

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА ПОД ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

М. Д. ХАСКИНД

(Николаев)

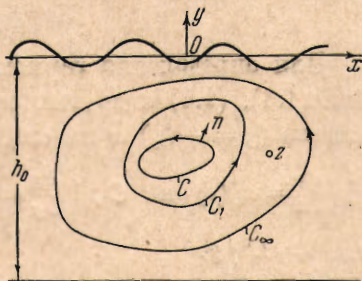
В работе «Плоская задача об установившихся колебаниях крыла под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины»^[1] нами рассмотрена задача о волновых движениях, возникающих в жидкости при периодических колебаниях тонкого крыла, находящегося под свободной поверхностью жидкости конечной глубины. В настоящей статье методом Н. Е. Кочкина^[2] рассматривается более общая задача, а именно, определение волнового движения тяжелой жидкости, возбуждаемого колебаниями тел произвольной формы, находящихся под свободной поверхностью жидкости конечной глубины.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу о периодических колебаниях тела под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. Предположим, что периодические колебания тела бесконечно малы и что волны, образующиеся на свободной поверхности, будут расходиться в обе стороны от тела, т. е. что нет волн, набегающих на тело с одной или с другой стороны свободной поверхности. Естественно также потребовать, чтобы скорость жидкости оставалась ограниченной в области, занятой жидкостью.

Задачу об определении движения жидкости будем решать приближенно, пользуясь следующими упрощениями: граничные условия на поверхности тела считаем выполняющимися в точках контура C (фиг. 1), предполагаемого, в силу малости колебаний, неподвижным; граничные условия на свободной поверхности переносим по вертикали на горизонтальную прямую, совпадающую с первоначальным невозмущенным уровнем жидкости; в граничных условиях сохраняем только малые первого порядка.

Пусть xOy — неподвижная система координат. Ось x горизонтальна и совпадает с первоначальным уровнем жидкости, ось y направлена вверх.

Для определения потенциала скоростей $\Phi(x, y, t)$ возмущенного движения несжимаемой жидкости имеем граничные условия.



Фиг. 1

На контуре C условие обтекания дает

$$\partial\Phi / \partial n = v_n(s, t) \quad (1.1)$$

где s — длина дуги контура C , отсчитываемая от некоторой точки этого контура, а v_n — нормальная составляющая скорости какой-либо точки поверхности тела. При этом нормаль к контуру C будем считать направленной внутрь жидкости, как показано на фиг. 1. Функция v_n зависит от формы тела, от поступательной и угловой скорости и от скорости деформации тела.

На свободной поверхности давление постоянно и равно атмосферному. Отсюда из интеграла Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} |\text{grad } \Phi|^2 - \rho gy \quad (1.2)$$

где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность жидкости и g — ускорение силы тяжести, получаем граничное условие

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\text{grad } \Phi|^2 + gy = 0 \quad (1.3)$$

Линеаризируя это условие, следуя теории волн малой амплитуды, после дифференцирования по времени получаем

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.4)$$

Кроме того, на дне канала при $y = -h_0$ имеем граничное условие $\partial\Phi / \partial y = 0$.

В силу линейности граничных условий достаточно рассмотреть чисто гармонические колебания с частотой k и определяющиеся формулой

$$v_n(s, t) = v_n(s) e^{jkt}$$

где комплексная функция $v_n(s) = v_{n1}(s) + jv_{n2}(s)$ задает форму колебаний.

Здесь и в дальнейшем символ $j = \sqrt{-1}$ имеет то отличие от обычного символа $i = \sqrt{-1}$, также употребляемого в этой работе, что в комплексных выражениях с множителем e^{jkt} нужно брать только действительную часть.

Считая колебания жидкости установившимися, положим

$$\Phi(x, y, t) = \varphi(x, y) e^{jkt} \quad (1.5)$$

Для определения гармонической функции $\varphi(x, y)$ на основании соотношения (1.1), (1.4) и других имеем граничные условия на контуре C , на дне канала ($y = -h_0$) и на свободной поверхности ($y = 0$), соответственно

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_n(s) \text{ на } C, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = -h_0, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + v\varphi = 0 \text{ при } y = 0 \quad (1.6)$$

где $v = k^2 / g$.

Кроме того, так как давление p есть однозначная функция координат, то, как видно из (1.2), функция $\varphi(x, y)$ должна быть однозначной функцией координат. Из формулы (1.2) видно, что уравнение свободной поверхности определяется формулой

$$y(x, t) = -j \frac{k}{g} \varphi(x, 0) e^{jkt} \quad (1.7)$$

2. Основные формулы задачи. Введем в рассмотрение характеристическую функцию течения

$$W(z, t) = (\varphi + i\psi) e^{jkt} \quad (2.1)$$

где ψe^{jkt} — функция тока, $i = \sqrt{-1}$.

Тогда математически задачу можно сформулировать следующим образом. Требуется определить функцию $w(z) = \varphi + i\psi$ так, чтобы:

- 1°. При $0 > y > -h_0$ вне контура C производная dw/dz была ограничена
- 2°. На контуре C выполнялось условие обтекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n(s) \tag{2.2}$$

- 3°. На свободной поверхности выполнялось линеаризованное условие о постоянстве давления

$$\text{Im}(dw/dz + i\nu w) = 0 \text{ при } y = 0 \tag{2.3}$$

- 4°. На дне канала выполнялось условие

$$\text{Im}(dw/dz) = 0 \text{ при } y = -h_0 \tag{2.4}$$

- 5°. На свободной поверхности волны расходились бы в обе стороны от контура C .

Возьмем в области, занятой жидкостью, точку z и проведем два контура C_1 и C_∞ , из которых C_∞ охватывает как точку z , так и контур C , а контур C_1 охватывает контур C , но не охватывает точку z (фиг. 1).

