Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

О ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ГАЗА ПРИ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

А. И. НЕКРАСОВ

(Москва)

Основная математическая трудность теории движения газа при дозвуковых скоростях состоит в том, что уравнение для потенциала скоростей для случая газа не будет линейным.

Моленброк и Чаплыгин были первыми исследователями, которым удалось получить линейные уравнения для движения газа путем взятия за независимые переменные модуля вектора скорости газа и угла этого вектора скорости с каким-нибудь неизменным направлением; работа Чаплыгина, появившаяся в 1904 г., и в настоящее время вызывает дальнейшие исследования, что видно из работы Hsue-Shen Tsien, появившейся в 1939 г.

Прандтль, допуская, что движущееся тело производит в газе незначительные возмущения, показал, что задачу об обтекании такого тела газовым потоком можно привести к решению линейного уравнения.

Методы Поджи и Вальтера, основанные на однех и тех же идеях, приводят задачу к решению бесконечной системы уравнений Пуассона.

Христианович показал, что задача на обтекание плоской фигуры газовым потоком приближенно может быть заменена задачей на обтекание некоторой соответствующей плоской фигуры потоком несжимаемой жидкости.

Все изложенное касается случаев движения газа с дозвуковыми скоростями; при движении газа с сверхзвуковыми скоростями с пользой можно применить метод характеристик, как это сделал Буземан.

Основная мысль настоящей работы состоит в восстановлении линейности уравнения для потенциала скоростей путем применения преобразования Лежандра; при этом за независимые переменные оказывается удобным взять модуль вектора скорости газа и угол вектора скорости газа с осью абсцисс.

Отнесем плоскопараллельное движение газа к прямоугольной системе неподвижных осей xOy координат. Если газ имеет на бесконечности скорость $\mathbf{V}_\infty$, то ось x будем брать параллельной вектору $\mathbf{V}_\infty$; в частности, газ может на бесконечности покоиться, тогда направление оси x можно взять произвольным.

Мы примем, что давление p в газе связано с его плотностью ρ законом

$$p = C\rho^\gamma \tag{1}$$

где C и γ суть постоянные; для воздуха $\gamma = 1.408$.

Если u и v обозначают проекции скорости $\mathbf{V}$ газа на оси x и y, то уравнения установившегося движения газа, как известно, имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{2}$$

Предположим, что для рассматриваемого течения газа существует потенциал скоростей $\varphi(x, y)$, т. е.

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{3}$$

При этих условиях первые два из уравнений (2) с учетом уравнения (1) имеют интеграл Бернулли

$$V^2+\frac{2C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}=V_\infty^2+\frac{2C\gamma}{\gamma-1}\rho_\infty^{\gamma-1}=\frac{2C\gamma}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma-1}$$

где ρ_0 есть плотность газа при отсутствии движения в нем. Для воздуха будет $2/(\gamma-1)=4.902$. Введем скорость звука c по формуле

$$c^2=\gamma\frac{p}{\rho}=\gamma C\rho^{\gamma-1}$$

Тогда интегралу Бернулли можно придать вид

$$V^2+\frac{2}{\gamma-1}c^2=V_\infty^2+\frac{2}{\gamma-1}c_\infty^2=\frac{2}{\gamma-1}c_0^2$$

Отсюда приходим к известным формулам

$$c^2=c_0^2-\frac{1}{2}(\gamma-1)V^2,\qquad c_\infty^2=c_0^2-\frac{1}{2}(\gamma-1)V_\infty^2$$

Имеем

$$V_\infty^2+\frac{2}{\gamma-1}c_\infty^2=\frac{2}{\gamma-1}c_\infty^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)\qquad\left(M_\infty=\frac{V_\infty}{c_\infty}\right)$$

Здесь M_∞ представляет собой число Маха-Берстоу для бесконечно удаленной точки газового потока. Введем обозначение

$$n^2=\frac{2}{\gamma-1}c_\infty^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right) \tag{4}$$

Для воздуха $n=2.214c_\infty(1+0.102M_\infty^2)$.

Тогда интегралу Бернулли можно будет придать вид

$$V^2+\frac{2C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}=n^2,\qquad \text{или}\qquad \rho=\left(\frac{\gamma-1}{2C\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}(n^2-V^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{5}$$

Вставляя найденное выражение для плотности ρ в последнюю из формул (1) и вводя потенциал скоростей $\varphi(x, y)$ по формулам (3), придем для определения функции $\varphi(x, y)$ к нелинейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-n^2\right]+\frac{4}{\gamma-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+$$
$$+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-n^2\right]=0 \tag{6}$$

Введем обозначения

$$k^2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\qquad(\text{для воздуха } k^2=5.902) \tag{7}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-u=p\,,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-v=q\,,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=r\,,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=s\,,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=t$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$r(k^2p^2+q^2-n^2)+\frac{4}{\gamma-1}pqs+t(p^2+k^2q^2-n^2)=0 \tag{8}$$

Чтобы преобразовать уравнение (8) в линейное уравнение относительно искомой функции, применим к уравнению (8) преобразование Лежандра. Именно, пусть будет $\Phi(X,Y)$ функция двух независимых переменных X,Y. Введем обозначения

$$P=\frac{\partial\Phi}{\partial X}\,,\quad Q=\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\,,\quad R=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}\,,\quad S=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X\,\partial Y}\,,\quad T=\frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2}$$

Преобразование Лежандра определяется формулами

$$x=P\,,\quad y=Q\,,\quad \varphi=PX+QY-\Phi\,,\quad p=X\,,\quad q=Y$$

$$r=\frac{T}{RT-S^2}\,,\quad s=\frac{-S}{RT-S^2}\,,\quad t=\frac{R}{RT-S^2}$$

Применив преобразование Лежандра к уравнению (8), получим линейное уравнение относительно искомой функции $\Phi(X,Y)$

$$R(X^2+k^2Y^2-n^2)-\frac{4}{\gamma-1}SXY+T(k^2X^2+Y^2-n^2)=0$$

или несколько иначе

$$(X^2+Y^2-n^2)(R+T)+\frac{2}{\gamma-1}(X^2T-2XYS+Y^2R)=0 \tag{9}$$

Обозначая через θ угол вектора скорости V газа с осью x, введем вместо независимых переменных X и Y независимые переменные V и θ по формулам

$$X=-u=-V\cos\theta,\qquad Y=-v=-V\sin\theta \tag{10}$$

Тогда

$$x=P=\frac{\partial\Phi}{\partial X}=-\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial V}+\frac{\sin\theta}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,,\qquad y=Q=\frac{\partial\Phi}{\partial Y}=-\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial V}-\frac{\cos\theta}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \tag{11}$$

