

## НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ К РАВНОВЕСИЮ ИДЕАЛЬНО УПРУГИХ СИСТЕМ

А. А. АКОПЯН

(Ереван)

Большинство отделов физики зародилось раньше термодинамики и, развиваясь, не опиралось на нее. Естественно, применение термодинамики к этим отделам вносит в теорию коррективы, а иногда приводит к новым соотношениям.

Применения термодинамики в теории упругости разработаны очень обстоятельно, хотя и в чрезвычайно сжатой форме, J. W. Gibbs<sup>[1]</sup>, а затем и другими авторами, например, E. Jouguet<sup>[2]</sup>. В работе Gibbs и во всех других известных мне работах установлены в более или менее общем виде зависимости между внутренними напряжениями, деформациями, температурой, скрытыми теплотами деформаций и теплоемкостями.

Исследований же, посвященных термодинамическому обоснованию, развитию или обобщению группы зависимостей между внешними силами и соответствующими перемещениями, я не встречал.

В настоящей работе термодинамически рассмотрена теория равновесия упругих систем, находящихся под действием внешних сил. При этом оказалось, что часть общих теорем, которые в теории упругости выводятся из закона Гука, от последнего не зависят, а являются следствием упругости и принципов термодинамики. Это обстоятельство представляет интерес потому, что упругие системы, не подчиняющиеся линейному закону, существуют и их теория уже стала разрабатываться<sup>1</sup>.

Те из полученных общих результатов, которые не связаны с законом Гука, целиком применимы и к деформируемым системам, состоящим из неизменяемых тел, если сочленения этих тел идеальные — без трения.

Так как частые ссылки на термодинамическую литературу могли бы нарушить цельность изложения, то ниже [1.—7] приведены необходимые понятия, определения и теоремы термодинамики в том виде, который наиболее удобен для ее применения к упругим системам.

1. Понятию «конфигурация» соответствует в термодинамике более широкое понятие «состояние». Когда система такова, что заданным значениям определенного числа независимых величин всегда соответствует одно и то же состояние, эти величины называются параметрами системы. В число параметров упругой системы, кроме величин, определяющих конфигурацию, например, обобщенных координат, должна быть включена и температура.

<sup>1</sup> См., например, Bisshopp.

2. Пусть в течение какого-либо термодинамического процесса изменяется часть или вся совокупность параметров. При этом внешние силы совершают работу, происходит теплообмен между системой и окружающей средой и т. д. Каждому процессу соответствуют вполне определенные изменения параметров и функций состояния, определенная работа внешних сил, определенное — положительное или отрицательное — количество полученной извне теплоты и т. д.

Поэтому, если одну из изменяющихся в течение процесса величин принять за независимую переменную, то все остальные величины можно рассматривать как функции этого аргумента. Таким образом, обозначив через  $x_i$ ,  $T$ ,  $W_e$ ,  $Q$  соответственно  $i$ -ую обобщенную координату, живую силу системы, работу внешних сил, количество полученной извне теплоты и т. д., имеем

$$x_i = f_{i,1}(y), \quad T = \varphi_1(y), \quad W_e = \psi_1(y), \quad Q = F_1(y), \dots$$

Обозначим через  $P_1$  процесс, в котором  $y$  изменяется постоянно в одном и том же направлении от значения  $y_1$  до значения  $y_2$ . По достижении аргументом  $y$  значения  $y_2$  начнем изменять  $y$  в обратном направлении и обозначим этот обратный процесс через  $P_2$ . Пусть процессу  $P_2$  соответствуют функции

$$x_i = f_{i,2}(y), \quad T = \varphi_2(y), \quad W_e = \psi_2(y), \quad Q = F_2(y), \dots$$

причем при  $y = y_2$

$$f_{i,1}(y_2) = f_{i,2}(y_2), \quad \varphi_1(y_2) = \varphi_2(y_2), \quad \psi_1(y_2) = \psi_2(y_2), \quad F_1(y_2) = F_2(y_2), \dots$$

*Определение. Процесс  $P_1$  называется обратимым, если после него возможен такой процесс  $P_2$ , в котором каждая функция с индексом 2 одинакова с соответствующей функцией, имеющей индекс 1, т. е.*

$$f_{i,2}(y) = f_{i,1}(y), \quad \varphi_2(y) = \varphi_1(y), \quad \psi_2(y) = \psi_1(y), \quad F_2(y) = F_1(y), \dots$$

*Если из этих равенств хотя бы одно не имеет места, процесс  $P_1$  называется необратимым.*

Исходя из только что приведенного определения, нетрудно показать, что частью необходимых условий обратимости являются:

- а) равенство нулю живой силы или ее бесконечная малость в течение всего процесса;
- б) отсутствие гистерезиса;
- в) равенство нулю работы трения в течение всего процесса.

Доказательство необходимости этих условий мы опускаем.

Если живая сила системы равна нулю в течение процесса или бесконечно мала, это означает, что система находится в состоянии механического равновесия или в течение всего процесса бесконечно мало отклоняется от механического равновесия.