По формуле Коши будем иметь для однозначной функции $dw/dz = \bar{v}(z)$ представление

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\bar{v}(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{\bar{v}(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta \tag{2.5}$$

Здесь черта над буквой обозначает, как обычно, сопряженную величину. Введем обозначения

$$V_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\bar{v}(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta, \quad V_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{\bar{v}(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta \tag{2.6}$$

Ясно, что $V_1(z)$ есть голоморфная функция во всей плоскости комплексного переменного вне контура C_1 , имеющая на бесконечности порядок $1/z$ и продолжимая аналитически на всю ту часть плоскости комплексного переменного, которая лежит вне контура C , а $V_2(z)$ есть голоморфная функция внутри контура C_∞ , причем расширяя контур C_∞ , можно получить аналитическое продолжение этой функции на всю полосу $0 > y > -h_0$.

Функцию $V_2(z)$ можно представить в другом виде. Заметим для этого, что можно найти функцию $\omega(z)$, которая в полосе $0 > y > -h_0$ имеет единственный полюс первого порядка $\zeta = \xi + i\eta$ с вычетом $A/(2\pi i)$ и которая удовлетворяет условиям 1°, 3°, 4° и 5°.

В самом деле, для пульсирующего вихря интенсивности Γe^{iht} и пульсирующего источника интенсивности $Q e^{iht}$, находящихся в комплексной точке $\zeta = \xi + i\eta$, в работе [1] для комплексной скорости были получены выражения

$$\omega_\Gamma(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i(z-\zeta)} + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty (\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0) \frac{\text{sh } \lambda(\eta + h_0) \cos \lambda(z + ih_0 - \xi)}{\nu \text{ch } \lambda h_0 - \lambda \text{sh } \lambda h_0} d\lambda -$$

$$- \frac{\Gamma}{2\pi i(z-\zeta + 2ih_0)} + j\Gamma\nu \frac{\text{sh } \lambda_0(\eta + h_0) \cos \lambda_0(z + ih_0 - \xi)}{\nu h_0 + \text{sh}^2 \lambda_0 h_0} \tag{2.7}$$

$$\omega_Q(z) = \frac{Q}{2\pi(z-\zeta)} - \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} (\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0) \frac{\operatorname{ch} \lambda (\eta + h_0) \sin \lambda (z + ih_0 - \xi)}{\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0} d\lambda +$$

$$+ \frac{Q}{2\pi(z-\bar{\zeta} + 2ih_0)} - jQ\nu \frac{\operatorname{ch} \lambda_0 (\eta + h_0) \sin \lambda_0 (z + ih_0 - \xi)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \quad (2.8)$$

где λ_0 есть корень уравнения $\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 = \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0$, а под интегралом здесь и в дальнейшем, во всех случаях, когда подинтегральная функция имеет особенность, понимается его главное значение в смысле Коши.

Пользуясь выражениями (2.7) и (2.8), нетрудно получить вышеуказанную функцию $\omega(z)$. Положив $A = \Gamma + iQ$, после преобразований получим

$$\omega(z) = \frac{A}{2\pi i(z-\zeta)} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} (\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0) \frac{\bar{A} \sin \lambda (z - \bar{\zeta} + 2ih_0) - A \sin \lambda (z - \zeta)}{\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0} d\lambda -$$

$$- \frac{\bar{A}}{2\pi i(z - \bar{\zeta} + 2ih_0)} + \frac{\pi j \nu}{2\pi i} \frac{\bar{A} \sin \lambda_0 (z - \bar{\zeta} + 2ih_0) - A \sin \lambda_0 (z - \zeta)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \quad (2.9)$$

Полагая в этой формуле $A = \bar{v}(\zeta) d\zeta$ и интегрируя по контуру C_1 , получим

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\bar{v}(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} v(\zeta) \left\{ \frac{1}{z - \zeta + 2ih_0} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\infty} (\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0) \frac{\sin \lambda (z - \bar{\zeta} + 2ih_0)}{\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0} d\lambda - j\pi \nu \frac{\sin \lambda_0 (z - \bar{\zeta} + 2ih_0)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \right\} d\zeta -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \bar{v}(\zeta) \left[\int_0^{\infty} (\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0) \frac{\sin \lambda (z - \zeta)}{\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0} d\lambda + j\pi \nu \frac{\sin \lambda_0 (z - \zeta)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \right] d\zeta$$

Таким образом функция $V_2(z)$ представлена в виде

$$V_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} v(\zeta) \left\{ \int_0^{\infty} \left[i \exp[i\lambda(z - \bar{\zeta} + 2ih_0)] + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0) \sin \lambda (z - \bar{\zeta} + 2ih_0)}{\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0} \right] d\lambda + j\pi \nu \frac{\sin \lambda_0 (z - \bar{\zeta} + 2ih_0)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \right\} d\bar{\zeta} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \bar{v}(\zeta) \left[\int_0^{\infty} \frac{(\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0) \sin \lambda (z - \zeta)}{\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0} d\lambda + j\pi \nu \frac{\sin \lambda_0 (z - \zeta)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \right] d\zeta \quad (2.11)$$

Здесь мы воспользовались очевидным равенством

$$\frac{1}{z - \zeta + 2ih_0} = -i \int_0^{\infty} \exp[i\lambda(z - \zeta + 2ih_0)] d\bar{\zeta}$$

справедливым при $\operatorname{Im}(z - \bar{\zeta} + 2ih_0) > 0$, причем это имеет место, так как z и ζ находятся в полосе $0 > y > -h_0$. Введем сопряженные функции

$$H(\lambda) = \int_{C_1} \bar{v}(\zeta) \exp(-i\lambda\zeta) d\zeta, \quad \bar{H}(\lambda) = \int_{C_1} v(\zeta) \exp(i\lambda\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} \quad (2.12)$$

предполагая λ действительным количеством.

