Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

ЗАМЕТКИ

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А. И. ЛУРЬЕ, В. Н. ПОСТНИКОВ

(Свердловск)

1. В статье [1], опубликованной в этом журнале, Б. В. Булгаков рассмотрел вопрос об определении автоколебательных режимов движения регулируемой системы, поведение которой описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$m\frac{dv}{dt}+kv=Q, \qquad \frac{dz}{dt}=v, \qquad \frac{dQ}{dt}=-qf_*(\mu) \tag{1.1}$$

где через z обозначено отклонение регулируемого параметра от его значения при равновесном режиме, v — скорость изменения этого параметра, Q — координата органа управления.

В последнем уравнении (уравнении сервомотора) величина μ

$$\mu=av+bz+cQ \tag{1.2}$$

представляет собой открытие золотника, управляющего движением сервомотора. Величины m, k, q, a, b, c суть заданные постоянные. О характере функции $f_*(\mu)$ делаются следующие предположения: во-первых, $f_*(\mu)$ непрерывная, нечетная функция, во-вторых, $f_*(\mu)>0$ при $\mu>\delta_*$ и, в-третьих, $f_*(\mu)=0$ при $|\mu|\leqslant\delta_*$, где δ_* — заданная постоянная.

Для удобства изложения введем в рассмотрение новые переменные

$$x_1=\frac{m}{qT^2}v-\frac{1}{qT}Q, \qquad x_2=\frac{1}{qT}Q, \qquad x_3=\frac{m\mu}{aqT^2}=\frac{m}{qT^2}v+\frac{bm}{aqT^2}z+\frac{cm}{aqT^2}Q \tag{1.3}$$

и безразмерное время $\tau=t/T$, где $T=m/k$ — постоянная времени регулируемого объекта.

В дальнейшем вводим еще обозначения

$$\alpha=\frac{bT}{a}, \qquad r=\frac{cm}{aT}, \qquad f_*(\mu)=f_*\left(\frac{aqT^2}{m}x_3\right)=f(x_3) \tag{1.4}$$

Очевидно, что f, отличаясь от f_* лишь масштабом отсчета по оси абсцисс, имеет те же свойства, что и f_*; в частности,

$$f(x_3)=0 \quad \text{при} \quad |x_3|<\delta=\frac{m}{aqT^2}\delta_* \tag{1.5}$$

Дифференциальные уравнения (1.1) теперь преобразуются к виду

$$\frac{dx_1}{d\tau}=-x_1+f(x_3), \qquad \frac{dx_2}{d\tau}=-f(x_3), \qquad \frac{dx_3}{d\tau}=(\alpha-1)x_1+\alpha x_2-rf(x_3) \tag{1.6}$$

2. Состояние системы определяется, таким образом, заданием в каждый момент трех чисел x_1, x_2, x_3, которые мы можем трактовать как координаты некоторой «изображающей точки» M. Рассмотрение процесса регулирования при этом заменяется изучением движения

изображающей точки; отметим, что проекции скорости этой точки на координатные оси x_1, x_2, x_3 определяются формулами (1.6), а величина этой скорости будет

$$u=\sqrt{[x_1-f(x_3)]^2+[f(x_3)]^2+[(\alpha-1)x_1+\alpha x_2-rf(x_3)]^2} \tag{2.1}$$

Из этого выражения легко заключить, что скорость изображающей точки обращается в нуль на отрезке

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad |x_3|\leqslant\delta \tag{2.2}$$

и отлична от нуля повсюду вне этого отрезка.

Будем называть процесс регулирования устойчивым, если изображающая точка M, выйдя из начального положения x_1°, x_2°, x_3° и двигаясь со скоростью, проэкции которой определяются уравнениями (1.6), при неограниченном возрастании τ стремится к некоторому положению на отрезке (2.2).

Согласно (1.3) при соблюдении условий (2.2) будем также иметь (при $b\neq 0$)

$$v=0, \quad Q=0, \quad |z|<\frac{\delta_*}{b} \tag{2.3}$$

В этом смысле можно говорить, что устойчивость по переменным x_1, x_2, x_3 влечет за собой устойчивость по переменным v, Q, z.