Более подробное исследование показывает, что для обратимости необходимо не только наличие механического равновесия или бесконечно малое отклонение от такого равновесия в течение всего процесса, но наличие термодинамического равновесия или бесконечно малое отклонение системы

в течение всего процесса от термодинамического равновесия. В обычных условиях термодинамическое равновесие упругих систем бывает обеспечено при наличии механического и теплового равновесия.

Что же касается условия  $b$ , то тела, совершенно лишенные упругого гистерезиса, называются идеально упругими независимо от того, подчиняются они закону Гука или нет.

Когда условия  $a$ ,  $b$ ,  $c$  выполнены, то обратимый процесс возможен только, если система находится в состоянии равновесия (или бесконечно близка к этому состоянию). Отсюда ясно, что состояние системы, в котором возможен обратимый процесс, есть состояние равновесия.

Следовательно, при наличии условий  $a$ ,  $b$ ,  $c$  возможность обратимого процесса является необходимым и достаточным условием равновесия. Поэтому нахождение равновесия сводят к нахождению состояния, в котором возможен обратимый процесс, и все результаты, полученные из рассмотрения обратимых процессов, должны быть применимы к системам, удовлетворяющим условиям  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и находящимся в состоянии термодинамического равновесия.

При наличии условий  $a$  и  $c$  все только что сказанное целиком применимо к идеально упругим системам.

Нужно иметь в виду, что, кроме упругих, имеются и неупругие деформируемые системы, состоящие из неизменяемых тел, например, системы неизменяемых стержней, соединенных шарнирами. В таких системах роль гистерезиса играет трение в сочленениях неизменяемых тел.

Все результаты, полученные в последующем для идеально упругих систем и не связанные с законом Гука, справедливы также и для любой системы неизменяемых тел с идеальными (без трения) сочленениями.

3. Возможность обратимых процессов в идеально упругой системе указывает на возможность возвращения к начальному состоянию, если внешние силы также примут начальные значения, а это является необходимой предпосылкой к тому, что за параметры идеально упругой системы могут быть приняты приложенные к ней внешние силы вместе с температурой и координатами точек, подверженных связям.

В последующем нам удобно рассматривать внешние обобщенные силы  $X_1, \dots, X_r, \dots, X_k$  и обобщенные координаты  $x_{k+1}, \dots, x_l$  точек, подверженных связям. Таким образом, число параметров  $l+1$  состояния идеальной упругой системы складывается из  $k$  обобщенных сил,  $l-k$  обобщенных координат точек, на которые наложены связи и температуры.

Введение в число параметров обобщенных координат точек, подверженных связям (например,  $x_{k+1} = \text{const}$  и т. д.), оправдывается тем, что изменения формы упругих систем зависят не только от приложенных сил, но и от связей. Например, перемещение точки  $B$  балки  $A_1A_2$  под действием силы  $F$ , когда точка  $C$  балки закреплена, вовсе не одинаково с перемещением точки  $B$  под действием той же силы, если точка  $C$  не закреплена.

4. Все обобщенные координаты мы разделим на две группы. К первой группе отнесем столько обобщенных координат, сколько имеется внешних обобщенных сил. Эти координаты выберем так, чтобы обобщенная сила  $X_i$

могла совершать работу только при изменении обобщенной координаты  $x_i$  и приращению  $dx_i$  соответствовала работа  $X_i dx_i$ .

Таким образом, если число обобщенных внешних сил равно  $k$ , то и число обобщенных координат первой группы также будет равно  $k$ . При этом обобщенным перемещениям  $dx_1, \dots, dx_i, \dots, dx_k$  будет соответствовать элементарная внешняя работа

$$dW_e = \sum_{i=1}^{i=k} X_i dx_i. \quad (4.1)$$

Во вторую группу обобщенных координат включим те, которые при наложенных на систему связях остаются постоянными. Это будут обобщенные координаты  $x_{k+1}, \dots, x_l$ , о которых говорилось выше. При таком выборе координат  $x_{k+1}, \dots, x_l$  упразднение каждого из условий  $x_{k+1} = \text{const}, \dots, x_l = \text{const}$  равносильно устранению одной из связей.

5. Переходя к определению и свойствам некоторых функций состояния, здесь и в следующем разделе будем предполагать, что живая сила системы равна нулю постоянно.

а) *Энтропия*  $S$ . Пусть  $T$  — абсолютная температура, а  $dQ$  — количество полученной системой извне теплоты. Согласно второму началу термодинамики

$$TdS - dQ = \Delta \quad (5.1)$$

где  $\Delta = 0$  в обратимых процессах и  $\Delta > 0$  в необратимых процессах.

б) *Внутренняя энергия*  $U$ . Это — функция состояния, приращение которой

$$dU = dQ + dW_e \quad (5.2)$$

или согласно (5.1)

$$dU = TdS + dW_e - \Delta \quad (5.3)$$

Здесь  $dW_e$  — элементарная работа внешних сил, короче, элементарная внешняя работа, определяемая (4.1).

в) *Свободная энергия*  $F$ . Свободной энергией называется функция состояния

$$F = U - TS. \quad (5.4)$$

Пользуясь (5.3), имеем

$$dF = -S dt + dW_e - \Delta \quad (5.5)$$

Из (5.5) следует:

( $\alpha$ ) *Необратимый изотермический процесс* ( $\Delta > 0, dt = 0$ ), в течение которого внешняя работа равна нулю ( $dW_e = 0$ ), вызывает уменьшение свободной энергии системы ( $d_t F < 0$ ).

