Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

ТОЧНЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

Я. М. СЕРЕБРИЙСКИЙ

(Москва)

1. Пусть характеристикой сечения является эмпирическая зависимость

$$C_y = C_y(\alpha) \tag{1.1}$$

полученная для цилиндрического крыла бесконечного размаха, причем C_y — коэффициент подъемной силы, α — угол атаки, который отсчитывается от направления, соответствующего нулевой подъемной силе профиля.

В основу теории крыла конечного размаха Прандтлем положена гипотеза плоских сечений, согласно которой каждое сечение крыла конечного размаха работает как элемент крыла бесконечного размаха, т. е. что каждый элемент крыла конечного размаха имеет ту же самую характеристику сечения, что и крыловой профиль. Для применения этой гипотезы в случае нелинейной зависимости $C_y(\alpha)$ имеется значительно меньше оснований, чем при малых углах атаки на линейном участке. Например, возникающий на отдельных участках крыла срыв обтекания может так воздействовать на соседние сечения крыла, что условия отрыва для них изменятся, и гипотеза плоских сечений будет нарушаться. Особенно большие опасения могут возникнуть, когда срыв потока получается очень «резким» или когда часть крыла имеет существенно отличный от всего остального крыла характер обтекания (при установке щитков и т. п.). Можно думать, что наилучшие результаты гипотеза плоских сечений даст для плавных кривых C_y, если при этом не вести расчета для больших закритических углов атаки. Для рассмотренных в работе точных решений применение гипотезы плоских сечений получается более обоснованным, так как в этом частном случае срыв наступает одновременно по всему размаху крыла.

Дальнейшая схематизация Прандтля состоит в замене крыла вихревой нитью, причем сбегающая с крыла вихревая пелена считается плоской и бесконечно тонкой. Оба эти предположения о вихревой пелене также могут быть поставлены под сомнение. Например, при больших углах атаки вихревая пелена начинает сворачиваться и, кроме того, ее нельзя считать тонкой. Поэтому и с этих точек зрения при практическом применении схемы Прандтля к нелинейной зависимости $C_y(\alpha)$ следует особенно осторожно относиться к результатам для закритических углов α.

Теорема Жуковского о подъемной силе, как известно, дает соотношение между циркуляцией и коэффициентом подъемной силы

$$\Gamma = \tfrac{1}{2} vbC_y \tag{1.2}$$

где v — скорость полета, b — хорда, Γ — циркуляция.

Влияние конечности размаха согласно схеме Прандтля сводится к тому, что истинный угол атаки сечения крыла отличается от его геометрического угла α на величину

$$\Delta\alpha = \frac{1}{4\pi v} \int\limits_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta} \tag{1.3}$$

где y — текущая вдоль по размаху координата, l — размах крыла.

Используя (1.2), находим

$$\Gamma = \frac{1}{2} vbC_y \left(\alpha - \frac{1}{4\pi v} \int\limits_{\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta} \right) \tag{1.4}$$

В связи с тем, что $C_y = C_y(\alpha - \Delta\alpha)$ задана в виде произвольной эмпирической зависимости, соотношение (1.4) является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением с неизвестной функцией Γ.

Введем тригонометрическую подстановку Глауэрта

$$\Gamma = 2vl \sum_n A_n \sin n\theta, \qquad y = -\tfrac{1}{2} l \cos\theta \qquad (n=1, 3, 5, \ldots)$$

ограничиваясь случаем симметричного относительно середины крыла распределения циркуляции. Используя главное в смысле Коши значение интеграла (1.3) и вводя обозначение $\nu = \frac{1}{4} b / l$, преобразуем уравнение (1.4) к виду

$$\sum_n A_n \sin n\theta = \nu C_y \left(\alpha - \sum_n \frac{nA_n \sin n\theta}{\sin\theta} \right) \qquad (n=1, 3, 5, \ldots) \tag{1.5}$$