Исходя из формул (10), нетрудно найти выражения вторых частных производных R, T и S. Именно,

$$R=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)=-\cos\theta\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)+\frac{\sin\theta}{V}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)=$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial V^2}+\frac{\sin^2\theta}{V^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{V}\frac{\partial^2\Phi}{\partial V\,\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial V}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{V^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

$$T=\frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2}=\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)=-\sin\theta\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)-\frac{\cos\theta}{V}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)=$$

$$=\sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial V^2}+\frac{\cos^2\theta}{V^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{V}\frac{\partial^2\Phi}{\partial V\,\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial V}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{V^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

$$S=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X\,\partial Y}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)=-\cos\theta\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)+\frac{\sin\theta}{V}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)=$$

$$=\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial V^2}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{V^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{V}\frac{\partial^2\Phi}{\partial V\,\partial\theta}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial V}-\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{V^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

Отсюда

$$R+T=\frac{\partial^2\Phi}{\partial V^2}+\frac{1}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial V}+\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$$

Пользуясь этими соотношениями, легко также установить, что

$$X^2T-2XYS+Y^2R=V\frac{\partial\Phi}{\partial V}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$$

Поэтому уравнению (9) можно придать вид

$$V^2(V^2-n^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial V^2}+V(k^2V^2-n^2)\frac{\partial\Phi}{\partial V}+(k^2V^2-n^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=0 \tag{12}$$

Положим

$$V=n\tau \tag{13}$$

Уравнение (12) с помощью этой подстановки можно представить в виде

$$\tau^2(\tau^2-1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}+\tau(k^2\tau^2-1)\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+(k^2\tau^2-1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=0 \tag{14}$$

Уравнения (11) примут вид

$$nx=-\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+\frac{\sin\theta}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta},\qquad ny=-\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}-\frac{\cos\theta}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \tag{15}$$

Уравнение (14) есть основное уравнение для потенциального движения газа. Чтобы выяснить, к какому типу относится уравнение (14), заметим, что для его характеристик имеем

$$\begin{vmatrix}\tau^2(\tau^2-1) & 0 & k^2\tau^2-1\\ 1 & \dfrac{d\theta}{d\tau} & 0\\ 0 & 1 & \dfrac{d\theta}{d\tau}\end{vmatrix}=0 \quad\text{или}\quad \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2=\frac{k^2\tau^2-1}{\tau^2(\tau^2-1)}$$

Мы видим, что уравнение (14) будет уравнением гиперболического или эллиптического типа, если соответственно

$$\frac{1}{k}<\tau<1\quad\text{или}\quad \tau<\frac{1}{k},\quad \tau>1$$

Мы рассмотрим лишь случаи эллиптического типа, когда

$$\tau<\frac{1}{k}=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\quad(\text{для воздуха }\ \tau<0.41) \tag{16}$$

Из неравенства (16) следует, что мы будем рассматривать поток газа лишь с дозвуковыми скоростями.

Для несжимаемой жидкости потенциал скоростей $\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\partial^2\varphi/\partial x^2+\partial^2\varphi/\partial y^2=0$ или $r+t=0$. Преобразование Лежандра переводит это уравнение также в уравнение Лапласа $R+T=0$. Взяв за независимые переменные количества V и θ, получим

$$V^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial V^2}+V\frac{\partial\Phi}{\partial V}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=0$$

Очевидно, что в этом уравнении переменное V можно заменить переменным τ таким, чтобы отношение V/τ было равно любому, заранее заданному положительному числу; таким образом и для случая несжимаемой жидкости можно пользоваться формулой (13), только в этом случае постоянное количество n уже не будет иметь физического смысла, определяемого формулой (4).

Следовательно, предыдущему уравнению можно будет придать вид

$$\tau^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \tau \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{17}$$

Таким образом уравнение (14) для сжимаемой жидкости переходит для несжимаемой жидкости в уравнение (17); очевидно, что уравнения (15) имеют место безразлично как для уравнения (14), так и для уравнения (17).

Предположим, что функция Φ зависит только от переменного θ; тогда уравнения (17) и (14) оба переходят в уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} = 0$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$\Phi(\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + C$$

где Γ и C суть произвольные постоянные. Следовательно, по формулам (15)

$$nx = \frac{\Gamma}{2\pi\tau}\sin\theta, \quad ny = -\frac{\Gamma}{2\pi\tau}\cos\theta, \quad \text{или} \quad x = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sin\theta}{V}, \quad y = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\cos\theta}{V}$$

Возводя в квадрат и складывая, найдем

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Отсюда следует, что вдоль любой из окружностей, описанных из начала координат, скорость V будет постоянной. Так как для рассматриваемых нами случаев движения газа должно быть $\tau < 1/k$, то из предыдущих формул легко получим, что для газа радиусы r этих окружностей должны быть больше граничного радиуса r_1, определяемого формулой

$$r_1 = \frac{\Gamma}{2\pi n}$$

Учитывая, что вдоль указанных окружностей $V = \text{const}$ и, следовательно,

$$u = V\cos\theta, \quad v = V\sin\theta, \quad dx = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\cos\theta}{V}d\theta, \quad dy = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sin\theta}{V}d\theta$$

найдем циркуляцию скорости вдоль какой-нибудь из этих окружностей:

$$\int (u\,dx + v\,dy) = \frac{\Gamma}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = \Gamma$$

Таким образом количество Γ равно циркуляции, т. е. известные из гидродинамики положения для циркуляционного движения без изменения можно перенести и в аэродинамику, если исключить понятие точечного вихря.

Предположим далее, что функция Φ зависит только от переменного τ; тогда уравнение (17) и уравнение (14) примут соответственно вид

$$\tau \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + \frac{d\Phi}{d\tau} = 0, \qquad \tau(\tau^2 - 1)\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + (k^2\tau^2 - 1)\frac{d\Phi}{d\tau} = 0 \tag{18}$$

Обозначим интеграл первого уравнения (18), голоморфный при $\tau = 0$, через $G_0(\tau)$, а интеграл, имеющий точку $\tau = 0$, особою точкою, через $H_0(\tau)$. Легко видеть, что

$$G_0(\tau) = C_0, \qquad H_0(\tau) = K_0 \log \tau \tag{19}$$

г е C_0 и K_0 суть произвольные постоянные. Возьмем интеграл $H_0(\tau)$; применяя формулы (15), получим

$$nx = -K_0 \frac{\cos\theta}{\tau}, \quad ny = -K_0 \frac{\sin\theta}{\tau}, \quad \text{или} \quad x = -K_0 \frac{\cos\theta}{V}, \quad y = -K_0 \frac{\sin\theta}{V}$$

Отсюда находим, что $V = K_0 / r$, т. е. в зависимости от знака постоянного K_0 имеем случай источника или стока в начале координат.

