Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII. 1944

ТЕОРЕМА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н. Г. ЧЕТАЕВ

(Москва)

Всем известна теорема об устойчивости для правильных систем, данная Ляпуновым в его замечательной диссертации *Общая задача об устойчивости движения*, (Харьков, 1892) о том, *что если система дифференциальных уравнений первого приближения есть правильная и если все ее характеристичные числа положительны, то невозмущенное движение устойчиво* (теорема 1, n°13).

Можно доказать в известном смысле дополнительную теорему о неустойчивости, *если система дифференциальных уравнений первого приближения есть правильная и если среди ее характеристичных чисел имеется хотя бы одно отрицательное, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где p_{sr} представляют некоторые вещественные, непрерывные, ограниченные функции t для всякого положительного значения t. Если эта система правильная, то по определению правильных систем (*Общая задача* ..., *n*°9)

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

характеристичных чисел λ_r нормальной системы ее частных независимых решений

$$x_{1r}, \ldots, x_{nr} \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

равняется взятому с обратным знаком характеристичному числу функции

$$\exp - \int \sum p_{ss}\, dt$$

что возможно, если равняется нулю сумма характеристичных чисел функций

$$\exp \int \sum p_{ss}\, dt \qquad \text{и} \qquad \exp - \int \sum p_{ss}\, dt$$

Нормальной системой будет всякая система n независимых решений, для которой сумма характеристичных чисел всех составляющих ее решений достигает своего высшего предела (*Общая задача* ..., n°8, теорема IV).

Через Δ обозначим определитель, составленный из функций x_{ij}, а через Δ_{ij} обозначим его минор, соответствующий элементу x_{ij}. Известно, что функции

$$y_{sr} = \frac{\Delta_{sr}}{\Delta} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

при всяком фиксированном r удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений, присоединенной к заданной системе (1).

Обозначая через μ_r характеристичное число группы функций $y_{1r}, \ldots, y_{nr}$, из формул (2), определенных нормальной системой независимых решений x_{ij} правильной системы (1), выводим в силу общих предложений Ляпунова о характеристичных числах (*Общая задача* ..., $n^o 6$) неравенство

$$\mu_r \geqslant -\lambda_r$$

Из очевидного соотношения

$$\sum y_{sr} x_{sr} = 1$$

выводим неравенство

$$\mu_r + \lambda_r \leqslant 0$$

Эти неравенства приводят к соотношению

$$\mu_r + \lambda_r = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

Присоединенная к системе (1) система дифференциальных уравнений будет поэтому также правильной, а система функций y_{sr}, определенная формулами (2), будет представлять ее нормальную систему независимых решений.

Рассмотрим теперь полную систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где для всякого положительного t все X_s являются голоморфными функциями величин $x_1, \ldots, x_n$, по крайней мере для всех значений последних, удовлетворяющих условию

$$\sum_s x_s^2 < A$$

где A — некоторая отличная от нуля постоянная; коэффициенты в X_s предполагаются определенными непрерывными ограниченными функциями t.

Введем новые переменные $z_1, \ldots, z_n$ согласно формулам

$$z_r = \sum_s x_s y_{sr}\, e^{-(\lambda_r - \varepsilon)t} \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

где ε обозначает некоторое достаточно малое положительное число.

Отсюда из формулы обратного преобразования следует, что характеристичное число группы функций $z_1, \ldots, z_n$ равно характеристичному числу группы функций $x_1, \ldots, x_n$ минус ε; —

$$\text{хар. число } \{z_r\} = \text{хар. число } \{x_s\} - \varepsilon \tag{4}$$

Имеем

$$\frac{dz_r}{dt} = -(\lambda_r - \varepsilon)\, z_r + \sum X_s y_{sr}\, e^{-(\lambda_r - \varepsilon)t} \tag{5}$$

Допустим теперь, что среди характеристичных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ по меньшей мере одно, пусть λ_1, отрицательно.

Неустойчивость невозмущенного движения (по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_n$) будем доказывать от противного.