( $\beta$ ) *Всякий изотермический процесс, в течение которого внешняя работа равна нулю, а свободная энергия уменьшается, необратим.*

В обратимом изотермическом процессе ( $\Delta = 0, dt = 0$ ) приращение свободной энергии равно внешней работе

$$d_t F = dW_e$$

В обратимом изотермическом процессе, протекающем без внешней работы, приращение свободной энергии равно нулю.

г) *Термодинамический потенциал*<sup>1</sup>  $H$ . Это — функция состояния, определяемая формулой

$$H = F - \sum_{i=1}^{i=k} X_i x_i \quad (5.6)$$

где  $k$  — число внешних обобщенных сил. Из (4.1) и (5.5) следует, что

$$dH = -Sdt - \sum_{i=1}^{i=k} x_i dX_i - \Delta \quad (5.7)$$

Это соотношение приводит к следующим заключениям.

( $\alpha$ ) Необратимый изотермический процесс, протекающий при постоянных внешних обобщенных силах ( $\Delta > 0$ ,  $dt = 0$ ,  $dX_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ), вызывает уменьшение термодинамического потенциала системы.

( $\beta$ ) Всякий изотермический процесс, в течение которого внешние обобщенные силы постоянны, а термодинамический потенциал уменьшается, необратим.

( $\gamma$ ) В обратимом изотермическом процессе ( $\Delta = 0$ ,  $dt = 0$ ) приращение термодинамического потенциала

$$dH = - \sum_{i=1}^{i=k} x_i dX_i \quad (5.8)$$

( $\delta$ ) В обратимом изотермическом процессе, протекающем при постоянных обобщенных внешних силах, термодинамический потенциал системы постоянен.

д) Кроме функций  $F$  и  $H$ , рассматриваются функции состояния

$$\Phi_\sigma = F - \sum_{i=1}^{i=\sigma} X_i x_i, \quad \sigma \leq k \quad (5.9)$$

где  $k$  — число внешних обобщенных сил.

Для дальнейшего нам будут нужны

$$\Phi_1 = F - X_1 x_1 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = F - X_1 x_1 - X_2 x_2$$

Формулы (4.4) и (5.5) дают

$$d\Phi_1 = -Sdt - x_1 dX_1 + \sum_{i=2}^{i=k} X_i dx_i - \Delta \quad (5.10)$$

$$d\Phi_2 = -Sdt - x_1 dX_1 - x_2 dX_2 + \sum_{i=3}^{i=k} X_i dx_i - \Delta \quad (5.11)$$

Из (5.10) и (5.11) можно сделать заключения, аналогичные ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ), ( $\delta$ ).

Функции  $\Phi_\sigma$  очень полезны при рассмотрении ряда вопросов. Заметим, что  $\Phi_\sigma = \Phi_k = H$  при  $\sigma = k$ .

<sup>1</sup> Правильнее было бы  $H$  назвать *внешним термодинамическим потенциалом*.

6. В механике *потенциальной энергией*  $V$  называют ту функцию конфигурации системы, приращение которой

$$dV = dW_e \quad (6.1)$$

если живая сила постоянна или равна нулю.

Сопоставляя друг с другом определения свободной энергии термодинамической системы и потенциальной энергии механической системы, а также (5.5) с (6.1), замечаем, что приращение свободной энергии термодинамической упругой системы в изотермическом процессе равно приращению потенциальной энергии упругой системы, рассматриваемой как чисто механическая система, т. е.

$$d_t F = dV$$

где индекс  $t$  указывает на изотермичность процесса.

Поэтому свободную энергию термодинамической упругой системы нужно считать аналогом потенциальной энергии механической упругой системы.

Это позволяет переводить на язык механической теории упругости результаты термодинамической теории упругости и наоборот.

7. Переходя к термодинамике деформируемых тел, ограничимся рассмотрением тех случаев, когда

- а) система идеально упругая;
- б) внешнее трение работы не совершает (или вовсе отсутствует);
- в) живая сила системы равна нулю (или бесконечно мала).

Целесообразность этих ограничений вытекает из того, что зависимость между работой внешних сил и изменениями различных функций состояния выражается знаком равенства только в случае обратимых процессов. Поэтому количественные, выражаемые равенствами законы можно найти только для обратимых процессов. На основании сказанного в разделе 3 эти же законы будут справедливы для состояния равновесия системы.

Аналоги большей части тех результатов, которые мы получим, в механической теории упругости известны и очень полезны.

Однако в механической теории упругости все выводы основываются на законе Гука и поэтому, например, большинство ее теорем не применимо к деформируемым системам неизменяемых тел с идеальными сочленениями. Результаты же, которые будут нами получены, применимы в большинстве и к системам неизменяемых тел, о чем уже сказано в разделе 3.

8. Чтобы установить условия равновесия идеально упругих систем, обратимся к соотношению

$$dF = -S dt + dW_e - \Delta \quad (5.5)$$

где  $\Delta > 0$  в случае необратимых процессов и  $\Delta = 0$ , если процесс обратим.