Обращаясь ко второму уравнению (18), обозначим через $A_0(\tau)$ интеграл этого уравнения, голоморфный при $\tau = 0$, и через $B_0(\tau)$ — интеграл этого уравнения, имеющий точку $\tau = 0$ особою точкою. Введем новое переменное

$$\eta = \tau^2 \tag{20}$$

и положим

$$\mu = \frac{k^2 - 1}{2} = \frac{1}{\gamma - 1} \qquad (\text{для воздуха } \mu = 2.451)$$

Нетрудно убедиться, что

$$A_0(\tau) = C_0, \quad B_0(\tau) = K_0 \int \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)^\mu}$$

Используя формулы (15), получим

$$nx = -\cos\theta \frac{dB_0}{d\tau} = -\frac{2K_0}{\tau(1-\tau^2)^\mu}\cos\theta, \qquad ny = -\sin\theta \frac{dB_0}{d\tau} = -\frac{2K_0}{\tau(1-\tau^2)^\mu}\sin\theta$$

Отсюда имеем

$$x = -2K_0 \frac{\cos\theta}{V(1 - V^2/n^2)^\mu}, \qquad y = -2K_0 \frac{\sin\theta}{V(1 - V^2/n^2)^\mu}$$

или

$$V\left(1 - \frac{V^2}{n^2}\right)^\mu = \frac{2K_0}{r} \tag{21}$$

Левая часть формулы (21) обращается в нуль при $V = 0$ и при $V = n$; она имеет максимум при

$$V^2 = \frac{n^2}{1 + 2\mu} = \frac{n^2}{k^2}, \qquad \text{т. е. при} \quad \tau = \frac{1}{k}$$

Так как $\tau = 1/k$ есть граница перехода для уравнения (14) от эллиптического типа к гиперболическому типу, то отсюда следует, что не переходить к гиперболическому типу для уравнения (14)—значит не переходить к многозначности решений относительно скорости V для уравнения (21).

Из формулы (21) следует, что при $r = \infty$ будет $V = 0$. В этом решении имеем для газа в зависимости от знака постоянной K_0 подобие случаю источника или стока для несжимаемой жидкости. Но вследствие принятого ограничения для скорости газа точечный источник для газа существовать не может, и газ должен вырываться из точек некоторой окружности (C), описанной из начала координат радиусом, равным r_1, причем количество r_1 определяется из условия, что в уравнении (21) количество V имеет наибольшее значение, равное n/k. Следовательно,

$$\frac{n}{k}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{\mu}=\frac{2K_0}{r_1}, \qquad \text{т. е.} \qquad r_1=2K_0\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\mu}\frac{k}{n}$$

Полагая в уравнении (17)

$$\Phi(\tau,\theta)=Z_m(\tau)\,e^{\pm im\theta}$$

где m есть какое-нибудь действительное число, найдем, что функции $Z_m(\tau)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\tau^2\frac{d^2Z_m}{d\tau^2}+\tau\frac{dZ_m}{d\tau}-m^2Z_m=0 \tag{22}$$

Приведем интегралы этого уравнения для некоторых целых значений числа m:

$$\begin{array}{llll} \underline{m=0} & \underline{m=1} & \underline{m=2} & \underline{m=3} \quad \dots \\ G_0(\tau)=C_0 & G_1(\tau)=C_1\tau & G_2(\tau)=C_2\tau^2 & G_3(\tau)=C_3\tau^3 \quad \dots \\ H_0(\tau)=K_0\log\tau & H_1(\tau)=\dfrac{K_1}{\tau} & H_2(\tau)=\dfrac{K_2}{\tau^2} & H_3(\tau)=\dfrac{K_3}{\tau^3} \quad \dots \end{array} \tag{23}$$

где $C_0, C_1, C_2, \dots$ и $K_0, K_1, K_2, \dots$ суть произвольные постоянные.

Такая же подстановка в уравнение (14) приведет его к виду

$$\tau^2(\tau^2-1)\frac{d^2Z_m}{d\tau^2}+\tau(k^2\tau^2-1)\frac{dZ_m}{d\tau}-m^2(k^2\tau^2-1)Z_m=0 \tag{24}$$

Интегралы этого уравнения имеют особыми точками точки $\tau=0$, $\tau=+1$ и $\tau=-1$, из которых лишь точка $\tau=0$ заслуживает внимания, так как рассматриваемые значения количества τ ограничены областью $(0,\ 1/k)$.

Нетрудно найти, что для целых значений числа m интегралы уравнения (24), для которых точка $\tau=0$ есть обыкновенная точка, будут

$$\begin{array}{lll} \underline{m=0} & \underline{m=1} & \underline{m=2} \\ A_0(\tau)=C_0 & A_1(\tau)=C_1\tau & A_2(\tau)=C_2\tau^2 f_2(\tau^2) \\ & \underline{m=3} & \underline{m=4} \\ & A_3(\tau)=C_3\tau^3 f_3(\tau^2) & A_4(\tau)=C_4\tau^4 f_4(\tau^2) \quad \dots \end{array} \tag{25}$$

где $C_0, C_1, C_2, \dots$ суть произвольные постоянные, и функции $f_2(\tau^2)$, $f_3(\tau^2)$, $f_4(\tau^2)$, ... имеют вид

$$f_2(\tau^2)=1-\frac{k^2-1}{6}\tau^2-\frac{k^2-1}{16}\tau^4-\frac{(k^2-1)(k^2+15)}{480}\tau^6-\frac{(k^2-1)(k^2+15)(k^2+14)}{11520}\tau^8-$$
$$-\frac{(k^2-1)(k^2+15)^2(k^2+14)}{268\,800}\tau^{10}-\frac{(k^2-1)(k^2+15)^2(k^2+14)(2k^2+33)}{12302\,400}\tau^{12}-\dots$$

$$f_3(\tau^2)=1-\frac{3(k^2-1)}{8}\tau^2+\frac{3(k^2-1)(k^2-5)}{80}\tau^4+\frac{(k^2-1)(k^2-5)(21-k^2)}{960}\tau^6+$$
$$+\frac{3(k^2-1)(k^2-5)(21-k^2)}{4\,480}\tau^8+\frac{3(k^2-1)(k^2-5)(21-k^2)(k^2+55)}{358\,400}\tau^{10}+\dots$$

$$f_4(\tau^2)=1-\frac{3(k^2-1)}{5}\tau^2+\frac{(k^2-1)(k^2-3)}{8}\tau^4+\frac{(k^2-1)(k^2-3)(7-k^2)}{84}\tau^6+$$
$$+\frac{(k^2-1)(k^2-3)(7-k^2)(15-k^2)}{1\,792}\tau^8+\frac{(k^2-1)(k^2-3)(7-k^2)(15-k^2)(33-k^2)}{62\,720}\tau^{10}+\ldots$$

и т. д. Для воздуха $k^2=5.902$, и вычисления дают

$$f_2(\tau^2)=1-0.81700\tau^2-0.30637\tau^4-0.21346\tau^6-0.17701\tau^8-0.15857\tau^{10}-0.14801\tau^{12}-\ldots$$
$$f_3(\tau^2)=1-1.18382\tau^2+0.16581\tau^4+0.06954\tau^6+0.04470\tau^8+0.03403\tau^{10}+\ldots$$
$$f_4(\tau^2)=1-2.94120\tau^2+1.77820\tau^4+0.18595\tau^6+0.07930\tau^8+0.06140\tau^{10}+\ldots \text{ и т. д.}$$

Для интегралов $B_m(\tau)$, у которых точка $\tau=0$ есть особая точка, найдем

$$B_m(\tau)=K_m\eta^{\frac{1}{2}m}f_m(\eta)\int\frac{d\eta}{\eta^{m+1}(1-\eta)^{\mu}f_m^2(\eta)} \tag{26}$$

где K_m суть произвольные постоянные, а $\eta=\tau^2$.