Переставляя в формуле (2.11) порядок интегрирования, после несложных преобразований легко найдем, что

$$\begin{aligned}
 V_z(z) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\exp [i\lambda (z + 2ih_0)] H(-\lambda) - \right. \right. \\
 & - \frac{(\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0)}{2(\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0)} \left(\exp [i\lambda (z + 2ih_0)] \bar{H}(-\lambda) - \exp [-i\lambda (z + 2ih_0)] \bar{H}(\lambda) - \right. \\
 & \left. \left. - \exp (i\lambda z) H(\lambda) + \exp (-i\lambda z) H(-\lambda) \right) \right] d\lambda - \\
 & - \frac{j\pi\nu}{2(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \left(\exp [i\lambda_0 (z + 2ih_0)] \bar{H}(-\lambda_0) - \exp [-i\lambda_0 (z + 2ih_0)] \bar{H}(\lambda_0) - \right. \\
 & \left. \left. - \exp (i\lambda_0 z) H(\lambda_0) + \exp (-i\lambda_0 z) H(-\lambda_0) \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Определим теперь асимптотические выражения комплексной скорости при x , стремящемся к $+\infty$ и $-\infty$. Для этого воспользуемся асимптотическими выражениями комплексной скорости в случае пульсирующего вихря и пульсирующего источника. В указанной нашей работе [1] эти выражения имеют вид

$$\begin{aligned}
 (\omega_\Gamma)_{x \rightarrow +\infty} &= j\nu \frac{\Gamma \operatorname{sh} \lambda_0 (\eta + h_0) \exp (j\lambda_0 \xi)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \exp [-j\lambda_0 (z + 2ih_0)] \\
 (\omega_Q)_{x \rightarrow +\infty} &= \nu \frac{Q \operatorname{ch} \lambda_0 (\eta + h_0) \exp (j\lambda_0 \xi)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \exp [-j\lambda_0 (z + 2ih_0)] \\
 (\omega_\Gamma)_{x \rightarrow -\infty} &= j\nu \frac{\Gamma \operatorname{sh} \lambda_0 (\eta + h_0) \exp (-j\lambda_0 \xi)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \exp [j\lambda_0 (z + 2ih_0)] \\
 (\omega_Q)_{x \rightarrow -\infty} &= -\nu \frac{Q \operatorname{ch} \lambda_0 (\eta + h_0) \exp (-j\lambda_0 \xi)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \exp [j\lambda_0 (z + 2ih_0)]
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Пользуясь этим, асимптотические выражения для $\omega(z)$ получим в виде

$$\begin{aligned}
 \omega_{x \rightarrow +\infty} &= j\nu \frac{(\Gamma - jQ) \exp (\lambda_0 h_0) \exp [j\lambda_0 (\xi - j\eta)] - [\Gamma + jQ] \exp (-\lambda_0 h_0) \exp [j\lambda_0 (\xi + j\eta)]}{2(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \times \\
 & \times \exp [-j\lambda_0 (z + ih_0)] \\
 \omega_{x \rightarrow -\infty} &= j\nu \frac{(\Gamma + jQ) \exp (\lambda_0 h_0) \exp [-j\lambda_0 (\xi + j\eta)] - (\Gamma - jQ) \exp (-\lambda_0 h_0) \exp [-j\lambda_0 (\xi - j\eta)]}{2(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \times \\
 & \times \exp [j\lambda_0 (z + ih_0)]
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Рассмотрим выражения

$$\begin{aligned}
 \bar{B}_+ &= \frac{i\nu}{2(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \left(\bar{A} \exp (\lambda_0 h_0) \exp (i\lambda_0 \zeta) - A \exp (-\lambda_0 h_0) (\exp (i\lambda_0 \zeta)) \right) \\
 \bar{B}_- &= \frac{i\nu}{2(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \left(A \exp (\lambda_0 h_0) \exp (-i\lambda_0 \zeta) - \bar{A} \exp (-\lambda_0 h_0) \exp (-i\lambda_0 \zeta) \right)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

где A , как и прежде, равно $\Gamma + iQ$.

Ясно, что коэффициенты при $\exp [-j\lambda_0 (z + ih_0)]$ и $\exp [j\lambda_0 (z + ih_0)]$ в выражениях (2.15) получаются из (2.16) заменой символа i на символ j .

Положив в выражениях (2.15) и (2.16) величину $\bar{A} = \nu(\zeta) d\zeta$ и интегрируя

по контуру C_1 , найдем, что

$$[\bar{v}(z)]_{x \rightarrow +\infty} = C_+ \exp[-j\lambda_0(z + ih_0)] \quad (2.17)$$

$$[\bar{v}(z)]_{x \rightarrow -\infty} = C_- \exp[j\lambda_0(z + ih_0)]$$

$$B_+ = i\nu \frac{\exp(\lambda_0 h_0) \bar{H}(\lambda_0) - \exp(-\lambda_0 h_0) H(-\lambda_0)}{2(\nu h_0 + \text{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \quad (2.18)$$

$$B_- = i\nu \frac{\exp(\lambda_0 h_0) H(\lambda_0) - \exp(-\lambda_0 h_0) \bar{H}(-\lambda_0)}{2(\nu h_0 + \text{sh}^2 \lambda_0 h_0)}$$

где C_+ и C_- получаются из выражений для B_+ и B_- заменой символа i на j .