Мыслимы два случая:

1. *Свободная энергия*  $F = F_{\text{extrem}}$ . По свойству экстрема функций всякому бесконечно малому процессу соответствует  $dF = 0$ . Если при этом  $dt = 0$ ,  $dW_e = 0$ , то и  $\Delta = 0$ , т. е. в состоянии, когда  $F = F_{\text{extrem}}$ , всякий бесконечно малый изотермический процесс, не сопровождающийся внешней работой, будет обратимым.

2. Свободная энергия  $F \neq F_{\text{extrem}}$ . Тогда в любом бесконечно малом процессе  $dF \neq 0$ . Поэтому  $\Delta \neq 0$  при  $dt = 0$ ,  $dW_e = 0$ ; следовательно, согласно (5.5), имеем  $\Delta > 0$  и  $dF < 0$ . Таким образом, если  $F \neq F_{\text{extrem}}$ , всякий изотермический процесс, не сопровождающийся внешней работой, будет необратимым (так как  $\Delta > 0$ ) и вызовет уменьшение свободной энергии системы. При этом система будет удаляться от состояния, соответствующего  $F_{\text{max}}$ , и приближаться к состоянию, в котором  $F = F_{\text{min}}$ .

Мы пришли к следующим результатам:

При  $dt = 0$  и  $dW_e = 0$  (и при равенстве нулю живой силы, что уже оговорено в начале раздела 7)

- а) нет процессов, могущих удалить систему от состояния, в котором  $F = F_{\text{min}}$  или, иначе, состояние, в котором  $F = F_{\text{min}}$ , будет устойчивым;
- б) при  $F = F_{\text{min}}$  возможен только обратимый процесс.

Так как возможность обратимого процесса есть необходимое и достаточное условие для наличия равновесия, то (а) и (б) синтезируются в следующую фундаментальную теорему.

(I) *Для устойчивости равновесия идеально упругой системы, в которой возможны только изотермические процессы, не сопровождающиеся внешней работой, необходимо и достаточно, чтобы ее свободная энергия достигла минимального значения.*

Эта теорема справедлива только при условии, что внешняя работа равна нулю. Два наиболее простых случая, когда это имеет место, таковы:

1. К упругой системе внешние силы не приложены.
2. Упругая система находится под действием внешних сил, но обобщенные координаты первой группы (см. раздел 5) постоянны и поэтому

$$dW_e = \sum X_i dx = 0.$$

В этих случаях теорема (I) может быть соответственно выражена так:

(I\*) *При отсутствии внешних сил и постоянстве температуры для устойчивости равновесия идеально упругой системы необходимо и достаточно, чтобы ее свободная энергия имела минимальное значение.*

(I\*\*) *Если температура и обобщенные координаты первой группы постоянны, то для состояния устойчивого равновесия идеально упругой системы необходимо и достаточно, чтобы ее свободная энергия имела наименьшее, по сравнению с другими состояниями, значение.*

Условиям устойчивости равновесия различных систем посвящено более 100 страниц в фундаментальной книге Р. Дюгема [4] и ряд работ других авторов. Не касаясь вопроса в целом, ограничиваюсь сравнением (I\*\*) с формулировкой соответствующей теоремы в книге А. Лява [5]. «... Смещения, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям равновесия и условиям на граничной поверхности, сообщают потенциальной энергии деформации, наименьшее значение по сравнению со значением которое сообщают всякие другие смещения, удовлетворяющие лишь тем же условиям на граничной поверхности». (Здесь предполагается, что объемные силы, в частности вес, отсутствуют.)

Так как потенциальная энергия  $V$  не зависит от скорости точек системы,

а условия на граничной поверхности состоят у нас в постоянстве координат первой группы, то приведенную в книге Лява теорему можно формулировать так:

*Если координаты первой группы постоянны, то в состоянии равновесия упругой системы ее потенциальная энергия меньше, чем в другом состоянии при тех же значениях координат первой группы.*

Сравнение показывает, что эта теорема механической теории упругости вполне аналогична теореме (I\*\*) термодинамической теории упругости.

Аналог теоремы (I\*) в механической теории упругости имеется в книге Thomson and Tait<sup>[6]</sup>.

9. Рассмотрим упругие системы, подверженные связям. Нам удобно различать связи внешние и внутренние.

Внешние—это те связи, которые осуществляются посредством тел, не принадлежащих системе, например, связь, осуществляемая внешней опорой.

Внутренние же связи—те, которые осуществляются без посредства внешних тел. Пусть, например,  $A_1BA_2$ —неполное кольцо; приведем точки  $A_1$  и  $A_2$  в соприкосновение и спаяем (чтобы помешать удалению точек  $A_1$  и  $A_2$  друг от друга).

Неполное кольцо не подвержено внутренним связям, паяние же налагает на кольцо внутреннюю связь. Очевидно, внутренние связи вызывают напряжения. Упругая система, в которой напряжения поддерживаются не внешними силами, а лишь благодаря наличию внутренних связей, называется самонапряженной.

Равновесие, имеющее место при наличии внешних и внутренних связей, очевидно, нарушится при уменьшении числа этих связей. Это означает, что уменьшение числа связей должно вызвать необратимый процесс. Применительно к этому случаю можно формулировать теорему (раздел 5, *b*, (α)) так:

*(II) При постоянной температуре уменьшение числа связей, не сопровождающееся внешней работой, уменьшает свободную энергию упругой системы.*

Случай, когда внешняя работа равна нулю, представляется также и в самонапряженных системах, так как по определению к этим системам внешние силы не приложены.