Рассмотрим еще решения уравнений (22) и (24) для случая, когда $m=\frac{1}{2}$.

Что касается уравнения (22), то, каково бы ни было положительное число m, уравнение (22) всегда имеет два решения: $C_m\tau^m$ и K_m/τ^m, где C_m и K_m — произвольные постоянные; для $m=\frac{1}{2}$ эти решения будут $C_{\frac{1}{2}}\sqrt{\tau}$ и $K_{\frac{1}{2}}/\sqrt{\tau}$.

Уравнение (24) для $m=\frac{1}{2}$ имеет решение, обращающееся в нуль при $\tau=0$:

$$A_{\frac{1}{2}}(\tau)=C_{\frac{1}{2}}\sqrt{\tau}\,f_{\frac{1}{2}}(\tau^2) \tag{27}$$

где

$$f_{\frac{1}{2}}(\tau^2)=1+a_2\tau^2+a_4\tau^4+a_6\tau^6+\ldots \tag{28}$$

Положим для краткости, что

$$\alpha=\frac{2\gamma}{\gamma-1},\quad \beta=\frac{1}{2(\gamma-1)}\qquad (\text{для воздуха } \alpha=6.902,\ \beta=1.225)$$

Находим рекурентное соотношение

$$\frac{a_{p+2}}{a_p}=\frac{p^2+p(\alpha-1)+\beta}{p^2+4p+4}$$

и, следовательно,

$$a_0=1,\quad a_2=\frac{\beta}{2^2},\quad a_4=\frac{\beta(\beta+2\alpha+2\cdot 1)}{2^24^2},\quad a_6=\frac{\beta(\beta+2\alpha+2\cdot 1)(\beta+4\alpha+4\cdot 3)}{2^24^26^2}$$
$$a_8=\frac{\beta(\beta+2\alpha+2\cdot 1)(\beta+4\alpha+4\cdot 3)(\beta+6\alpha+6\cdot 5)}{2^24^26^28^2},\ldots$$

Приводим численные значения для воздуха:

$$a_2/a_0=0.3052,\qquad a_4/a_2=1.0642,\qquad a_6/a_4=1.1342$$
$$a_8/a_6=1.1349,\qquad a_{10}/a_8=1.1244,\qquad a_{12}/a_{10}=1.1128,\ldots$$

Чтобы иметь физический пример для случая, когда $m=\frac{1}{2}$, рассмотрим следующее решение уравнения (17):

$$\Phi(\tau,\theta)=-2na\sqrt{\tau_0}\sqrt{\tau}\cos\tfrac{1}{2}\theta \tag{29}$$

Так как

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=-na\sqrt{\tau_0}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\cos\frac{\theta}{2},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=na\sqrt{\tau_0}\sqrt{\tau}\sin\frac{\theta}{2}$$

то, используя формулы (15), получим

$$nx=na\sqrt{\tau_0}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta+na\sqrt{\tau_0}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\quad x=a\sqrt{V_0}\frac{1}{\sqrt{V}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$ny=na\sqrt{\tau_0}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta-na\sqrt{\tau_0}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta,\quad y=a\sqrt{V_0}\frac{1}{\sqrt{V}}\sin\frac{\theta}{2}$$

Возводя x и y в квадрат и складывая, будем иметь

$$V = V_0 a^2 / r^2 \tag{30}$$

Если будет $r = a$, то $V = V_0$, т. е. во всех точках окружности, описанной из начала координат радиусом, равным a, модуль вектора скорости жидкости постоянен и равен V_0. Если ω есть угол какого-нибудь радиуса окружности $r = a$ с осью x, то в точках этой окружности будет

$$x = a \cos \tfrac{1}{2} \theta = a \cos \omega, \qquad y = a \sin \tfrac{1}{2} \theta = a \sin \omega$$

т. е. $\theta = 2\omega$; таким образом угол вектора скорости жидкости с осью x в любой точке окружности $r = a$ вдвое больше угла радиуса окружности с осью x, проведенного в эту точку. Это — случай диполя, расположенного в начале координат. Соответствующее решение для газа должно иметь вид

$$\Phi(\tau, \theta) = A_{\frac{1}{2}}(\tau) \cos \tfrac{1}{2} \theta = C_{\frac{1}{2}} \sqrt{\tau} f_{\frac{1}{2}}(\tau^2) \cos \tfrac{1}{2} \theta$$

Положим для сближения этого выражения с формулой (29), что

$$C_{\frac{1}{2}} = -2na \sqrt{\tau_0}\, C, \qquad f_{\frac{1}{2}}(\tau^2) = f(\tau^2)$$

где C есть произвольное постоянное; тогда

$$\Phi(\tau, \theta) = -2na \sqrt{\tau_0}\, C \sqrt{\tau} f(\tau^2) \cos \tfrac{1}{2} \theta \tag{31}$$

Из формулы (31) находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\frac{na \sqrt{\tau_0} C}{\sqrt{\tau}} \left[f(\tau^2) + 2\tau f'(\tau^2) \right] \cos \frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = na \sqrt{\tau_0}\, C \sqrt{\tau} f(\tau^2) \sin \frac{\theta}{2}$$

Отсюда по формулам (15) получим

$$x = \frac{a \sqrt{\tau_0}\, C}{\sqrt{\tau}} \left\{ \left[f(\tau^2) + \tau f'(\tau^2) \right] \cos \frac{\theta}{2} + \tau f'(\tau^2) \cos \frac{3\theta}{2} \right\}$$

$$y = \frac{a \sqrt{\tau_0}\, C}{\sqrt{\tau}} \left\{ \left[f(\tau^2) + \tau f'(\tau^2) \right] \sin \frac{\theta}{2} + \tau f'(\tau^2) \sin \frac{3\theta}{2} \right\}$$

Мы видим, что при $\theta = 0$ и при $\theta = 2\pi$ будет $y = 0$, а при $\theta = \pi$ будет $x = 0$.