Предположим, что $C_y(\alpha)$ есть линейная функция $C_y = a\alpha$. Вводя обозначение $\mu = \frac{1}{4} ab / l = a\nu$, находим, что

$$\sum_n A_n \sin n\theta = \mu \left(\alpha - \sum_n \frac{nA_n \sin n\theta}{\sin\theta} \right) \qquad (n=1, 3, 5, \ldots) \tag{1.6}$$

Это уравнение имеет точное частное решение для крыла эллиптической формы в плане, когда $b = b_0 \sin\theta$. Введем обозначение

$$\chi = \frac{ab_0}{4l}$$

Подставляя $\mu = \chi \sin\theta$ в (1.6), убеждаемся, что уравнение

$$(-A_1 + \chi\alpha - \chi A_1) \sin\theta - \sum_n A_n \sin n\theta - \chi \sum_n nA_n \sin n\theta = 0 \qquad (n=3, 5, 7\ldots)$$

удовлетворяется при любом θ, если принять

$$A_1 = \frac{\chi\alpha}{1+\chi}, \qquad A_n = 0 \qquad (n=3, 5, 7, \ldots)$$

Коэффициент подъемной силы крыла конечного размаха находится по формуле

$$C_y = \frac{\pi l^2}{S} A_1$$

где S — площадь крыла. В частности, для крыла эллиптической формы в плане

$$C_y = \frac{4l}{b_0} A_1 \tag{1.7}$$

В случае отличной от эллиптической формы в плане величина $\partial C_y / \partial \alpha$ отходит сравнительно немного от своего значения для эллиптического крыла (при равных удлинениях). Аналогично и коэффициент индуктивного сопротивления изменяется немного по сравнению с эллиптическим крылом. Таким образом частное решение для эллиптического крыла дает вполне правильное представление об изменении суммарных характеристик крыла при переходе от бесконечного к конечному размаху, в зависимости от удлинения.

В данной работе приводятся аналогичные решения для нелинейной зависимости $C_y(\alpha)$. Исследование точных решений при нелинейной характеристике сечения интересно еще и потому, что при этом выявляются некоторые случаи, когда решение уравнения Прандтля не существует.

2. Начнем с задачи о параболической характеристике сечения

$$C_y = a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 \tag{2.1}$$

Как будет показано ниже, совершенно не обязательно ограничиваться случаем параболы, однако на этом примере результаты могут быть проще всего доведены до конца. Можно распорядиться коэффициентами a_1, a_2 так, чтобы кривая $C_y(\alpha)$ имела максимум, заданный по величине и положению.

В произвольном сечении крыла конечного размаха

$$C_y = a_1(\alpha - \Delta\alpha) + a_2(\alpha - \Delta\alpha)^2$$

Подставляя это соотношение в уравнение (1.2) и используя тригонометрическую подстановку Глауэрта, находим, что

$$\sum_n A_n \sin n\theta = \mu_1 \left(\alpha - \sum_n \frac{nA_n \sin n\theta}{\sin\theta}\right) + \mu_2 \left(\alpha - \sum_n \frac{nA_n \sin n\theta}{\sin\theta}\right)^2 \tag{2.2}$$

$$(n=1, 3, 5, \ldots)$$

где $\mu_1 = \frac{a_1 b}{4l}$, $\mu_2 = \frac{a_2 b}{4l}$.

Обратимся к крылу эллиптической формы в плане ($b = b_0 \sin\theta$) с неизменной вдоль по размаху параболической характеристикой сечения [1]. Обозначим

$$\chi_1 = \frac{a_1 b_0}{4l}, \qquad \chi_2 = \frac{a_2 b_0}{4l}$$

и преобразуем уравнение (2.2) для эллиптического крыла к виду

$$\sum_n A_n \sin n\theta = \chi_1 \sin\theta \left(\alpha - \sum_n \frac{nA_n \sin n\theta}{\sin\theta}\right) + \chi_2 \sin\theta \left(\alpha - \sum_n \frac{nA_n \sin n\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$(n=1, 3, 5, \ldots)$$