Пользуясь формулой (1.10) и условием 3°, асимптотическое движение свободной поверхности можно представить в виде:

при $x \rightarrow +\infty$

$$y(x, t) = \frac{1}{k} C_+ \text{sh} \lambda_0 h_0 \exp[j(kt - \lambda_0 x)] \quad (2.19)$$

при $x \rightarrow -\infty$

$$y(x, t) = -\frac{1}{k} C_- \text{sh} \lambda_0 h_0 \exp[j(kt + \lambda_0 x)] \quad (2.20)$$

Таким образом в обе стороны от колеблющегося тела расходятся волны. Длина этих волн равна $2\pi/\lambda_0$. Амплитуда волн, уходящих в направлении возрастающих и убывающих x , соответственно определяется формулами

$$a_+ = \frac{1}{k} |C_+| \text{sh} \lambda_0 h_0, \quad a_- = \frac{1}{k} |C_-| \text{sh} \lambda_0 h_0 \quad (2.21)$$

Легко теперь подсчитать энергию, затрачиваемую на образование этих волн. Известно, что для случая прогрессивных волн в канале конечной глубины эта энергия, отнесенная к единице времени, равна $\frac{1}{2} a^2 g \rho u$, где a — амплитуда волн, u — групповая скорость. В рассматриваемом случае

$$u = \frac{1}{2} \frac{k}{\lambda_0} \left(1 + \frac{2\lambda_0 h_0}{\text{sh}^2 \lambda_0 h_0} \right)$$

поэтому на образование всей системы образующихся волн в каждую единицу времени затрачивается количество энергии

$$T = \frac{g\rho}{4k\lambda_0} (\nu h_0 + \text{sh}^2 \lambda_0 h_0) (|C_+|^2 + |C_-|^2) \quad (2.22)$$

3. Формулы для определения сил. Вычислим теперь силы, действующие на контур C . Обозначим через X и Y проекции главного вектора сил давления, приложенных к элементам контура C , а через M — главный момент этих сил давления относительно начала координат. Для простоты ограничимся вычислением средних значений этих сил за один период колебания. В этом случае можем воспользоваться формулами Н. Е. Кочина^[3]

$$Y_{cp} + iX_{cp} = \rho g S_{cp} - \frac{\rho}{4} \int_C \left\{ \left(\frac{dw_1}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw_2}{dz} \right)^2 \right\} dz \quad (3.4)$$

$$M_{cp} = \rho g (x_c S)_{cp} - \frac{\rho}{4} \text{Re} \int_C z \left\{ \left(\frac{dw_1}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw_2}{dz} \right)^2 \right\} dz$$

Здесь dw_1/dz и dw_2/dz есть действительная и мнимая части функции dw/dz по символу j , т. е.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw_1}{dz} + j \frac{dw_2}{dz}$$

Через S обозначена площадь, стягивающая контур C ; а x_c — абсцисса центра тяжести этой площади. Следовательно, первые члены в правых частях формулы (3.1) происходят, очевидно, от подъемной силы Архимеда.

Дадим выражения сил гидродинамического воздействия жидкости через функцию $H(\lambda) = H_1(\lambda) + jH_2(\lambda)$. Из формул (2.10) и (2.13) следует, что

$$\frac{dw_1}{dz_1} = A_1(z) + B_1(z) \tag{3.2}$$

где

$$A_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\bar{v}_1(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta \tag{3.3}$$

$$B_1(z) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty \left[\exp[i\lambda(z+2ih_0)] \bar{H}_1(-\lambda) - \frac{(\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)}{2(\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0)} \left(\exp[i\lambda(z+2ih_0)] \bar{H}_1(-\lambda) - \exp[-i\lambda(z+2ih_0)] \bar{H}_1(\lambda) - \exp(i\lambda z) H_1(\lambda) + \exp(-i\lambda z) H_1(-\lambda) \right) \right] d\lambda + \right. \\ \left. + \frac{i\pi\nu}{2(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \left(\exp[i\lambda_0(z+2ih_0)] \bar{H}_2(-\lambda_0) - \exp[-i\lambda_0(z+2ih_0)] \bar{H}_2(\lambda_0) - \exp(i\lambda_0 z) H_2(\lambda_0) + \exp(-i\lambda_0 z) H_2(-\lambda_0) \right) \right\} \tag{3.4}$$

причем A_1 есть голоморфная функция от z во всей плоскости вне контура C_1 , а B_1 есть голоморфная функция от z в полусе $0 > y > -h_0$.

В формулах (3.1) за контур интегрирования можно взять любой контур, охватывающий контур C , в частности за этот контур можно взять контур C_2 , охватывающий контур C_1 и лежащий в области $0 > y > -h_0$. Поэтому

$$\int_{C_2} A_1^2(z) dz = 0, \quad \int_{C_2} B_1^2(z) dz = 0 \\ \int_{C_2} \left(\frac{dw_1}{dz} \right)^2 dz = 2 \int_{C_2} A_1(z) B_1(z) dz = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{\bar{v}_1(\zeta)}{z-\zeta} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \left[\exp[i\lambda(z+2ih_0)] \bar{H}_1(-\lambda) - \frac{(\nu+\lambda)\exp(-\lambda h_0)}{2(\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0)} \left(\exp[i\lambda(z+2ih_0)] \bar{H}_1(-\lambda) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \exp[-i\lambda(z+2ih_0)] \bar{H}_1(\lambda) - \exp(i\lambda z) H_1(\lambda) + \exp(-i\lambda z) H_1(-\lambda) \right) \right] d\lambda + \right. \\ \left. + \frac{i\pi\nu}{2(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \left(\exp[i\lambda_0(z+2ih_0)] \bar{H}_2(-\lambda_0) - \exp[-i\lambda_0(z+2ih_0)] \bar{H}_2(\lambda_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - \exp(i\lambda_0 z) H_2(\lambda_0) + \exp(-i\lambda_0 z) H_2(-\lambda_0) \right) \right\} d\zeta dz$$