Потребуем по аналогии с движением несжимаемой жидкости, чтобы было $V = V_0$ при $x = +a$, $\theta = 0$ и при $x = -a$, $\theta = 2\pi$. Первое из двух предыдущих соотношений дает, что для этого должно быть

$$C = \frac{1}{f(\tau_0^2) + 2\tau_0 f'(\tau_0^2)}$$

Введем обозначения

$$M = f(\tau^2) + \tau f'(\tau^2), \quad N = \tau f'(\tau^2), \quad M_0 = f(\tau_0^2) + \tau_0 f'(\tau_0^2), \quad N_0 = \tau_0 f'(\tau_0^2) \tag{32}$$

Тогда, обращая внимание на полученное значение для постоянного C, формулам для количеств x и y можно придать вид

$$x = a \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}}\, \frac{M \cos \frac{1}{2} \theta + N \cos \frac{3}{2} \theta}{M_0 + N_0}, \qquad y = a \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}}\, \frac{M \sin \frac{1}{2} \theta + N \sin \frac{3}{2} \theta}{M_0 + N_0} \tag{33}$$

где

$$M = 1 + 3a_2\tau^2 + 5a_4\tau^4 + 7a_6\tau^6 + \ldots, \qquad N = 2a_2\tau^2 + 4a_4\tau^4 + 6a_6\tau^6 + \ldots$$

Возводя в квадрат формулы (33) и складывая результаты, получим

$$V = \frac{V_0 a^2}{r^2} \frac{M^2 + N^2 + 2MN\cos\theta}{(M_0 + N_0)^2} \tag{34}$$

На самой окружности, т. е. при $r = a$,

$$V = V_0 \frac{M^2 + N^2 + 2MN\cos\theta}{(M_0 + N_0)^2} \tag{35}$$

При вычислениях по формулам (34) и (35) можно применить способ последовательных приближений; именно, можно сначала положить $M = 1$ и $N = 0$ в правых частях этих формул, что равносильно рассмотрению случая несжимаемой жидкости, определить отсюда значения V, а тем самым и значения τ, подставить полученные значения в правые части формул (34) и (35), снова определить из них значения V и т. д.

Из формулы (35) видно, что в отличие от случая несжимаемой жидкости модуль вектора V скорости газа вдоль окружности $r = a$ не будет постоянным, а будет зависить от угла θ. Полагая $x = a\cos\omega$, $y = a\sin\omega$, из формул (33) будем иметь

$$\cos\omega = \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} \frac{M\cos\frac{1}{2}\theta + N\cos\frac{3}{2}\theta}{M_0 + N_0}, \qquad \sin\omega = \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}} \frac{M\sin\frac{1}{2}\theta + N\sin\frac{3}{2}\theta}{M_0 + N_0} \tag{36}$$

где величину τ в правых частях формул (36) следует заменить его значениями, определенными из формулы (35).

В качестве иллюстрации приводим результаты вычислений, ограниченных вторым приближением, для случая, когда значение скорости V_0 равно 75% скорости звука, т. е. когда $V_0 = 0.75c_0$.

	Газ (воздух)		Несжимаемая жидкость	
θ	V	ω	V	ω
0°	$1.000V_0$	0°00′	V_0	0°00′
45	$0.887V_0$	23 44	V_0	22 30
90	$0.615V_0$	65 20	V_0	45 00
135	$0.344V_0$	85 46	V_0	68 30
180	$0.231V_0$	90 00	V_0	90 00

Эти результаты показывают, что при взятом большом значении для скорости V_0 разница между распределением скоростей на окружности $r = a$ в газе при наличии в нем диполя и распределением скоростей на окружности $r = a$ в несжимаемой жидкости при наличии в ней диполя будет значительной; с уменьшением значения скорости V_0 эта разница уменьшается и стремится к нулю вместе с V_0.

Из формул (31) и (29) следует, что функция $\Phi(\tau, \theta)$ для случая газа имеет в точке $\tau = 0$ такую же особенность, какую в той же точке имеет функция $\Phi(\tau, \theta)$ для несжимаемой жидкости; из формул (30) и (34) видно, что скорость V газа и скорость V жидкости на бесконечности обе стремятся к нулю так, что предел их отношения стремится к единице. Конечно, как и для случая источника или стока, диполь в начале координат для случая газа, существовать не может, и газ должен вырываться из точек какой-нибудь линии, окружающей начало координат, подчиняясь закону, определяемому этим фиктивным диполем, расположенным в начале координат.

Во всех предыдущих задачах на движение несжимаемой жидкости и газа не существовало заранее заданных граничных условий, которые было необходимо удовлетворить. Если задача состоит в разыскании обтекания несжимаемой жидкостью или газовым потоком какой-нибудь неподвижной плоской фигуры, то подлежащие удовлетворению граничные условия обязательно будут иметь место.

В самом деле, предположим, что плоскопараллельный поток несжимаемой жидкости или газа, имеющий на бесконечности заданную скорость V_∞, обтекает некоторый неподвижный плоский контур (C).

Подлежащая определению функция $\Phi(\tau, \theta)$ для случая газа есть решение уравнения (14), а для случая несжимаемой жидкости есть решение уравнения (17). Так как при $\tau=\tau_\infty$ и $\theta=0$ должно быть $x=\infty$ и $y=\infty$, то из формул (15) мы прежде всего заключаем, что по крайней мере одна из производных $\partial\Phi/\partial\tau$ и $\partial\Phi/\partial\theta$ при $\tau=\tau_\infty$ и $\theta=0$ обращается в бесконечность.

Далее, на контуре C величины x и y связаны между собой уравнением этого контура; заменяя в этом уравнении переменные x и y их выражениями по формулам (15), получим некоторое соотношение

$$F_1(r, \theta, \partial\Phi/\partial\tau, \partial\Phi/\partial\theta)=0 \tag{37}$$

которое должно иметь место на контуре (C). Если бы функция $\Phi(\tau, \theta)$ была известна, то, определяя из уравнения (37) величину τ в функции от θ, мы имели бы распределение скоростей вдоль контура (C).