и, следовательно,

$$[\chi_2 A_1^2 - (2\chi_2\alpha + \chi_1 + 1) A_1 + (\chi_2\alpha^2 + \chi_1\alpha)] \sin\theta - (2\chi_2\alpha + \chi) \sum_n n A_n \sin n\theta -$$

$$- \sum_n A_n \sin n\theta + \frac{\chi_2}{\sin\theta} \left(\sum_n nA_n \sin n\theta\right)^2 = 0 \qquad (n=3, 5, 7, \ldots)$$

[1] Фактически у крыла эллиптической формы, составленного из подобных профилей, характеристика сечения из-за влияния числа Рейнольдса может изменяться.

Нетрудно видеть, что это уравнение удовлетворяется при любом θ, если

$$\chi_2 A_1^2 - (2\chi_2\alpha + \chi_1 + 1) A_1 + (\chi_2\alpha^2 + \chi_1\alpha) = 0, \qquad A_n = 0 \qquad (n = 3, 5, 7, \ldots)$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно A_1, находим,

$$A_1 = \frac{(2\chi_2\alpha + \chi_1 + 1) - \sqrt{4\chi_2\alpha + (1 + \chi_1)^2}}{2\chi_2} \tag{2.3}$$

Второе решение не имеет физического смысла.

Для рассмотренного частного решения получился эллиптический закон распределения циркуляции по размаху $\Gamma = 2vlA_1 \sin\theta$. Скос потока $\Delta\alpha = A_1$ и коэффициент подъемной силы остаются постоянными вдоль размаха.

Если $[4\chi_2\alpha + (1 + \chi_1)^2] < 0$, то по формуле (2.3) нельзя найти действительного значения A_1. Таким образом при

$$\alpha > \alpha^* = -\frac{(1 + \chi_1)^2}{4\chi_2} \tag{2.4}$$

нельзя из параболической характеристики сечения построить характеристику эллиптического крыла с помощью уравнения Прандтля.

Для того чтобы лучше выяснить геометрический смысл полученного решения, рассмотрим величину

$$\frac{\partial A_1}{\partial \alpha} = 1 - \frac{1}{\sqrt{4\chi_2\alpha + (1 + \chi_1)^2}} \tag{2.5}$$

пропорциональную $\partial C_y / \partial \alpha$. При $\alpha = \alpha^*$ производная $\partial C_y / \partial \alpha \to \infty$, т. е. кривая $C_y(\alpha)$ для крыла конечного размаха имеет вертикальную касательную, после чего решение перестает существовать.

Рассмотрим поведение кривой $C_y(\alpha)$ для эллиптического крыла конечного размаха вблизи $C_{y\max}$, и пусть при $C_y = C_{y\max}$ критический угол атаки $\alpha = \alpha_c$. Соответственные значения для крыла бесконечного размаха $C_{y\max\infty}$, $\alpha_{c\infty}$. Если обозначить

$$A_{1\max\infty} = \frac{b_0}{4l} C_{y\max\infty}, \qquad \text{то} \quad A_{1\max} = A_{1\max\infty} = -\frac{\chi_1^2}{4\chi_2} \tag{2.6}$$

т. е. величина $C_{y\max} = C_{y\max\infty}$. Для крыльев, имеющих форму в плане, отличную от эллиптической, $C_{y\max}$ несколько меньше, чем $C_{y\max\infty}$, вследствие неодновременности наступления срыва по размаху. Далее

$$\alpha_C = -\frac{\chi_1^2 + 2\chi_1}{4\chi_2}, \qquad \alpha_{C\infty} = -\frac{\chi_1}{2\chi_2}, \qquad \alpha_C - \alpha_{C\infty} = -\frac{\chi_1^2}{4\chi_2} \tag{2.7}$$

Получается, что $C_{y\max}$ сдвигается на бо́льшие значения α, по сравнению с крылом бесконечного размаха ($\chi_2 < 0$).