Переставляя порядок интегрирования и пользуясь очевидной, в силу того

что точка ζ , принадлежащая контуре C_1 , лежит внутри контура C_2 , формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\exp(\pm i\lambda z)}{z - \zeta} dz = \exp(\pm i\lambda \zeta)$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \left(\frac{dw_1}{dz} \right)^2 dz &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\exp(-2\lambda h_0) |H_1(-\lambda)|^2 - \right. \right. \\ &- \frac{(\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0)}{2(\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0)} \left(\exp(-2\lambda h_0) |H_1(-\lambda)|^2 - \exp(2\lambda h_0) |H_1(\lambda)|^2 \right) d\lambda + \\ &+ \frac{\pi\nu}{2(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \left(\exp(-2\lambda_0 h_0) H_1(-\lambda_0) \bar{H}_2(-\lambda_0) - \exp(2\lambda_0 h_0) H_1(\lambda_0) \bar{H}_2(\lambda_0) - \right. \\ &\left. \left. - H_1(-\lambda_0) H_2(\lambda_0) + H_1(\lambda_0) H_2(-\lambda_0) \right) \right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

Аналогичным путем вычисляется $\int (dw_2 / dz)^2 dz$, после чего составить первую формулу (3.1) не представляет затруднений. Приводим ее действительные и мнимые части

$$\begin{aligned} Y_{\text{ср}} &= \rho g S_{\text{ср}} - \frac{\rho}{4\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \exp(-2\lambda h_0) [|H_1(-\lambda)|^2 + |H_2(-\lambda)|^2] - \right. \\ &- \frac{(\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0)}{2(\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0)} \left(\exp(-2\lambda h_0) [|H_1(-\lambda)|^2 + |H_2(-\lambda)|^2] - \right. \\ &\left. \left. - \exp(2\lambda h_0) [|H_1(\lambda)|^2 + |H_2(\lambda)|^2] \right) \right\} d\lambda - \\ &- \frac{\rho\nu}{4(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \operatorname{Re} [H_1(\lambda_0) H_2(-\lambda_0) - H_2(\lambda_0) H_1(-\lambda_0)] \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\text{ср}} &= \frac{\rho\nu}{4(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \operatorname{Im} \left(\exp(-2\lambda_0 h_0) \bar{H}_1(-\lambda_0) H_2(-\lambda_0) - \right. \\ &\left. - \exp(2\lambda_0 h_0) \bar{H}_1(\lambda_0) H_2(\lambda_0) - H_1(\lambda_0) H_2(-\lambda_0) + H_2(\lambda_0) H_1(-\lambda_0) \right) \quad (3.7) \end{aligned}$$

Точно так же, вычислив выражения $\int z (dw_1 / dz)^2 dz$ и $\int z (dw_2 / dz)^2 dz$ по контуру C_1 , получим из (3.1)

$$\begin{aligned} M_{\text{ср}} &= \rho g [x_c S]_{\text{ср}} - \frac{\rho}{4\pi} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\exp(-2\lambda h_0) [H_1'(-\lambda) \bar{H}_1(-\lambda) + H_2'(-\lambda) \bar{H}_2(-\lambda)] - \right. \right. \\ &- \frac{(\nu + \lambda) \exp(-2\lambda h_0)}{2(\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0)} \left(\exp(-2\lambda h_0) [H_1'(-\lambda) \bar{H}_1(-\lambda) + H_2'(-\lambda) \bar{H}_2(-\lambda)] + \right. \\ &\left. \left. + \exp(2\lambda h_0) [H_1'(\lambda) H_2(\lambda) + H_2'(\lambda) \bar{H}_2'(\lambda)] - \frac{d}{d\lambda} [H_1(-\lambda) H_1(\lambda) + \right. \right. \\ &\left. \left. + H_2(-\lambda) H_2(\lambda)] \right) \right] d\lambda + \frac{\pi\nu}{2(\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \left(\exp(-2\lambda_0 h_0) [H_1'(-\lambda_0) \bar{H}_2(-\lambda_0) - \right. \\ &- H_2'(-\lambda_0) \bar{H}_1(-\lambda_0)] + \exp(2\lambda_0 h_0) [H_1'(\lambda_0) \bar{H}_2(\lambda_0) - H_2'(\lambda_0) \bar{H}_1(\lambda_0)] + \\ &\left. \left. + H_2'(-\lambda_0) H_1(\lambda_0) + H_2'(\lambda_0) H_1(-\lambda_0) - H_1'(-\lambda_0) H_2(\lambda_0) - H_1(\lambda_0) H_2'(-\lambda_0) \right) \right\} \end{aligned}$$

где

$$H'(\lambda) = \frac{dH(\lambda)}{d\lambda} = -i \int_{C_1} \zeta \bar{v}(\zeta) \exp(-i\lambda\zeta) d\zeta \quad (3.9)$$

В предельном случае при $h_0 \rightarrow \infty$ из формул (3.6)–(3.8) получим формулы, совпадающие с формулами, выведенными Н. Е. Кочиним [3].

Входящая в формулы (3.6)–(3.8) функция $H(\lambda)$ не зависит от контура C_1 , и можно за контур интегрирования взять, например, контур C или другой какой-либо контур, охватывающий контур C . Кроме того, значение функции $H(\lambda)$ не изменится от прибавления к функции $\omega(z)$ линейной функции от z . Этими свойствами воспользуемся в следующем параграфе.

4. Примеры. В предыдущих параграфах были найдены выражения через функцию $H(\lambda)$ для ряда важных величин, а именно: амплитуды образующихся волн, средних сил, действующих на колеблющийся контур, энергии, расходуемой последним на образование волн. Таким образом функция $H(\lambda)$, определенная формулой (2.12), играет фундаментальную роль для рассматриваемой задачи. Для вычисления этой функции необходимо знать выражение функции $\bar{v}(z)$, т. е. необходимо знать решение гидродинамической задачи. Но если относительная глубина погружения контура C достаточно велика, то получим хорошее приближение, если вместо функции $\bar{v}(z)$ подставим в формулы (1.1) то выражение этой функции, которое соответствует колебаниям контура C в безграничной жидкости.

Рассмотрим несколько примеров такого приближенного решения задачи.