Поэтому теорема (II) сохраняет силу в случае самонапряженных систем и может быть высказана в такой форме.

*(II\*) При постоянной температуре уничтожение каждой из внутренних связей, вызывающих самонапряженность, уменьшает свободную энергию упругой системы, находившейся до этого в состоянии равновесия.*

Уже было сказано, что внешняя работа равна нулю, если обобщенные координаты первой группы постоянны. Поэтому в применении к системам, подверженным внешним связям, теорему (II) можно формулировать так.

*(II\*\*) Если упругая система, подверженная внешним связям, находится в равновесии, то уменьшение числа этих связей при постоянной температуре и постоянных обобщенных координатах первой группы уменьшает свободную энергию системы.*



Из (II\*\*) следует, что когда по уменьшению числа внешних связей при постоянных обобщенных координатах первого рода система придет к новому состоянию равновесия, то ее свободная энергия окажется меньше, чем свободная энергия в равновесном состоянии до уменьшения числа связей.

Аналогия теоремы (II\*) и только что приведенного следствия теоремы (II\*\*) в механической теории упругости применяется часто, см., например, Southwell<sup>[7]</sup>, Rayleigh<sup>[8]</sup>, Ламб<sup>[9]</sup>.

10. При термодинамическом рассмотрении какого-нибудь вопроса часто удобно пользоваться функциями состояния  $U, F, H, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ .

Бесконечно малые приращения этих функций — полные дифференциалы. Условия их интегрируемости, выражающиеся в равенстве друг другу двух частных производных, в ряде случаев являются выражениями самых общих физических законов и обычно называются теоремами или законами взаимности.

К выводу теорем взаимности в области упругих систем мы теперь и переходим. Сначала выведем все эти соотношения, а затем дадим их интерпретацию и тот вид, который они принимают в случае упругих систем подчиняющихся закону Гука (см. раздел 11).

Согласно b, ( $\gamma$ ) раздела 5, в обратимом изотермическом процессе приращение свободной энергии равно внешней работе

$$d_t F = dW_e = \sum_{i=1}^{i=k} X_i dx_i$$

Так как нумерация обобщенных сил вполне произвольна, то для удобства письма обозначим интересующие нас силы индексами 1 и 2. Тогда

$$d_t F = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \sum_{r=3}^{r=k} X_r dx_r$$

Одним из условий интегрируемости этого выражения является равенство

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)_{x_1, x_r} = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_{x_2, x_r} \quad (III)$$

где значками  $x_1$  и  $x_2$  при производных отмечено постоянство обобщенных координат  $x_1$  и  $x_2$ , а значок  $x_r$  указывает на постоянство всех обобщенных координат, начиная от  $x_3$  до  $x_k$ .

Положив  $\Delta = 0$  и  $dt = 0$ , имеем из (5,10) и (5,11) в случае обратимых изотермических процессов

$$d_t \Phi_1 = -x_1 dX_1 + X_2 dx_2 + \sum_{r=3}^{r=k} X_r dx_r$$

$$d_t \Phi_2 = -x_1 dX_1 - x_2 dX_2 + \sum_{r=3}^{r=k} X_r dx_r$$

Таким же образом при  $\Delta = 0$ ,  $dt = 0$  получили бы для  $d_t\Phi_\sigma$

$$d_t\Phi_\sigma = -x_1 dX_1 - x_2 dX_2 - \sum_{i=3}^{i=\sigma} x_i dX_i + \sum_{l=\sigma+1}^{l=k} X_l dx_l$$

Наконец, в случае обратимого изотермического процесса (5.6) примет вид

$$d_tH = -x_1 dX_1 - x_2 dX_2 - \sum_{r=3}^{r=k} x_r dX_r$$

Условия интегрируемости дифференциалов  $d_t\Phi_1$ ,  $d_t\Phi_3$ ,  $d_t\Phi_\sigma$ ,  $d_tH$  соответственно таковы

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{X_1, x_r} = -\left(\frac{\partial X_2}{\partial X_1}\right)_{x_2, x_r} \quad (\text{III}^*)$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2}\right)_{X_1, x_r} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_1}\right)_{X_2, x_r} \quad (\text{III}^{**})$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2}\right)_{X_1, X_i, x_l} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_1}\right)_{X_2, X_i, x_l} \quad (\text{III}^{***})$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2}\right)_{X_1, X_r} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_1}\right)_{X_2, X_r} \quad (\text{III}^{****})$$

Здесь, как и в (III), индекс  $x_r$  указывает на постоянство всех обобщенных координат  $x_3, x_4, \dots, x_k$ . В (III\*\*\*\*) индекс  $X_r$  обозначает постоянство всех обобщенных сил  $X_3, X_4, \dots, X_k$ . В (III\*\*\*), (III\*\*) индексы  $X_i$  и  $x_l$  означают соответственно постоянство обобщенных сил  $X_3, X_4, \dots, X_\sigma$  и постоянство обобщенных координат  $x_{\sigma+1}, \dots, x_k$ , ( $\sigma < k$ ). При  $\sigma = 2$  соотношение (III\*\*\*\*) переходит в (III\*\*), а при  $\sigma = k$  (III\*\*\*\*) переходит в (III\*\*).