Если невозмущенное движение устойчиво, то для заданного малого положительного числа A будет существовать такое положительное число R, что при произвольных начальных возмущениях $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_s x_{s0}^2 < R \tag{6}$$

для всякого положительного t будет выполняться неравенство

$$\sum_s x_s^2 < A \tag{7}$$

При этом предположении из уравнения $r = 1$ системы (5) следует

$$z_1 = c\, e^{-(\lambda_1 - \varepsilon)t} + e^{-(\lambda_1 - \varepsilon)t} \int e^{-(\lambda_1 - \varepsilon)t} \sum_s X_s y_{s1} e^{-(\lambda_1 - \varepsilon)t}\, dt \tag{8}$$

где c — некоторая постоянная.

Так как функции X_s предполагаются ограниченными для всякого положительного t и для всяких $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию (1), то при выборе начальных значений $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ согласно неравенству (6) выводим, что характеристичное число последнего слагаемого правой части последнего равенства не меньше ε п, следовательно, характеристичное число функции z_1 будет равно $\lambda_1 - \varepsilon$ (*Общая задача...*, n°6, лемма IV). А это в силу соотношения (4) доказывает, что характеристичное число группы $x_1, \ldots, x_n$, равное увеличенному на ε наименьшему из характеристичных чисел функций $z_1, \ldots, z_n$, будет не больше характеристичного числа z_1 плюс ε, т. е.

$$\text{хар. число } \{x_s\} \leqslant \lambda_1 < 0$$

Это последнее несовместимо с условием (7).

Мы должны поэтому заключить, что каково бы ни было значение R, стесняющее выбор начальных возмущений $x_1^0, \ldots, x_n^0$, среди последних найдутся такие, при которых неравенство (7) перестает выполняться для некоторых положительных значений t.

Таким образом теорему можно считать доказанной.

Примечание. Если система дифференциальных уравнений первого приближения не есть правильная, то, обозначая через S сумму $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ всех ее характеристичных чисел нормальной системы независимых решений, а через μ характеристичное число функции $\frac{1}{\Delta}$, будем иметь

$$S + \mu = -\sigma$$

где σ — некоторое положительное число.

В этом случае характеристичное число функции

$$y_{sr} = \frac{\Delta_{sr}}{\Delta}$$

не меньше $-\lambda_j - \sigma$. А на основании этого нетрудно доказать, что преобразование

$$z_r = \sum_s x_s y_{sr} \, e^{-(\lambda_r - \varepsilon)t}$$

определяет неравенства

$$\text{характ. число } \{z_r\} \geqslant \text{характ. число } \{x_s\} - \sigma - \varepsilon$$

Если характеристичное число λ_1 отрицательно и численно больше σ, то характеристичное число функции z_1, определенное из формулы (8), при предположении об устойчивом характере изменений переменных $x_1, \ldots, x_n$, — иначе при соблюдении неравенств (6) и (7), — будет равно $\lambda_1 - \varepsilon$. Поэтому из предыдущего неравенства при $r = 1$ будет следовать несовместимое с (7) неравенство

$$\text{характ. число } \{x_s\} \leqslant \lambda_1 + \sigma < 0$$

откуда мы должны заключить, что если система дифференциальных уравнений не есть правильная и если среди ее характеристичных чисел имеется хотя бы одно отрицательное, численно большее σ, то невозмущенное движение неустойчиво.

Поступила в редакцию
26 VI 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

N. G. ČETAJEV. — THEOREM CONCERNING THE NON-STABILITY OF REGULAR SYSTEMS

It is well known the theorem of stability for regular systems given by Liapounoff in his famous dissertation, that if the system of differential equations of the first approximation is regular and if all its characteristic numbers are positive, then the undisturbed motion is stable (theorem 1, n°13, — *General Problem for Stability of Motion*, Russian, Kharkov, 1892; see also French, Annales de la Faculté de Toulouse, 2-ème série, t. IX, p. 403).

It can be proved in a certain sense with an additional theorem concenring non-stability that if the system of differential equations is regular and if among its characteristic number there is even only one negative then the undisturbed motion is unstable.