Обозначим через ω угол с осью абсцисс внешней нормали к контуру (C). Так как уравнение контура (C) задано, то величина ω должна быть известной функцией от переменных x и y. Но вектор скорости несжимаемой жидкости или газа на контуре (C) должен быть перпендикулярным к нормали к контуру (C), т. е.

$$1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\omega=0, \qquad \text{или} \qquad \operatorname{tg}\theta=-\operatorname{ctg}\omega$$

Отсюда следует, что на контуре (C) количество $\operatorname{tg}\theta$ есть известная функция от x и y, т. е. в силу формул (15) на контуре C задано еще второе соотношение вида

$$F_2(\tau, \theta, \partial\Phi/\partial\tau, \partial\Phi/\partial\theta)=0 \tag{38}$$

Таким образом, функция $\Phi(\tau, \theta)$, определяемая или уравнением (17) для случая несжимаемой жидкости, или уравнением (14) для случая газа, должна быть такой, чтобы из двух заданных равенств $F_1=0$ и $F_2=0$ можно было определить для переменной τ одно и только одно решение вида $\tau=f(\theta)$, т. е. тем самым определить значения вектора скорости несжимаемой жидкости или газа в различных точках заданного контура (C), причем по крайней мере одна из первых производных $\partial\Phi/\partial\tau$ и $\partial\Phi/\partial\theta$ должна обращаться в бесконечность при $\tau=\tau_\infty$, $\theta=0$. Сделаем в уравнениях (17) и (14) замену переменного τ через переменное z по формуле

$$\tau=\tau_\infty z \tag{39}$$

тогда уравнение (17) примет вид

$$z^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+z\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=\Delta\Phi=0 \tag{40}$$

а уравнению (14) можно будет придать вид

$$\Delta\Phi=\tau_\infty^2 k^2 z^2\Delta\Phi-\tau_\infty^2(k^2-1)z^4\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{41}$$

Из формулы (39) следует, что

$$z=\frac{\tau}{\tau_\infty}=\frac{V}{V_\infty}$$

поэтому величина z может быть как меньше, так и больше, чем единица. Так как для газа $V_\infty=n\tau_\infty$, где количество n определено формулой (4), то отсюда находим

$$\tau_\infty=\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,\frac{M_\infty}{\sqrt{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M_\infty^2}} \tag{42}$$

причем для воздуха

$$\tau_\infty=0.452\,M_\infty(1-0.102\,M_\infty^2)$$

Таким образом параметр τ_∞ меньше числа M_∞, по степеням которого обычно производятся разложения в ряды решений уравнений движения газа.

Из (41) следует, что для $\Phi(z,\theta)$ можно искать разложение вида

$$\Phi(z,\theta)=\Phi_0(z,\theta)+\tau_\infty^2\Phi_2(z,\theta)+\tau_\infty^4\Phi_4(z,\theta)+\ldots \tag{43}$$

Вставляя разложение (43) в уравнение (41), придем к бесконечной системе уравнений

$$\begin{gathered}\Delta\Phi_0=0,\qquad \Delta\Phi_2=-(k^2-1)z^4\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}\\ \Delta\Phi_4=k^2z^2\Delta\Phi_2-(k^2-1)z^4\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}=-k^2(k^2-1)z^6\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}-(k^2-1)z^4\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}\\ \Delta\Phi_6=-k^2(k^2-1)z^8\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}-k^2(k^2-1)z^6\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}-(k^2-1)z^4\frac{\partial^2\Phi_4}{\partial z^2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered} \tag{44}$$

Важно заметить, что первое из уравнений (44) есть уравнение (40), имеющее место в случае обтекания контура (C) потоком несжимаемой жидкости; поэтому для разыскания обтекания какого-нибудь контура (C) газом необходимо решить в переменных z и θ задачу на обтекание этого контура несжимаемой жидкостью.

Применим изложенные соображения к случаю, когда за контур (C) взята окружность $x^2+y^2=a^2$, описанная из начала координат радиусом, равным a.

Из уравнений (15) имеем

$$-n(x+iy)e^{-i\theta}=\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+\frac{i}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

Обозначая чертой сверху сопряженное количество, можно представить условие $F_1(\tau,\theta,\partial\Phi/\partial\tau,\ \partial\Phi/\partial\theta)=0$ в виде

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+\frac{i}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\tau}-\frac{i}{\tau}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\theta}\right)=a^2n^2 \tag{45}$$

Далее, положим $x = a\cos\omega$, $y = a\sin\omega$; тогда на окружности (C)

$$-an\, e^{i(\omega-\theta)} = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + \frac{i}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \tag{45}$$

Сделав чертеж, нетрудно убедиться, что если рассматриваемая точка окружности (C) находится сверху от оси абсцисс, то $\omega - \theta = \frac{1}{2}\pi$, а если рассматриваемая точка находится снизу от оси абсцисс, то $\omega - \theta = \frac{3}{2}\pi$.

Таким образом на окружности (C)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + \frac{i}{\tau}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \mp ian \tag{46}$$

где знак минус в правой части соответствует положению рассматриваемой точки на верхней половине окружности, а знак плюс соответствует положению рассматриваемой точки на нижней половине окружности (C).

Уравнение (46) есть не что иное, как условие $F_2(\tau, \theta, \partial\Phi/\partial\tau, \partial\Phi/\partial\theta) = 0$.

Нетрудно видеть, что уравнение (45) есть следствие уравнения (46); однако не следует думать, что таким образом граничные условия (37) и (38) привелись только к одному уравнению (46), так как эта единственность чисто кажущаяся. В самом деле, уравнение (46) содержит мнимый символ i и потому распадается на два действительных уравнения, каждое из которых должно привести к одному и тому же решению вида $\tau = f(\theta)$.

Можно рассуждать и несколько иначе. Будем решать уравнение (46) относительно действительного количества τ, не освобождаясь от мнимых символов. В результате вычислений для τ должны получить решение вида $\tau = f(\theta)$, которое должно быть чисто действительным.

Покажем, что решение уравнения $\triangle\Phi_0 = 0$, удовлетворяющее всем граничным условиям, будет для окружности (C) иметь вид

$$\Phi_0(z, \theta) = an\tau_\infty\sqrt{1 - ze^{-i\theta}} \tag{47}$$

Приняв это, имеем

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} = -an\tau_\infty\frac{1}{2}\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{1-ze^{-i\theta}}}, \qquad \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} = -an\tau_\infty\frac{1}{4}\frac{e^{-2i\theta}}{(\sqrt{1-ze^{-i\theta}})^3}$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\theta} = ian\tau_\infty\frac{1}{2}\frac{z\,e^{-i\theta}}{\sqrt{1-ze^{-i\theta}}}, \qquad \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\theta^2} = an\tau_\infty\left[\frac{1}{2}\frac{z\,e^{-i\theta}}{\sqrt{1-ze^{-i\theta}}} + \frac{1}{4}\frac{z^2e^{-2i\theta}}{(\sqrt{1-ze^{-i\theta}})^3}\right]$$

Из полученных выражений частных производных от функции $\Phi_0(z, \theta)$ следует прежде всего, что выражение (47) удовлетворяет уравнению (40).

Легко видеть, что условие на бесконечность также удовлетворяется, так как при $z = 1$, т. е. при $\tau = \tau_\infty$, и при $\theta = 0$ обе первые частные производные от функции $\Phi_0(z, \theta)$ обращаются в бесконечность.