Найдем радиусы кривизны кривых $C_y(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_C$ и при $\alpha = \alpha_{C\infty}$ для конечного и бесконечного размаха. Если обозначить их соответственно через ρ, ρ_∞ и ввести $r = \frac{1}{4}(b_0/l)\rho$, $r_\infty = \frac{1}{4}(b_0/l)\rho_\infty$, то легко показать, что

$$r = r_\infty = \frac{1}{2\chi_2} \tag{2.8}$$

т. е. радиус кривизны «верхушки» кривой $C_y(\alpha)$ остается неизменным при переходе от бесконечного к конечному размаху.

Это, конечно, справедливо только для частных решений.

Отметим еще несколько простых геометрических связей для полученных точных решений. Назовем A_1^* значение A_1, соответствующее α^*. Нетрудно показать, что

$$A_1^* = \frac{1-\chi_1^2}{4\chi_2}, \qquad A_{1\,\max} - A_1^* = \alpha^* - \alpha_C = -\frac{1}{4\chi_2} = -\frac{r}{2} \tag{2.9}$$

причем $A_{1\max} > A_1^*$.

Рассмотрим семейство парабол с постоянным значением $C_{y\,\max}$ и примем $A_{1\,\max} = A_{1\,\max\,\infty} = k^2$. Сравнивая (2.6) и (2.7), находим, что $\alpha_C - \alpha_{C\infty} = k^2$, т. е. получается постоянный сдвиг критического угла атаки при переходе от крыла бесконечного размаха к крылу конечного размаха для всего семейства парабол. Оставляя $C_{y\,\max}$ неизменным, будем приближать верхушку параболы к оси C_y. При этом $\rho \to 0$, а $\chi_2 \to \infty$.

Покажем предельную форму для кривой $C_y(\alpha)$ эллиптического крыла конечного размаха. Находим, что

$$\lim_{\chi_2\to\infty} A_1 = \lim_{\chi_2\to\infty} \frac{(2\chi_2\alpha + \chi_1 + 1) - \sqrt{4\chi_2\alpha + (1+\chi_1)^2}}{2\chi_2} = \alpha \qquad \left(-\frac{\chi_1^2}{4\chi_2} = k^2\right)$$

и в пределе получаем прямую $A_1 = \alpha$. Величина $\alpha^* \to \alpha_C$, и решение существует только до $C_{y\,\max}$.

Как известно, коэффициент индуктивного сопротивления пропорционален A_1^2. Для линейного случая $C_{xi} = C_{xi}(\alpha)$ изменяется по параболе. Для рассмотренного здесь нелинейного случая $C_{xi}(\alpha)$ имеет максимум при $\alpha = \alpha_C$, вертикальную касательную при $\alpha = \alpha^*$, а при $\alpha > \alpha^*$ решения не существует.

3. Обобщим полученный результат на тот случай, когда характеристика

$$C_y = a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 \tag{3.1}$$

Уравнение (1.4) для крыла эллиптической формы в плане с неизменной вдоль по размаху характеристикой сечения и в этом случае имеет точное решение. Введем обозначение

$$\mu_n = \frac{a_n b}{4l}, \qquad \chi_n = \frac{\mu_n}{\sin\theta} \qquad (n = 1, 2, 3)$$

Легко показать, что уравнение (1.4) удовлетворяется при любом θ, если

$$-\chi_3 A_1^3 + (\chi_2 + 3\chi_3\alpha) A_1^2 - (1 + \chi_1 + 2\chi_2\alpha + 3\chi_3\alpha^2) A_1 + (\chi_1\alpha + \chi_2\alpha^2 + \chi_3\alpha^3) = 0,$$
$$A_n = 0 \qquad (n = 3, 5, 7, \ldots) \tag{3.2}$$

т. е. A_1 есть корень кубичного уравнения.