1. Пульсирующий круг. Пусть круг радиуса r находится на глубине h под свободной поверхностью жидкости. Пусть радиус этого круга и, следовательно, скорость изменения радиуса изменяются по закону

$$r = r_0 - jr_1 \exp(jkt), \quad \frac{dr}{dt} = r_1 k \exp(jkt) \quad (4.1)$$

Считая r_1 бесконечно малой величиной, получаем граничное условие

$$\partial\varphi / \partial n = r_1 k \quad (4.2)$$

которое будем считать выполняющимся на контуре круга радиуса $r_0 = z + ih$.

Для функции $\omega(z)$, отвечающей случаю безграничной жидкости, находим

$$\omega(z) = r_0 r_1 k \ln(z + ih) \quad (4.3)$$

Составляя по формуле (2.13) функцию $H(\lambda)$ и учитывая, что контур C охватывает одну особую точку $z = -ih$, по теореме о вычетах находим

$$H(\lambda) = \int_C r_0 r_1 k \exp(-i\lambda z) \frac{dz}{z + ih} = 2\pi i r_0 r_1 k \exp(-\lambda h) \quad (4.4)$$

Переходим к вычислению амплитуды образующихся волн. Ясно, в силу симметрии всего движения относительно вертикальной линии, проходящей через центр круга, что в обе стороны от пульсирующего круга будут расходиться волны одной и той же амплитуды. По формулам (2.17) и (2.18) находим выражения для B_+ и B_-

$$B_+ = 2\pi r_0 r_1 \nu k \frac{\operatorname{ch} \lambda_0 (h_0 - h)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0}, \quad B_- = -2\pi r_0 r_1 \nu k \frac{\operatorname{ch} \lambda_0 (h_0 - h)}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \quad (4.5)$$

Эти выражения не содержат символа i , поэтому они равны соответственно C_+ и C_- . Таким образом по формулам (2.21) находим выражение для амплитуды образующихся волн

$$a = |r_1| 2\pi r_0 \nu \frac{\operatorname{ch} \lambda_0 (h_0 - h) \operatorname{sh} \lambda_0 h_0}{\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \quad (4.6)$$

Энергия, затрачиваемая в единицу времени колеблющимся контуром на образование волн, вычисляется по формуле (2.22)

$$T = |r_1|^2 \frac{2\pi^2 r_0^2 k g p \operatorname{ch}^2 \lambda_0 (h_0 - h)}{\lambda_0 (\nu h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0)} \quad (4.7)$$

По формулам (3.6) — (3.8) для сил получаем выражения

$$X_{\text{ср}} = 0, \quad M_{\text{ср}} = 0 \quad (4.8)$$

$$Y_{\text{ср}} = \rho g S_{\text{ср}} - \frac{\pi p r_0^2 k^3}{2(h_0 - h)} |r_1|^2 - \rho \pi r_0^2 k^2 |r_1|^2 \int_0^{\infty} (\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0) \frac{\operatorname{sh} 2\lambda (h_0 - h)}{\nu \operatorname{ch} \lambda h_0 - \lambda \operatorname{sh} \lambda h_0} d\lambda$$

Интеграл этой формулы, который обозначим через J , можно вычислить с помощью механических квадратур. Для предельных значений параметра $\nu = 0$ и $\nu = \infty$ этот интеграл вычисляется совершенно точно. Имеем

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} J = -\frac{\pi}{2h_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi h}{h_0} - \frac{1}{2(h_0 - h)}, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} J = \frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \frac{\pi h}{h_0} - \frac{1}{2(h_0 - h)} \quad (4.9)$$

Значение силы в этих предельных случаях будет

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} Y_{\text{ср}} = \rho g S_{\text{ср}} + \frac{\rho \pi^2 r_0^2 k^3 |r_1|^2}{2h_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi h}{h_0} \quad (4.10)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} Y_{\text{ср}} = \rho g S_{\text{ср}} - \frac{\rho \pi^2 r_0^2 k^3 |r_1|^2}{2h_0} \operatorname{csc} \frac{\pi h}{h_0} \quad (4.11)$$

Формула (4.10) отвечает значению силы при колебаниях контура в жидкости, заключенной между двумя параллельными стенками. Формула (4.11) отвечает значению силы при колебаниях контура внутри жидкости с граничным условием на поверхности $\varphi = 0$ при $y = 0$.

2. *Осциллирующий круг.* Пусть круг радиуса r_0 , находящийся на глубине h , совершает колебания по горизонтали по гармоническому закону

$$\xi = -j\alpha \exp(jkt) \quad (4.12)$$

где ξ — абсцисса центра тяжести круга.

Пусть r и θ — полярные координаты с центром в точке $z = -ih$ и полярной осью, направленной параллельно положительной оси x .

Тогда граничное условие, которое должно выполняться на контуре круга C , примет вид

$$v_n = \alpha k \cos \theta \quad (4.13)$$

Опять легко находим функции

$$\omega(z) = -\frac{\alpha k r_0^2}{z + ih}, \quad H(\lambda) = 2\pi \alpha k r_0^2 \lambda \exp(-\lambda h) \quad (4.14)$$

Амплитуда образующихся волн и затрачиваемая на их образование энергия определяются формулами

$$a = |\alpha| 2\pi r_0^2 \nu \lambda_0 \frac{\text{ch } \lambda_0 (h_0 - h) \text{sh } \lambda_0 h_0}{\nu h_0 + \text{sh}^2 \lambda_0 h_0}, \quad T = |\alpha|^2 \frac{2\pi^2 r_0^4 \nu^2 k \lambda_0 g \rho \text{ch}^2 \lambda_0 (h_0 - h)}{\nu h_0 + \text{sh}^2 \lambda_0 h_0} \quad (4.15)$$