Далее, условие (46) можно представить в виде

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} + \frac{i}{z}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\theta} = \mp ian\tau_\infty \tag{48}$$

В силу найденных выше значений для производных от $\Phi_0(z, \theta)$ имеем

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} + \frac{i}{z}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\theta} = -an\tau_\infty\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{1-ze^{-i\theta}}}$$

Поэтому условие (48) будет иметь вид

$$\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{1-ze^{-i\theta}}} = \pm i \qquad (49)$$

Возводя это равенство в квадрат и решая относительно z, получим

$$z\,e^{-i\theta} = 1 + e^{-2i\theta}, \quad \text{откуда} \quad z = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

Очевидно, что это решение есть не что иное, как известное из гидродинамики решение $V = 2V_\infty \cos\theta$. Таким образом интеграл уравнения $\Delta\Phi_0 = 0$, удовлетворяющий всем граничным условиям, найден.

Прежде чем итти дальше, необходимо установить, какой следует брать знак при радикале в формуле (47).

Положим $\exp(-i\theta) = \xi + i\eta$, т. е. $\xi = z\cos\theta$ и $\eta = -z\sin\theta$. Легко видеть, что перемещение от точки $x = -a$ к точке $x = +a$ вдоль нижней половины окружности (C) соответствует на плоскости комплексного переменного $\xi + i\eta$ перемещение точки с аффиксом $\xi + i\eta$ по часовой стрелке вдоль некоторой замкнутой линии, выходящей из начала координат, причем аргумент разности $1 - z\exp(-i\theta)$ изменится при этом на $-2\pi i$. Рассматривая верхнюю половину окружности (C), найдем, что аргумент разности $1 - z\exp(-i\theta)$ изменится при обходе верхней половины окружности (C) в направлении течения жидкости на $+2\pi i$. Таким образом в точках $x = +a$, $y = 0$ и $x = -a$, $y = 0$ окружности C радикал в формуле (47) имеет противоположные знаки. Так как в точке $x = -a$, $y = 0$ верхней половины окружности (C) будет $z = 0$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$, то подстановка в уравнение (49), где для верхней половины окружности следует взять знак плюс, дает

$$\frac{\exp(-\frac{1}{2}i\pi)}{\pm\sqrt{1}} = +i$$

т. е. при радикале из выражения $1 - z\exp(-i\theta)$ в формуле (47) следует взять знак минус. Из предыдущего заключаем, что в точке $x = +a$, $y = 0$ этот радикал будет иметь знак плюс.

Перейдем после этого к решению второго из уравнений (44). Это уравнение будет иметь вид

$$\Delta\Phi_2 = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{4} \frac{z^4 e^{-2i\theta}}{(\sqrt{1-ze^{-i\theta}})^3} \qquad (50)$$

Чтобы найти частный интеграл уравнения (50), заметим, что вблизи точки $x = -a$, $y = 0$ скорость газа должна быть равна нулю; поэтому вблизи этой точки есть некоторая область D, в которой будет $z < 1$. Следовательно, в области D правую часть уравнения (50) можно разложить в ряд по формуле бинома, т. е.

$$\Delta\Phi_2 = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{4}\left[z^4 e^{-2i\theta} + \frac{3}{2} z^5 e^{-3i\theta} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} z^6 e^{-4i\theta} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} z^7 e^{-5i\theta} + \dots\right] \qquad (51)$$

Будем искать частный интеграл этого уравнения в виде ряда

$$\Phi_2(z, \theta) = B_1 z^4 e^{-2i\theta} + B_2 z^5 e^{-3i\theta} + B_3 z^6 e^{-4i\theta} + \dots$$

Вставляя это выражение в уравнение (51), из сравнения между собой коэффициентов при одинаковых степенях переменных получим

$$(4^2-2^2)\,B_1 = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{4}, \qquad (5^2-3^2)\,B_2 = an\tau_\infty \frac{3}{2}\frac{k^2-1}{4}$$

$$(6^2-4^2)\,B_3 = an\tau_\infty \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\frac{k^2-1}{4}, \qquad (7^2-5^2)\,B_4 = an\tau_0 \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{k^2-1}{4} \ldots$$

Отсюда находим

$$B_1 = an\tau_\infty \frac{1}{3}\frac{k^2-1}{16}, \qquad B_2 = an\tau_\infty \frac{1}{4}\frac{3}{2}\frac{k^2-1}{16},$$

$$B_3 = an\tau_\infty \frac{1}{5}\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\frac{k^2-1}{16}, \qquad B_4 = an\tau_\infty \frac{1}{6}\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{k^2-1}{16}, \ldots$$

Таким образом

$$\Phi_2(z,\theta) = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{16} z e^{i\theta}\left[\frac{1}{3} z^3 e^{-3i\theta} + \frac{1}{4}\frac{3}{2} z^4 e^{-4i\theta} + \frac{1}{5}\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} z^5 e^{-5i\theta} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} z^6 e^{-6i\theta} + \ldots\right]$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{5}\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^5 + \frac{1}{6}\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots$$

Отсюда получаем

$$f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^4 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^5 + \ldots = \frac{x^2}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Положим

$$x = 1-\alpha, \qquad dx = -d\alpha$$

тогда будет

$$\frac{df}{d\alpha} = -\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^{3/2}} = -\alpha^{-3/2} + 2\alpha^{-1/2} - \alpha^{1/2}$$

Отсюда находим

$$f = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} + 4\sqrt{\alpha} - \frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}} + \text{const}$$

или, учитывая, что $f(0)=0$, и возвращаясь к переменной x, получим

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}} + 4\sqrt{1-x} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{3}$$

Следовательно, суммированное выражение полученного частного интеграла будет

$$\Phi_2(z,\theta) = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{8}\left[z e^{i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + 2z e^{i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3} z e^{i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} - \frac{8}{3} z e^{i\theta}\right]$$

Так как

$$\Delta\left(\frac{8}{3} z e^{i\theta}\right) = 0$$

то выражение для интеграла уравнения (50) будет представлено в виде

$$\Phi_2(z,\theta) = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{8} z e^{i\theta}\left[(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + 2(1-z e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(1-z e^{-i\theta})^{\frac{3}{2}}\right] \quad (52)$$

Чтобы выражение (52) было действительно частным интегралом уравнения

(50), следует показать, что выражение (52) удовлетворяет уравнению (50). Для этого рассмотрим функцию

$$U = z\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}p}$$

Вычисления дают

$$\frac{\partial U}{\partial z} = e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}p} - \frac{p}{2} z (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}p-1}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -p (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}p-1} + \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right) z\, e^{-i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}p-2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = iz\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}p} + i\frac{p}{2} z^2 (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}p-1}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -z\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}p} - \frac{p}{2} z^2 (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}p-1} - \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right) z^3 e^{-i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}p-2}$$

С помощью этих формул, беря для числа p значения $p = -1$, $p = +1$ и $p = +3$, найдем