Для полноты следует указать на возможность такого выбора функции состояния  $\Phi$ , при котором в (III\*) постоянство координат  $x_r$  ( $r = 3, \dots, k$ ) можно заменить постоянством части обобщенных сил  $X_i$  ( $i = 3, \dots, \sigma$ ) и части обобщенных координат  $x_l$  ( $l = \sigma + 1, \dots, k$ ).

Смысл соотношений (III) — (III\*\*\*\*) заключается в следующем.

(III) Чтобы увеличение обобщенной координаты  $x_2$  на единицу осуществилось при постоянной обобщенной координате  $x_1$ , необходимо настолько изменить обобщенную силу  $X_1$ , насколько должна быть изменена обобщенная сила  $X_2$  для увеличения на единицу координаты  $x_1$  при постоянной  $x_2$  (в обоих процессах остаются постоянными температура и все другие обобщенные координаты первой группы  $x_3, \dots, x_k$ ).

Для большей четкости словесной формулировки равенств (III\*) — (III\*\*\*\*) условимся выбирать знаки обобщенных координат так, чтобы при постоянстве всех прочих обобщенных сил положительному приращению  $dX_i$  соответствовало положительное же приращение  $dx_i$ .

Смысл (III\*) таков.

При постоянной обобщенной силе  $X_1$  увеличение обобщенной координаты  $x_2$  на единицу сопровождается таким изменением координаты

$x_1$ , какое вызывает в обобщенной силе  $X_2$  уменьшение на единицу силы  $X_1$  при постоянной координате  $x_2$  (в обоих процессах остаются постоянными температура и все другие обобщенные координаты первой группы  $x_3, \dots, x_k$ ).

Соотношение (III\*\*\*\*) можно формулировать так.

*При постоянной обобщенной силе  $X_1$  увеличение обобщенной силы  $X_2$  на единицу вызовет такое же изменение обобщенной координаты  $x_1$ , какое вызывает в координате  $x_2$  увеличение  $X_1$  на единицу при постоянной  $X_2$  (в обоих процессах остаются постоянными температура и обобщенные силы  $X_3, \dots, X_k$ ).*

В последних трех формулировках речь идет о смысле соотношений (III)—(III\*\*\*\*), а не о численных значениях, входящих в эти соотношения производных, так как, очевидно, вообще  $dy/dz \neq \Delta y/\Delta z$ .

11. В механической теории упругости аналоги соотношений (III)—(III\*\*\*\*) также называются теоремами взаимности и ими широко пользуются в строительной механике. Но эти теоремы взаимности имеют значительно менее общий характер, чем (III)—(III\*\*\*\*) вследствие того, что в механической теории упругости рассматриваются упругие системы, подчиняющиеся закону Гука.

Потенциальная энергия таких систем является однородной функцией второй степени. Следствием этого является теорема Betti, из которой обычно и выводят теоремы взаимности.

Мы можем прийти к теоремам взаимности в той форме, в какой они известны в механической теории упругости, исходя из (III\*\*\*\*).

Для систем, подчиняющихся закону Гука [7],

$$x_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{ik}X_k \quad (11.1)$$

причем коэффициенты  $a_{ij}$  суть функции одной только температуры и являются постоянными при  $t = \text{const}$ .

Поэтому обе части (III\*\*\*\*) будут постоянными  $(\partial x_1 / \partial X_2)_{X_1, X_r} = a_{12}$ ,  $(\partial x_2 / \partial X_1)_{X_2, X_r} = a_{21}$  и соотношение (III\*\*\*\*) примет вид

$$a_{12} = a_{21} \quad (11.2)$$

Ввиду постоянства коэффициентов  $a_{12}$  и  $a_{21}$  (при  $t = \text{const}$ ) частные производные в (III\*\*\*\*) можно заменить отношениями конечных приращений

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2}\right)_{X_1, X_r} = \frac{\Delta x_1}{\Delta X_2}, \quad \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_1}\right)_{X_2, X_r} = \frac{\Delta x_2}{\Delta X_1} \quad (11.3)$$

Положив теперь  $\Delta X_1 = 1$ ,  $\Delta X_2 = 1$ , имеем

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \quad (11.4)$$

Соотношения (11.2) и (11.4) выражают один из законов взаимности в механической теории упругости. Обыкновенно этот закон пишут в еще более частном виде, предполагая, что силы прилагаются к еще недеформированной упругой системе. Тогда  $\Delta X_1 = X_1 = 1$ ,  $\Delta X_2 = X_2 = 1$  и отсюда часто приводимая формулировка:

*единичная обобщенная сила  $X_2$  вызывает такое обобщенное перемещение  $x_1$ , каково обобщенное перемещение  $x_2$  под действием единичной обобщенной силы  $X_1$ .*

12. Частная производная  $\partial x_i / \partial X_j$  обобщенной координаты  $x_i$  по какой-либо из обобщенных сил  $X_j$  при любых значениях индексов  $i$  и  $j$  может быть названа коэффициентом влияния.