Эллиптический закон распределения циркуляции сохраняется. Находим

$$\frac{\partial A_1}{\partial \alpha} = \frac{\varphi + 1}{\varphi}; \quad \varphi = -3\chi_3 A_1^2 + 2(3\chi_3\alpha + \chi_2) A_1 - (3\chi_3\alpha^2 + 2\chi_2\alpha + \chi_1 + 1) \tag{3.3}$$

При $\varphi = 0$ величина $\partial A_1 / \partial\alpha \to \infty$. Из условия $\varphi = 0$ легко найти

$$A_1^* = \frac{(3\chi_3\alpha^* + \chi_2) + \sqrt{\chi_2^2 - 3\chi_3(1 + \chi_1)}}{3\chi_3}$$

или, используя соотношение (3.2),

$$A_2^* = \frac{(2\chi_2^3 - 9\chi_1\chi_2\chi_3) + (2\chi_2^2 - 6\chi_1\chi_3 + 3\chi_3)\sqrt{\chi_2^2 - 3\chi_3(1 + \chi_1)}}{27\chi_3^2} \tag{3.4}$$

Для многих комбинаций a_1, a_2, a_3 существует действительное значение A_1^*. При $\alpha > \alpha^*$ уравнение (3.2) не имеет вещественного решения. Случай точки перегиба при $\alpha = \alpha^*$ исключен. В этом нетрудно убедиться, если рассмотреть радиус кривизны при $\alpha = \alpha^*$ в повернутой на 90° системе координат.

Далее согласно (3.3) при $\varphi + 1 = 0$ производная $\partial A_1 / \partial \alpha = 0$. Находим, что

$$A_{1\,\max} = A_{1\,\max\,\infty} = \frac{(2\chi_2^3 - 9\chi_1\chi_2\chi_3) + (6\chi_1\chi_3 - 2\chi_2^2)\sqrt{\chi_2^2 - 3\chi_1\chi_3}}{27\chi_3^2} \tag{3.5}$$

Кроме того, можно найти радиус кривизны «верхушки» кривой $C_y(\alpha)$ для крыла бесконечного и конечного размаха. Получаем, что

$$r = r_\infty = -\frac{1}{2\sqrt{\chi_2^2 - 3\chi_1\chi_3}} \tag{3.6}$$

Таким образом для случая кубической параболы остается справедливым: 1) при $\alpha > \alpha^*$ решения уравнения Прандтля не существует; 2) коэффициент $C_{y\max} = C_{y\max\infty}$; 3) $\rho = \rho_\infty$.

Рассмотрим крыло эллиптической формы в плане с постояной вдоль размаха произвольной характеристикой сечения

$$C_y = \sum_{i=1}^{i=N} a_i \alpha^i \tag{3.7}$$

Введем функцию

$$F = \sum_{i=1}^{i=N} \chi_i \alpha^i, \qquad \text{где} \qquad \mu_i = \frac{a_i b}{4l}, \quad \chi_i = \frac{\mu_i}{\sin\theta} \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

Легко показать, что и в этом случае уравнение (1.4) имеет точное решение, которое можно записать в форме

$$-A_1 + \sum_{i=0}^{i=N} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{\partial^i F}{\partial \alpha^i} A_1^i = 0, \qquad A_n = 0 \qquad (n = 3, 5, 7, \ldots) \tag{3.8}$$

Величина A_1 находится как корень уравнения N-ой степени. Решение можно построить и для случая кусочно-непрерывных кривых. Для всех рассмотренных частных решений сохраняется эллиптический закон распределения циркуляции по размаху.

Поступила в редакцию
26 V 1944

J. M. SEREBRIISKY. — PARTICULAR SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATION IN THE THEORY OF THE WING OF FINITE SPAN

The author deals with strict particular solutions of the Prandtl equation for a wing having an elliptic form when the lift coefficient depends non-linearly on the incidence.

It is shown that for certain lift coefficient curves there is a value of the incidence (larger than the critical angle) starting from which the real solution of the Prandtl equation does not exist.

For the simple parabolic relationship between the lift coefficient and the angle of attack the author obtains the formulae for transition from the basic relationships for an aerofoil to the relationships for a wing of finite span.