодическое движение) будет неустойчиво. Если все n характеристических показателей имеют отрицательные вещественные части, то, поскольку имеется еще k показателей с вещественными частями, равными нулю, вопрос об устойчивости не может быть разрешен на основании уравнений первого приближения. Другими словами, функции Ξ_i в уравнениях (3) могут быть выбраны таким образом, чтобы получить по желанию как устойчивость, так и неустойчивость. Задача при этом делается весьма трудной, и до сих пор удалось получить ее полное решение лишь в простейших случаях.

Однако в рассматриваемом сейчас случае функции Ξ_i не являются вполне произвольными. Условие, что уравнения (3) допускают периодическое решение (5), накладывает на функции Ξ_i определенные зависимости. Эти зависимости как раз такого рода, что уравнения (3) могут быть приведены к хорошо изученному типу, и поставленная задача об устойчивости невозмущенного движения решается в положительном смысле, а именно имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если уравнения первого приближения имеют n характеристических показателей с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение и движения $z_i = \varphi_i(t, h_1, \ldots, h_k)$ при достаточно малых $|h_1|, \ldots, |h_k|$ устойчивы и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, при неограниченном возрастании t неограниченно приближается к одному из периодических движений (2).*

Доказательство. Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, систему уравнений

(4) можно с помощью линейного вещественного преобразования с периодическими коэффициентами, допускающего такое же обратное преобразование привести к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами. При этом характеристическое уравнение полученной системы с постоянными коэффициентами будет иметь n корней с отрицательными вещественными частями и k корней с вещественными частями, равными нулю.

Так как система (4) допускает периодическое решение с k произвольными постоянными и коэффициенты преобразования являются также периодическими функциями с тем же периодом, то полученная система уравнений с постоянными коэффициентами должна допускать k независимых решений, в которых неизвестные функции должны быть либо постоянными величинами, либо периодическими функциями времени с периодом ω.

Очевидно, что эти решения могут соответствовать только тем корням характеристического уравнения, которые имеют вещественные части, равные нулю. Очевидно также, что все эти корни либо будут равны нулю, либо будут равны $\pm i2\pi/\omega$.

Допустим для определенности, что характеристическое уравнение системы с постоянными коэффициентами имеет нулевой корень кратности k_1 и корни $\pm i2\pi/\omega$ кратности k_2, так что $k_1+2k_2=k$. Так как решения, отвечающие этим корням, не должны содержать вековых членов, то каждый из этих корней должен обращать в нуль не только определитель, выражающий левую часть характеристического уравнения, но и все его миноры до порядка, меньшего на единицу кратности корня.

Поэтому, сделав в случае необходимости дополнительное линейное преобразование с постоянными коэффициентами, можно считать, что система (4) после преобразования примет вид

$$\frac{du_i}{dt}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, k_1)$$

$$\frac{dv_j}{dt}=\frac{2\pi}{\omega}W_j, \qquad \frac{dw_j}{dt}=-\frac{2\pi}{\omega}v_j \qquad (j=1, 2, \ldots, k_2)$$

$$\frac{d\eta_s}{dt}=q_{s1}\eta_1+\ldots+q_{sr}\eta_n \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

где u_j, v_j, w_j, η_s — новые переменные, которые вводятся вместо переменных $\xi_1, \ldots \xi_{n+k}$, а q_{sr} — постоянные величины, и притом такие, что все корни уравнения

$$|q_{sr}-\delta_{sr}\rho|=0 \tag{7}$$

(δ_{sr} — символ Кронекера) имеют отрицательные вещественные части.

В новых переменных периодическое решение (6) уравнений первого приближения (4) имеет вид

$$u_j^*=a_i \qquad (i=1, 2, \ldots, k_1)$$

$$v_j^*=b_j\cos\frac{2\pi}{\omega}t+c_j\sin\frac{2\pi}{\omega}t$$

$$w_j^*=-b_j\sin\frac{2\pi}{\omega}t+c_j\cos\frac{2\pi}{\omega}t \qquad (j=1, 2, \ldots, k_2)$$

$$\eta_1^*=\ldots=\eta_n^*=0$$

где a_i, b_j, c_j — произвольные постоянные.

Следовательно, периодическое решение (5) полной системы уравнений возмущенного движения (3) принимает в новых переменных вид

$$\overline{u}_i = a_i + U_i(t,\ a_1, \ldots,\ a_{k_1},\ b_1, \ldots b_{k_2},\ c_1, \ldots,\ c_{k_2})$$

$$\overline{v}_j = b_j \cos\frac{2\pi}{\omega} t + c_j \sin\frac{2\pi}{\omega} t + V_j(t,\ a_1, \ldots,\ c_{k_2})$$

$$\overline{w}_j = -b_j \sin\frac{2\pi}{\omega} t + c_j \cos\frac{2\pi}{\omega} t + W_j(t,\ a_1, \ldots,\ c_{k_2})$$

$$\overline{\eta}_s = H_s(t,\ a_1, \ldots,\ c_{k_2}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k_1)\ (j = 1, 2, \ldots, k_2)\ (s = 1, 2, \ldots, n)$$

где U_i, V_j, W_j, H_s — функции указанных аргументов, имеющие относительно произвольных постоянных порядок малости не ниже второго. Относительно t они суть периодические функции с периодом ω.