Для упрощения письма условимся не писать тех индексов, которые одинаковы для рассматриваемой группы частных производных; так, например, в (III\*\*\*\*) будем опускать индекс  $X_r$ , встречающийся в обеих частях.

Соотношения (III), (III\*\*), (III\*\*\*) и (III\*\*\*\*) устанавливают зависимости между коэффициентами влияния  $\partial x_i / \partial X_j$  и  $\partial x_j / \partial X_i$  для любых  $i \neq j$ .

Принимают — и это можно обосновать — в качестве условия, необходимого для устойчивости равновесия, что коэффициенты влияния  $\partial x_i / \partial X_i$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_i} > 0 \quad (12.1)$$

Исходя из (12.1) и соотношений (III) — (III\*\*\*\*), можно сделать несколько новых заключений о коэффициентах влияния.

Мы остановимся на двух из них. Пусть в каждой из сопряженных пар  $X_r, x_r$  ( $r=3, \dots, k$ ) постоянна или обобщенная сила  $X_r$ , или обобщенная координата  $x_r$ . Тогда приращения координат  $x_1$  и  $x_2$  будут зависеть только от приращений обобщенных сил  $X_1$  и  $X_2$ .

$$dx_1 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \right)_{x_2} dX_1 + \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \right)_{x_1} dX_2, \quad dx_2 = \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \right)_{x_2} dX_1 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \right)_{x_1} dX_2 \quad (12.2)$$

Положив  $dx_2 = 0$ , получим

$$\left( \frac{\partial X_2}{\partial X_1} \right)_{x_2} = - \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \right)_{x_2} : \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \right)_{x_1} \quad (12.3)$$

Это и одно из соотношений (III\*\*), (III\*\*\*), (III\*\*\*\*) приводят к зависимости

$$\left( \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \right)_{x_2} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \right)_{x_2} - \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right)_{x_1} \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \right)_{x_2}^2 \quad (IV)$$

Так как  $(\partial x_2 / \partial X_1)_{x_2} > 0$  и согласно (12.1) также  $(\partial X_2 / \partial x_2)_{x_1} > 0$ , то из (IV) следует

$$\left( \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \right)_{x_2} < \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \right)_{x_1} \quad (12.4)$$

Так как наложение связей (в данном случае введение условия  $x_2 = \text{const}$ ) равносильно увеличению жесткости системы, то смысл только что полученного неравенства очевиден; увеличение жесткости уменьшает коэффициент влияния  $\partial x_i / \partial X_i$ . Этот результат эквивалентен (II\*\*) и ничего нового не дает. Соотношение (IV) интересно не тем, что приводит к только что рассмотренному неравенству, а потому, что устанавливает количественную зависимость между коэффициентами влияния  $(\partial x_1 / \partial X_1)_{x_2}$  и  $(\partial x_1 / \partial X_1)_{x_1}$ .

Соотношение (IV) относится к распространенному в термодинамике типу формул и аналогичная ей формула имеется в книге Epstein<sup>[10]</sup>.

Чтобы вывести другое важное соотношение, перепишем первое из равенств (12.2) в виде

$$\left( \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \right)_{x_2} \left( \frac{\partial X_1}{\partial X_2} \right)_{x_1} \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right)_{x_1} = -1 \quad (12.5)$$

Считая  $x_1$  зависящей от  $X_1$  и  $x_2$ , получим

$$dx_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)_{x_2} dX_1 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{X_1} dx_2$$

или аналогично (12.5)

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)_{x_2} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)_{x_1} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)_{X_1} = -1 \quad (12.6)$$

Разделим (12.6) на (12.5). Частные производные  $(\partial X_1 / \partial X_2)_{x_1}$  и  $(\partial X_1 / \partial x_2)_{x_1}$  соответствуют одному и тому же процессу  $x_1 = \text{const}$ ; поэтому

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)_{x_1} : \left(\frac{\partial X_1}{\partial X_2}\right)_{x_1} = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_{X_1} \quad (12.7)$$

Таким же образом

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)_{X_1} : \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_{X_1} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_2}\right)_{X_1} \quad (12.8)$$

Поэтому в результате деления (12.6) на (12.5) получаем

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)_{x_2} : \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)_{X_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2}\right)_{x_1} : \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_2}\right)_{X_1} \quad (V)$$

Отбросив в (III) и (III\*\*) индекс  $x_1$ , общий для всех частных производных, получим соотношение

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2}\right)_{x_2} : \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2}\right)_{X_1} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_1}\right)_{x_1} : \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_1}\right)_{X_2} \quad (V^*)$$

соответствующее (V); в соотношении (V) рассматриваются коэффициенты влияния  $\partial x_i / \partial X_j$ , а в (V\*) — коэффициенты влияния  $\partial x_i / \partial X_j$  при  $i \neq j$ .

Однако (V\*) представляет меньший интерес, чем (V), так как в (V\*) равенство левой и правой частей вытекает, — см. (III) и (III\*\*), из того, что порознь равны частные производные, находящиеся в числителях, и частные производные, находящиеся в знаменателях; между тем в (V) числители в отдельности и знаменатели в отдельности не равны друг другу.