Для исследования устойчивости используем основную идею второго метода Ляпунова. Рассмотрим функцию V переменных x_1, x_2, x_3, имеющую вид

$$V=U(x_3)+\frac{\alpha}{2}x_2^2+\frac{\alpha-1}{2}x_1^2 \tag{2.4}$$

где функция $U(x_3)$ определяется соотношением

$$U(x_3)=\int\limits_0^{x_3} f(x_3)\,dx_3 \tag{2.5}$$

Ясно, что $U(x_3)$ — четная, непрерывная функция, положительная при $|x_3|>\delta$ и обращающаяся в нуль при $|x_3|<\delta$; поэтому функция Ляпунова V положительна вне отрезка (2.2) и обращается в нуль на этом отрезке. Поверхности семейства

$$V(x_1, x_2, x_3)=C>0 \tag{2.6}$$

при уменьшении C стягиваются к отрезку (2.2), причем поверхность, которой соответствует меньшее значение C, заключена внутри поверхности, на которой эта постоянная больше; при $C=0$ поверхность вырождается в отрезок (2.2).

Полная производная от V по времени τ, составленная в силу уравнений движения (1.6), будет

$$\frac{dV}{d\tau}=f(x_3)\frac{dx_3}{d\tau}+\alpha x_2\frac{dx_2}{d\tau}+(\alpha-1)x_1\frac{dx_1}{d\tau}=-(\alpha-1)x_1^2+2(\alpha-1)x_1f(x_3)-rf^2(x_3)$$

что можно также представить в форме

$$\frac{dV}{d\tau}=-(\alpha-1)[f(x_3)-x_1]^2-(r+1-\alpha)[f(x_3)]^2 \tag{2.7}$$

Пусть

$$\alpha>1, \qquad r+1-\alpha>0 \tag{2.8}$$

Ясно, что при соблюдении этих условий $dV/d\tau$ будет отрицательной повсюду вне полосы плоскости x_1x_3

$$x_1=0, \qquad |x_3|<\delta \tag{2.9}$$

и будет обращаться в нуль на этой полосе.

Нетрудно теперь убедиться, что траектория изображающей точки должна пересекать поверхности (2.6) извне внутрь, так что $C \to 0$ при $\tau \to \infty$. Действительно, если изображающая точка находится вне полосы (2.9), то значения V вдоль траектории должны убывать, поскольку $dV / d\tau < 0$. Если же условия (2.9) соблюдены, но $x_2 \neq 0$, то представляется возможным предположение, что траектория останется на одной из поверхностей $V = \text{const}$ (поскольку теперь $dV / d\tau = 0$). Однако это предположение нужно отбросить: движение изображающей точки происходит с конечной, отличной от нуля скоростью, поскольку точка находится вне отрезка (2.2); наименьшее значение скорости пусть будет h; из (2.1) следует, что $|x_2| > h / \alpha$, и из последнего уравнения (1.6) заключаем, что $dx_3 / d\tau \neq 0$, т. е. точка должна покинуть в течение конечного промежутка времени полосу (2.9), и в дальнейшем своем течении траектория должна пересекать поверхности (2.6) извне внутрь.

Теперь рассмотрим случай

$$0 < \alpha < 1, \qquad r > 0 \tag{2.10}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V = U(x_3) + \frac{1-\alpha}{2} x_1^2 + \frac{\alpha}{2} x_2^2 \tag{2.11}$$

Ее производная, составленная в силу уравнений движения,

$$\frac{dV}{d\tau} = -(1-\alpha) x_1^2 - r f^2(x_3) \tag{2.12}$$

т. е. остается отрицательной вне полосы (2.9), тогда как $V > 0$ вне отрезка (2.2). Все остальное рассуждение в точности воспроизводится и в этом случае. Итак, при $r > 0$, $\alpha > 0$ и при

$$r + 1 - \alpha > 0$$

процесс регулирования устойчив. При соблюдении этих условий поэтому не могут иметь места автоколебательные режимы движения; возможность существования таких режимов не исключена при условии

$$\alpha - 1 - r > 0 \tag{2.13}$$

Это заключение согласуется с указанием Б. В. Булгакова[1], что отсутствие автоколебаний в области значений $\alpha > 1$ обеспечивается заданием некоторой нижней границы для величины «коэффициента обратной связи» r.

Поступила в редакцию
15 III 1944

A. I. LOURIE and V. N. POSTNIKOV.—CONCERNING THE THEORY OF STABILITY OF REGULATING SYSTEMS

The authors apply the second method of Liapounov to investigate the stability of the regulating system considered by B. V. Boulgakov in his paper published in an earlier number of this journal [1].

This method establishes the domain of validity of parameters, for which the process of regulation of the above mentioned system will be stable.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. Автоколебания регулируемых систем. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII, № 3. [Стр. 97—108].

[1] См. формулу (7) работы Б. В. Булгакова, в которой в соответствии с нашими обозначениями можно принять $M = 1$ и $\beta = \frac{1}{\alpha}$; при этом коэффициент обратной связи обозначен там через $1/a$.