Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VIII, 1944

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

И. МАЛКИН

(Свердловск)

Пусть предложена система дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

где функции X_s определены в области

$$t \geqslant 0, \qquad |x_s| \leqslant H \tag{2}$$

где H — достаточно малая положительная постоянная, и обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Будем также предполагать, что функции X_s непрерывны и ограничены и притом такие, что уравнения (1) допускают в области (2) единственный интеграл Коши.

Одновременно с системой (1) будем рассматривать систему

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + R_s(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

где функции R_s определены в области (2), в которой они ограничены и непрерывны и не обращаются обязательно в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Относительно уравнений (3) будем также предполагать, что они в области (2) допускают существование единственного интеграла Коши.

Определение. *Невозмущенное движение (тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (1)) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях* [1], *если для всякого положительного числа $\varepsilon < H$, как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа $\eta_1(\varepsilon)$ и $\eta_2(\varepsilon)$ таких, что всякое решение уравнений (3) с начальными значениями (при $t = t_0$), удовлетворяющими неравенствам*

$$|x_s^0| \leqslant \eta_1$$

при произвольных R_s, удовлетворяющих в области $t \geqslant t_0$, $|x_s| \leqslant \varepsilon$ неравенствам

$$|R_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \eta_2$$

удовлетворяют при всех $t \geqslant t_0$ неравенствам

$$|x_s| < \varepsilon$$

От обычной устойчивости в смысле Ляпунова изложенное определение отличается тем, что одновременно с возмущением начальных условий, возмущаются также и самые дифференциальные уравнения.

Мы будем пользоваться терминологией Ляпунова и докажем следующую теорему.

Теорема I. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения* (1) *существует определенно положительная функция* V, *полная производная которой по времени, составленная в силу этих уравнений, есть функция определенно отрицательная, и если в области* (2) *частные производные* $\partial V / \partial x_s$ *ограничены, то невозмущенное движение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Доказательство. Согласно условиям теоремы, в области (2) выполняются неравенства

$$V \geqslant W_1(x_1, \ldots, x_n) \tag{4a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s \leqslant -W_2(x_1, \ldots, x_n) \tag{4b}$$

где W_1 и W_2 — определенно положительные функции, не зависящие от t. Кроме того, в силу ограниченности производных $\partial V / \partial x_s$ для всякого положительного числа h_1, как бы мало оно ни было, найдется положительное число h_2 такое, что будем иметь

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant h_1 \qquad \text{при} \qquad |x_s| \leqslant h_2, \quad t \geqslant t_0 \tag{5}$$

Обозначим через x наибольшую из величин $|x_1|, \ldots, |x_n|$, а через ε — некоторое, отличное от нуля, но произвольно малое положительное число, меньшее H. Рассмотрим совокупность всех значений $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию

$$x = \varepsilon \tag{6}$$

и обозначим через α точный нижний предел функции V при этом условии. В силу (4а) величина α необходимо отлична от нуля и положительна. Имеем

$$V \geqslant \alpha \qquad \text{при} \qquad x = \varepsilon \tag{7}$$

Пусть l — положительное число, меньшее α. Рассмотрим совокупность всех значений величин $x_1, \ldots, x_n$, связанных соотношением

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = l \tag{8}$$

На основании (5) всегда найдется такое достаточно малое положительное число λ, что при условии (8) будем иметь $x \geqslant \lambda$.

Поэтому на основании (4b) [так как при (8) выполняются, очевидно, и (2)] будем иметь

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s \right\}_{V=l} \leqslant -k^2$$

где k — вещественное число, отличное от нуля.

Следовательно, можно выбрать настолько малое число η_2, чтобы при

$$|R_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \eta_2 \tag{9}$$

выполнялось неравенство

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(X_s + R_s)\right\}_{V=l} < 0. \tag{10}$$

Будем теперь рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (3), и допустим, что начальные значения этих функций (при $t = t_0$) выбраны согласно условиям

$$|x^0| \leqslant \eta_1 \tag{11}$$

где положительное число η_1 выбрано настолько малым, чтобы

$$\eta_1 < \varepsilon, \qquad V(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) < l \qquad \text{при} \qquad |x_s^0| \leqslant \eta_1 \tag{12}$$

На основании (5) такой выбор числа η_1 всегда возможен. Покажем, что при всех $t \geqslant t_0$ будем иметь

$$|x_s| < \varepsilon \tag{13}$$

В самом деле, функции x_s не могут перестать удовлетворять неравенствам (13) иначе, как достигнув в некоторый момент таких значений, при которых выполняется условие (6). Но тогда на основании (7) в этот момент времени функция V станет большей, чем l, так как $l < \alpha$. Так как в начальный момент $V < l$, то должен быть и такой момент времени, при котором V переходит от значений, меньших l, к значениям, большим l, что невозможно в силу (10).