Установив это, преобразуем уравнения возмущенного движения (3) к переменным u_i, v_j, w_j, η_s, а затем к переменным $y_1, \ldots, y_k$, $x_1, \ldots, x_n$ с помощью подстановки

$$u_i = y_i + U_i(t,\ y_1, \ldots,\ y_{k_1},\ y_{k_1+1}, \ldots,\ y_{k_1+k_2},\ y_{k_1+k_2+1}, \ldots,\ y_k)$$

$$v_j = y_{k_1+j} \cos\frac{2\pi}{\omega} t + y_{k_1+k_2+j} \sin\frac{2\pi}{\omega} t + V_i(t,\ y_1, \ldots,\ y_k)$$

$$w_j = -y_{k_1+j} \sin\frac{2\pi}{\omega} t + y_{k_1+k_2+j} \cos\frac{2\pi}{\omega} t + W_i(t,\ y_1, \ldots,\ y_k)$$

$$\eta_s = x_s + H_s(t,\ y_1, \ldots,\ y_k)$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, k_1; \\ j = 1, 2, \ldots, k_2; \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{8}$$

Тогда, как нетрудно видеть, уравнения (3) примут вид

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t,\ y_1, \ldots,\ y_k,\ x_1, \ldots,\ x_n)$$

$$\frac{dx_s}{dt} = q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n + X_s(t,\ y_1, \ldots,\ y_k,\ x_1, \ldots,\ x_n)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, k) \tag{9}$$

где Y_i и X_s суть функции такого же типа, как и функции Ξ_i в уравнениях (3). Так как уравнения (3) имеют решение (8), то уравнения (9) должны допускать решение

$$y_1 = c_1, \ldots, y_k = c_k, \qquad x_1 = \ldots = x_n = 0 \tag{10}$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — произвольные постоянные. Поэтому все функции Y_i и X_i должны обращаться в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, т. е.

$$Y_i(t,\ y_1, \ldots,\ y_k,\ 0, \ldots,\ 0) = X_s(t,\ y_1, \ldots,\ y_k,\ 0, \ldots,\ 0) = 0 \tag{1}$$

Все преобразования, которыми мы здесь пользовались, обладают тем свойством, что задача устойчивости по отношению к старым переменным равносильна той же задаче по отношению к новым переменным. Таким образом задача сводится к исследованию невозмущенного движения $y_1 = \ldots = y_k = x_1 = \ldots = x_n = 0$ с дифференциальными уравнениями возмущенного движения (9)

Уравнения же вида (9), при условии (11) и когда вещественные части корней уравнения (7) отрицательны, исследованы Ляпуновым[1]. Ляпунов показал, что при этих условиях все движения (10), достаточно близкие к невозмущенному, включая и последнее, устойчивы и что всякое возмущенное движение при достаточно малых возмущениях с неограниченным возрастанием t асимптотически приближается к одному из движений (10).

Переходя к первоначальным переменным, мы должны заключить, что движение $z_i = \varphi_i(t, 0, \ldots, 0)$ и движения $z_i = \varphi_i(t, h_1, \ldots, h_k)$ при достаточно малых $|h_1|, \ldots, |h_k|$ устойчивы и что всякое возмущенное движение при неограниченном возрастании t асимптотически приближается к одному из движений $z_i = \varphi_i(t, h_1, h_1, \ldots, h_k)$.

При доказательстве своей теоремы Ляпунов предполагал, что функции Y_i и X_s суть аналитические функции переменных $y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка. Это предположение играет существенную роль в доказательстве Ляпунова. Поэтому его результаты не могут быть непосредственно приложены к нашему случаю. Однако теорему Ляпунова нам удалось доказать при значительно более общих предположениях [2]. Хотя мы также предполагали аналитичность функций Y_i и X_s, но это не играло никакой роли в нашем доказательстве, существенно отличном от доказательства Ляпунова. Поэтому результаты Ляпунова могут быть применены в интересующем нас случае. Таким образом теорема доказана. Крайне частный случай этой теоремы доказан Андроновым и Витт[3]

Поступила в редакцию
15 IV 1944

Свердловский государственный
университет

I. MALKIN.—STABILITY OF PERIODIC MOTIONS OF DYNAMIC SYSTEMS

The periodic solution (2) is considered dependent on k arbitrary constants $h_1, \ldots, h_k$ for the $n+k$ order of the differential system (1) with periodic coefficients. The right hand sides of (1) are given continuous functions Z_i of variables $z_1, \ldots, z_{n+k}$ in a domain G, and having therein the continuous partial derivatives up to the second order with the respect to $z_1, \ldots, z_{n+k}$ for all values of $t \geqslant t_i$. The variables Z_i and z_i are defined as periodic functions of t, having the same period ω.

In this case the real parts of the k characteristic powers of the solutions (2) vanish.

It is pointed out that these solutions would be stable in accordance to Liapounoff [1], if the other n characteristic powers have negative real parts.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
2. Малкин Ю. И. Некоторые вопросы общей теории устойчивости движения. Сб. трудов Каз. авиаинститута. 1937. № 7. § 20.
3. Андронов и Витт. Об устойчивости по Ляпунову. Жур. эксп. и теор. физики. 1933.

[1] l. c. [1], § 65.