Для сил находим выражения

$$X_{\text{ср}} = 0, \quad M_{\text{ср}} = 0 \quad (4.16)$$

$$Y_{\text{ср}} = \rho g S_{\text{ср}} - \frac{\rho \pi k^2 r_0^4}{4 (h_0 - h)^2} |\alpha|^2 - \rho \pi k^2 r_0^4 |\alpha|^2 \int_0^\infty (\nu + \lambda) \exp(-\lambda h_0) \frac{\lambda^2 \text{sh } 2\lambda (h_0 - h)}{\nu \text{ch } \lambda h_0 - \lambda \text{sh } \lambda h_0} d\lambda$$

3. *Пульсирующий и осциллирующий круг.* Наложим два предыдущих движения. Пусть круг пульсирует по закону (4.1) и одновременно осциллирует по горизонтали по формуле (4.12). Решение этой задачи дается формулой

$$w(z) = r_0 r_1 k \ln(z + ih) - \frac{akr_0^2}{z + ih} \quad (4.17)$$

Функция $H(\lambda)$ также может быть получена путем сложения функций, отвечающих двум складываемым движениям

$$H(\lambda) = -2\pi r_0 k (ir + ar_0 \lambda) \exp(-\lambda h) \quad (4.18)$$

Волны, расходящиеся в разные стороны, будут иметь, вообще говоря, разные амплитуды, а именно

$$a_+ = 2\pi r_0 \nu \frac{\text{sh } \lambda_0 h_0 \text{ch } \lambda_0 (h_0 - h)}{\nu h_0 + \text{sh}^2 \lambda_0 h_0} |ar_0 \lambda_0 - jr_1| \quad (4.19)$$

$$a_- = 2\pi r_0 \nu \frac{\text{sh } \lambda_0 h_0 \text{ch } \lambda_0 (h_0 - h)}{\nu h_0 + \text{sh}^2 \lambda_0 h_0} |ar_0 \lambda_0 + jr_1|$$

Следует отметить, что в случае, когда выполняется соотношение $ar_0 \lambda_0 = jr_1$, волны будут образовываться только с одной стороны. В рассматриваемом примере появляется также и горизонтальная составляющая силы

$$X_{\text{ср}} = \frac{4\rho \pi^2 \nu r_0^3 k^2 \lambda_0 |r_1| |\alpha| \sin \varepsilon \text{ch}^2 \lambda_0 (h_0 - h)}{\nu h_0 + \text{sh}^2 \lambda_0 h_0} \quad (4.20)$$

Здесь ε есть сдвиг фаз складываемых колебаний. Таким образом видим, что при сдвиге фаз, равном $\frac{1}{2}\pi$, среднее значение горизонтальной составляющей силы принимает максимальное значение, а при сдвиге фаз, равном нулю, эта сила обращается в нуль. Вертикальная составляющая силы получается сложением вертикальных составляющих сил двух складываемых движений.

Вычислим теперь значение момента $M_{\text{ср}}$. Для простоты ограничимся случаем, когда r_1 действительно по символу j , а $\alpha = j\bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ также действительно по символу j . Очевидно, что в этом случае сдвиг фаз складываемых колебаний равен $\frac{1}{2}\pi$. Из формулы (4.18) имеем

$$H_1(\lambda) = 2\pi i r_0 r_1 k \exp(-\lambda h), \quad H_2(\lambda) = 2\pi r_0^2 k \bar{\alpha} \lambda \exp(-\lambda h) \quad (4.21)$$

Следовательно,

$$M_{\text{ср}} = \rho \nu \frac{4\pi^2 h r_0^3 k^2 \lambda_0 \bar{\alpha} \text{ch}^2 \lambda_0 (h_0 - h) - \pi^2 r_0^3 k^2 \bar{\alpha} \text{sh } 2\lambda_0 (h_0 - h)}{\nu h_0 + \text{sh}^2 \lambda_0 h_0} \quad (4.22)$$

4. *Колебания эллипса.* Пусть эллипс, центр которого находится на глубине h и оси которого 2α и 2β направлены параллельно осям координат x и y , совершает колебания в направлении оси y со скоростью $v \exp(jkt)$.

В этом случае функцию $w(z)$, отвечающую случаю безграничной жидкости, представим с помощью вспомогательной переменной u формулами

$$z = -ih + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \left(u + \frac{1}{u} \right), \quad w = \frac{iv}{2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \left(u - \frac{r^2}{u} \right) \quad (4.23)$$

где $r = \sqrt{(\alpha + \beta)/(\alpha - \beta)}$ и $|u| = r$ есть уравнение окружности L в плоскости u , соответствующей контуру эллипса C . Внешности эллипса соответствует внешность этой окружности.

Составляем функцию

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \int_C \exp(-i\lambda z) d\omega = \\ &= \int_L \exp(-\lambda h) \exp \left[-\frac{i\lambda}{2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right] \frac{iv}{2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \left(1 + \frac{r^2}{u^2} \right) du \end{aligned}$$

Производя подстановку $u = i\theta$, получим

$$H(\lambda) = -\frac{v}{2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \exp(-\lambda h) \int_L \exp \left[\frac{\lambda}{2} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \left(\theta - \frac{1}{\theta} \right) \right] \left(1 - \frac{r^2}{\theta^2} \right) d\theta$$

Но из теории функций Бесселя известно, что

$$\int_L \exp \left[\frac{z}{2} \left(\theta - \frac{1}{\theta} \right) \right] \theta^{n+1} d\theta = 2\pi i J_n(z)$$

Поэтому

$$H(\lambda) = -\pi i v \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \exp(-\lambda h) [J_{-1}(\lambda \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) - r^2 J_1(\lambda \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})]$$

Воспользовавшись формулой $J_{-1}(z) = -J_1(z)$ и значением r , получим

$$H(\lambda) = 2\pi i v \alpha \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} \exp(-\lambda h) J_1(\lambda \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \quad (4.24)$$

Амплитуда образующихся волн

$$a = \frac{2\pi k}{g} |v| \alpha \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} \frac{\operatorname{sh} \lambda_0 h_0 \operatorname{sh} \lambda_0 (h_0 - h)}{v h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} J_1(\lambda_0 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \quad (4.25)$$

Интересно отметить, что при определенных частотах колебаний волны не образуются. Это будет в том случае, когда выполняется соотношение

$$\lambda_0 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = s_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

где s_n — положительные корни функции Бесселя.