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{8}\Big[e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} z (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} + 2e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} -$$

$$- z (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} z (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} \Big]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{8}\Big[(1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} z\, e^{-i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{5}{2}} - 2 (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} -$$

$$- \frac{1}{2} z\, e^{-i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} + (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} z\, e^{-i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} \Big]$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{8}\Big[iz\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} - \frac{i}{2} z^2 (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} + 2\, iz\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ iz^2 (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} - \frac{i}{3} z\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{2} z^2 (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} \Big]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \theta^2} = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{8}\Big[- z\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} z^2 (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} z^3 e^{-i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{5}{2}} -$$

$$- 2 z\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} - z^2 (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} z^3 e^{-i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{3} z\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} z^2 (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} z^3 e^{-i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} \Big]$$

Отсюда мы будем иметь

$$\Delta \Phi_2 = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{8}\Big[2 z^2 (1 - ze^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} - 4z^2 (1 - ze^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + 2z^2 (1 - ze^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} \Big] =$$

$$= an\tau_\infty \frac{k^2-1}{4} \frac{z^2 \{1 - 2(1 - ze^{-i\theta}) + (1 - ze^{-i\theta})^2\}}{(1 - ze^{-i\theta})^{\frac{3}{2}}} = an\tau_\infty \frac{k^2-1}{4} \frac{z^4 e^{-2i\theta}}{(1 - ze^{-i\theta})^{\frac{3}{2}}}$$

Следовательно, выражение (52) есть действительно частный интеграл уравнения (50). Из дальнейшего будет видно, что можем ограничиться лишь частным интегралом уравнения (50).

Таким образом согласно формуле (43)

$$\Phi(z, \theta) = an\tau_\infty (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} + an\tau_\infty{}^3 \frac{k^2-1}{8}\Big[z\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+ 2 z\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} z\, e^{i\theta} (1 - z\, e^{-i\theta}) \Big] + \ldots \tag{53}$$

Здесь опущенные члены имеют множителями τ_∞^5, τ_∞^7 и т. д. Отсюда, пользуясь выражениями для частных производных от функции U, найдем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{1}{2} an\tau_\infty e^{-i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + an\tau_\infty^3 \frac{k^2-1}{8}\Big[e^{i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} z(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+2 e^{i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} - z(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} e^{i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} z(1-z e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}}\Big]$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{i}{2} an\tau_\infty z e^{-i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + an\tau_\infty^3 \frac{k^2-1}{8}\Big[e^{i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} z(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+2 e^{i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} + z(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} e^{i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} z(1-z e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}}\Big]$$

Таким образом получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{i}{z}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -an\tau_\infty e^{-i\theta}(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + \\ + an\tau_\infty^3 \frac{k^2-1}{8} z\Big[(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} - 2(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + (1-z e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}}\Big]\end{gathered} \tag{54}$$

Из равенства (46) для верхней половины окружности (C) мы имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{i}{z}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -i an\tau_\infty \tag{55}$$

Нетрудно проверить равенство (55) для точки $x=-a$, $y=0$, в которой должно быть $z=0$, $\theta=+\frac{1}{2}\pi$, и корень из бинома $1-z e^{-i\theta}$ должен иметь знак минус; в самом деле, указанные подстановки обращают равенство (55) в тождество.

Из равенств (53) и (54) находим

$$-e^{-i\theta}(1-ze^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + \tau_\infty^2 \frac{k^2-1}{8} z\Big[(1-ze^{-i\theta})^{-\frac{3}{2}} - 2(1-z e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} + (1-ze^{-i\theta})^{\frac{1}{2}}\Big] = -i$$

или

$$i(1-z e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}} = e^{-i\theta} - \tau_\infty^2 \frac{k^2-1}{8} z\Big[(1-z e^{-i\theta}) + (1-z e^{-i\theta})^{-1} - 2\Big] \tag{56}$$

Решая уравнение (56) относительно z с точностью до членов с множителем τ_∞^2, мы должны получить для величины z действительную функцию от θ.

Введем для краткости обозначение

$$R = (1-ze^{-i\theta})^{\frac{1}{2}}$$

Тогда уравнению (56) можно придать вид

$$iR = e^{-i\theta} - \tau_\infty^2 \frac{k^2-1}{8} z\left(R^2 + R^{-2} - 2\right) \tag{57}$$

Так как количество τ_∞^2 мало (именно $\tau_\infty^2 < 0.17$), то решать уравнение (57) всего проще способом последовательных приближений.

Легко видеть, что первое приближение

$$iR = e^{-i\theta}$$

приводит к случаю обтекания окружности (C) несжимаемой жидкостью. Так как отсюда $R^2 = -e^{2i\theta}$, то второе приближение будет

$$iR = e^{-i\theta} + \tau_\infty^2 \frac{k^2-1}{8} z\left(2 + e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}\right)$$

или

$$iR = e^{-i\theta} + \tau_\infty^2 \frac{k^2-1}{2} z \cos^2\theta$$

Возводя это равенство в квадрат и отбрасывая член с множителем τ_∞^4, так как степенями количества τ_∞ выше, чем вторая, мы пренебрегаем, получим

$$ze^{-i\theta} - 1 = e^{-2i\theta} + \tau_\infty^2 (k^2-1) ze^{-i\theta} \cos^2\theta$$

или

$$z = e^{i\theta} + e^{-i\theta} + \tau_\infty^2 z (k^2-1) \cos^2\theta$$

Отсюда

$$z = \frac{2\cos\theta}{1 - \tau_\infty^2 (k^2-1)\cos^2\theta}$$

Возвращаясь к скорости V и применяя формулы (7) и (42), получим окончательное выражение для скорости V газа вдоль окружности (C)

$$V = \frac{2V_\infty \cos\theta}{1 - \dfrac{M_\infty^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_\infty^2} \cos^2\theta} \tag{58}$$

Из формулы (58) следует, что

$$\frac{M_\infty^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1) M_\infty^2} < 1, \qquad \text{т. е.} \qquad M_\infty < \sqrt{\frac{2}{3-\gamma}}$$

Так как мы рассматриваем движение газа лишь с дозвуковыми скоростями то это неравенство всегда будет удовлетворено.

Из формулы (58) видно, что при одинаковых заданных условиях обтекания окружности газом и несжимаемой жидкостью скорость газа на окружности будет больше соответствующей скорости несжимаемой жидкости во всех точках окружности, кроме критических точек $x = -a$ и $x = +a$, в которых скорость и несжимаемой жидкости и газа будет равна нулю.

Поступило в редакцию
15 VI 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

A. I. NEKRASOV.—TWO-DIMENSIONAL GAS MOTION WITH SUBSONIC VELOCITIES

The flow of a compressible gas is governed by a non-linear differential equation. Some known solution for this case are obtained by reducing the non-linear differential equation to a linear one by means of different analytical or physical assumptions or by introducing new variables.

For the purpose of reestablishing the linearity of the differential equation the author develops in this paper an analytic method by applying the Legendre transformation and by introducing the new variables. By this method certain types of solutions for the basic equation may be obtained. The author uses these solutions in the treatment of a subsonic compressible flow of a gas and applies them to the cases of a positive, negative and double source. The approximate solution for the flow past a circle is carried out.