Следовательно, при условиях (9) и (11) выполняются также и условия (13), что и требовалось доказать.

Если уравнения (1) имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{14}$$

где p_{sj} — произвольные непрерывные и ограниченные функции времени, а X_s — аналитические функции переменных x_s — разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и обладают ограниченными коэффициентами, то для того, чтобы условия теоремы (1) выполнялись, достаточно, чтобы для фундаментальной системы решений $x_{sj}(t, t_0)$ системы первого приближения, определяемых начальными условиями

$$x_{sj}(t_0, t_0) = 0 \qquad (s \neq j), \qquad x_{ss}(t_0, t_0) = 1$$

выполнялись при всех $t_0 \geqslant 0$ и $t \geqslant t_0$ неравенства

$$|x_s(t, t_0)| < M \exp[-\alpha(t - t_0)]$$

где M и α — положительные числа.

Этот результат содержит как весьма частные случаи результаты, полученные Г. Н. Дубошиным [1] и Н. А. Артемьевым[2].

Чтобы выяснить степень общности теоремы, допустим, что уравнения (1) имеют вид (14) и все X_s равны нулю. Очевидно, что в этом случае для устойчивости при постоянно действующих возмущениях необходимо, чтобы все решения уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + f_s(t)$$

где f_s — произвольные функции t, были ограничены. Можно показать [3], что для этого необходимо и достаточно, чтобы существовала функция, удовлетворяющая всем условиям теоремы I. Следовательно, справедлива теорема II.

Теорема II. *Если уравнения (1) возмущенного движения линейны, то для устойчивости при постоянно действующих возмущениях условия, высказанные в теореме* I, *не только достаточны, но и необходимы.*

Допустим, что какое-нибудь движение динамической системы описывается линейными каноническими уравнениями Гамильтона. В этом случае уравнения возмущенного движения (1) будут иметь вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} y_j \qquad (i = 1, \ldots n)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} x_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} y_j$$

Легко показать, что для этих уравнений не может существовать функции V, удовлетворяющей условиям теоремы I. А так как эти уравнения линейны, то на основании теоремы II справедлива теорема III.

Теорема III. *Любое движение динамической системы, описываемое линейным и каноническими уравнениями Гамильтона, неустойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Допустим, наконец, что $n=2$ и уравнения (1) не содержат явно времени. В этом случае можно также показать, что условия, высказанные в теореме I, не только достаточны, но и необходимы. А для того чтобы эти условия выполнялись, необходимо и достаточно, чтобы невозмущенное движение было устойчиво асимптотически в смысле Ляпунова. Таким образом, справедлива теорема IV.

Теорема IV. *Если $n=2$ и дифференциальные уравнения возмущенного движения* (1) *не содержат явно t, то для того, чтобы невозмущенное движение было устойчиво при постоянно действующих возмущениях, необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво асимптотически в смысле Ляпунова.*

Следует предполагать, что эта последняя теорема справедлива также и при $n > 2$.

Поступила в редакцию
15 IV 1944

Свердловский государственный
университет

I. MALKIN.—STABILITY IN THE CASE OF CONSTANTLY ACTING DISTURBANCES

The author studies the differential equations of a disturbed motion (1) as well as equation (3), of which the right hand sides X_s and Y_s are continuous bounded functions in a domain (2). The functions X_s and Y_s are assumed to be defined therein in such a manner that equations (1) and (3) warrant the existence of unique Cauchy integrals. Moreover the functions X_s are supposed vanish for $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Let the trivial solution $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ of equations (1) be an undisturbed motion. This motion will be stable for constantly acting disturbances, if for every positive number $\varepsilon < H$ exist two other positive numbers η_1 and η_2 such that every solution of equation (3) with the initial conditions $t = t_0$ satisfying inequalities $|x_j^0| \leqslant \eta_1$ for arbitrary values $|R_s| \leqslant \eta_2$, in the domain $t \leqslant t_0$, $|x_s| < \varepsilon$ satisfies inequalities $|x_s| < \varepsilon$ for all $t \geqslant t_0$.

The following theorem I is proved. If there exists a definitively positive function $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ such that the expression $\partial V / \partial t + \varepsilon X_s \partial V / \partial x_s$ is a function also definitively positive, and if in the domain (2) the partial derivatives $\partial V / \partial x_s$ are bounded, then the undisturbed motion is stable for constantly acting disturbances.

From this theorem a number more special statements follows. In particular, if function X_s does not depend on t explicitly and if $n = 2$, then the conditions of theorem I will be not only sufficient, but a necessary one.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. Труды ГАИШ. 1940. Т. XIV. № 1.
2. Артемьев Н. А. Осуществимые движения. ИМЕН. 1939. № 3.
3. Малкин И. Некоторые вопросы устойчивости движения в смысле Ляпунова. Труды Каз. авиаинститута. № 7.