Первый корень этой функции есть $s_1 = 3.832$. Так как параметр $v = k^2/g$ связан с λ_0 уравнением $\lambda \operatorname{th} \lambda_0 h_0 = k^2/g$, то наименьшая частота, при которой будет иметь место отсутствие волн, определяется формулой

$$k = \sqrt{\frac{3.832 g}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \operatorname{th} \frac{3.832 h_0}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}} \quad (4.26)$$

Отсюда

$$k < 1.96 \sqrt{\frac{g}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}}, \quad \text{так как } \operatorname{th} \frac{3.832 h_0}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} < 1 \quad (4.27)$$

т. е. около двух раз больше частоты колебаний маятника длиной $l = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

5. *Вертикальные колебания контура с вертикальной осью симметрии.* Допустим, что в жидкость погружено некоторое симметрично относительно вертикали тело, совершающее поступательные колебания в направлении оси y со скоростью $v \exp(jkt)$.

Допустим далее, что толщина этого тела мала и что касательная к контуру тела образует малый угол с осью y .

Уравнение контура этого тела представится в виде

$$x = \pm f(y) \tag{4.28}$$

Граничное условие на этом контуре имеет вид

$$\partial\varphi / \partial n = v \cos \beta \tag{4.29}$$

где β есть угол внешней нормали n к контуру C с осью y .

Это условие можно упростить, как это делается в теории Мичелли, а именно, пользуясь малостью $f(y)$, берем, с одной стороны, $\cos \beta = -f'(y)$, а с другой — заменяем $\partial\varphi / \partial n$ через $\partial\varphi / \partial x$ и относим условие (4.3) к отрезку оси y от $-h$ до 0. Таким образом условие (4.3) примет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -vf'(y) \text{ для } x = +0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = vf'(y) \text{ для } x = -0 \tag{4.30}$$

В силу сделанных выше предположений, можно в формулах (2.12) интегрирование по контуру тела заменить интегрированием по отрезку оси y от $-h$ до 0. Тогда получим

$$H(\lambda) = -2vi \int_{-h}^0 \exp(\lambda y) f'(y) dy \tag{4.31}$$

Для амплитуды образующихся волн находим выражение

$$a = \frac{2k}{g} \frac{v \operatorname{sh} \lambda_0 h_0}{v h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \int_{-h}^0 \operatorname{ch} \lambda_0 (h_0 + y) f'(y) dy \tag{4.32}$$

Асимптотическое движение свободной поверхности имеет вид при $x \rightarrow \pm \infty$

$$y(x, t) = -\frac{2k}{g} \frac{v \operatorname{sh} \lambda_0 h_0}{v h_0 + \operatorname{sh}^2 \lambda_0 h_0} \exp[j(kt \mp \lambda_0 x)] \int_{-h}^0 \operatorname{ch} \lambda_0 (h_0 + y) f'(y) dy \tag{4.33}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Прежде всего, в предельном случае $h_0 \rightarrow \infty$, приняв во внимание, что при этом λ_0 стремится к v , формулы (4.32) и (4.33) примут вид

$$a = \frac{2k}{g} |v| \int_{-h}^0 \exp(vy) f'(y) dy \tag{4.34}$$

$$y(x, t) = -\frac{2k}{g} v \exp[j(kt \mp vx)] \int_{-h}^0 \exp(vy) f'(y) dy \tag{4.35}$$

Рассмотрим в этом случае пример. Пусть $h = \infty$ и $f(y) = l \exp(\sigma y)$. Тогда по формуле (4.36) находим

$$a = \frac{2lv |l\sigma k}{g'(\sigma + k^2/g)} \quad (4.36)$$

Максимальное значение этой амплитуды достигается при частоте

$$k = \sqrt{g\sigma} \quad (4.37)$$

и имеет значение

$$a_{\max} = |v| l \sqrt{\sigma/g}$$

В заключение отметим, что полученное решение, выраженное формулами (4.33) и (4.35), является точным решением задачи при допущениях, сделанных нами выше. Поэтому можно с помощью интеграла Фурье построить решение при любом законе поступательного движения в направлении оси y .

Аналогичным путем можно рассмотреть ряд других примеров, в частности, поступательные и вращательные колебания горизонтальной пластинки. Результаты этого примера мы получим такие же, как и в раннее указанной нашей работе, где этот пример рассмотрен другим методом.

Поступила в редакцию
8 IX 1941

M. D. HASKIND.—THE OSCILLATION OF A BODY IMMersed IN HEAVY FLUID

The paper is concerned with the plane problem of determining the wave motion of a heavy incompressible fluid of a finite depth due to the periodic oscillation of an immersed rigid body having an arbitrary form. This problem is solved by the method developed by N. L. Kotchin.

The author deduces the formulae for hydrodynamic forces and couples acting on the oscillating contour, for the amplitude of waves spreading due to oscillation and for the energy supplied to the generated waves by the contour.

As examples are considered the approximate solutions for a pulsating disk, for an oscillating disk and for a thin symmetrical profile oscillating in the direction of its axis vertically below the fluid surface.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Плоская задача об установившихся колебаниях крыла под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. Известия ОН АН СССР. 1942. № 11—12.
2. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Труды конференции по теории волнового сопротивления. Изд. ЦАГИ. М. 1937. [Стр. 65—134].
3. Кочин Н. Е. Плоская задача об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости. Известия ОН АН СССР. 1939. № 4.