Наконец, для  $i \neq j$  соотношение, соответствующее (IV), может быть представлено так:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2}\right)_{x_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2}\right)_{X_1} - \left[ \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)_{x_2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_2}\right)_{X_1} : \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_2}\right)_{X_1} \right] \quad (IV^*)$$

Это соотношение также не представляет большого интереса, так как знак  $(\partial x_1 / \partial X_2)_{X_1}$  неизвестен и поэтому, пользуясь только (IV\*), нельзя установить знак разности  $(\partial x_1 / \partial X_2)_{x_2} - (\partial x_1 / \partial X_2)_{X_1}$ .

Для упругих систем, следующих закону Гука, коэффициенты влияния

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)_{X_2} = a_{11}, \quad \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2}\right)_{X_1} = a_{12}, \quad \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_2}\right)_{X_1} = a_{22}$$

постоянны [см. (11.1)]. Поэтому, если положить

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)_{x_2} = a_{11}', \quad \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_2}\right)_{x_1} = a_{22}'$$

то для упругих систем, подчиняющихся закону Гука, соотношения (IV) и (V) соответственно примут вид

$$a_{11}' = a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}}, \quad a_{11}' : a_{11} = a_{22}' : a_{22} \quad (12.9)$$

Таким же образом могут быть написаны и соотношения (IV\*) и (V\*).

Соотношений (IV), (V), (IV\*), (V\*) и вытекающих из них (12.9), а также их аналогов в механической теории упругости я в литературе не встречал.

13. Зависимости (I) — (V\*) справедливы для всех идеально упругих систем. Часть этих зависимостей, а именно (I) — (II\*\*), основана на 5, в, ( $\alpha$ ) и 5 в, ( $\beta$ ). Так как свойства 5, г термодинамического потенциала параллельны свойствам свободной энергии 5, в, то, исходя из 5, г, можно прийти к нижеприведенным заключениям (VI) — (VIII), параллельным (I) — (II\*\*) и также справедливым для всех упругих систем. Доказательства явились бы почти дословным повторением доказательств теорем (I) — (II\*\*) и поэтому опущены.

(VI) При постоянных внешних обобщенных силах и постоянной температуре для устойчивости равновесия идеально упругой системы необходимо и достаточно, чтобы ее термодинамический потенциал имел минимальное значение.

(VII) При постоянных внешних обобщенных силах и постоянной температуре уничтожение каждой из внутренних связей уменьшает термодинамический потенциал упругой системы, находившейся до этого в состоянии равновесия.

(VIII) При постоянных внешних обобщенных силах и постоянной температуре уменьшение числа внешних связей уменьшает термодинамический потенциал упругой системы, находившейся до этого в состоянии равновесия.

Еще одно соотношение вытекает из 5, г, ( $\gamma$ ). Согласно (5.8) в обратимом процессе

$$x_i = - \left( \frac{\partial H}{\partial X_i} \right)_{X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k} \quad (IX)$$

14. Интерес представляет то обстоятельство, что в случае упругих систем, подчиняющихся закону Гука, теоремы (VI) — (IX) могут быть выражены посредством свободной энергии.

Эта возможность основана на следующей теореме:

*Для упругих систем, подчиняющихся закону Гука, сумма свободной энергии и термодинамического потенциала есть функция температуры*

$$F + H = \psi(t)$$

Чтобы доказать это, воспользуемся (11.1)

$$x_i = \sum_{j=1}^{j=k} a_{ij} X_j, \quad dx_i = \sum_{j=1}^{j=k} a_{ij} dX_j \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Поэтому, согласно 5, в, ( $\gamma$ )

$$d_i F = \sum_i X_i dx_i = d \sum_i \frac{a_{ii} X_i^2}{2} + d \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j \quad (i \neq j)$$

а по 5, г, (γ)

$$d_i H = -d \sum_i \frac{a_{ii} X_i^2}{2} - d \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j \quad (i \neq j)$$

Сложив выражения для  $d_i F$  и  $d_i H$ , имеем

$$d_i (F + H) = 0 \quad \text{или} \quad F + H = \psi(t) \quad (14.1)$$

где  $\psi(t)$  — неизвестная функция температуры.

Нам придется пользоваться и тем, что

$$d_i F = -d_i H \quad (14.2)$$

Из (14.1) и (14.2) следует, что при постоянной температуре в системах, подчиняющихся закону Гука, максимуму термодинамического потенциала соответствует минимум свободной энергии и наоборот.

Теоремы (VI) — (VIII) и (IX) теперь могут быть сформулированы несколько иначе. В новой формулировке (X) соответствует (VI), (XI) — (VII) и (VIII), а (XII) — (IX).

(X) При постоянной температуре и постоянных внешних обобщенных силах для устойчивого равновесия упругой системы, следующей закону Гука, необходимо и достаточно, чтобы свободная энергия системы достигла максимального значения.

(XI) Если упругая система, следующая закону Гука, находится в равновесии, то уменьшение числа внутренних или внешних связей при постоянной температуре и постоянных внешних обобщенных силах вызывает увеличение свободной энергии системы.

Наконец, (IX) переписывается так:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial X_i} \right)_{X_j} = x_i \quad (XII)$$

где индекс  $X_j$  означает постоянство всех обобщенных внешних сил, кроме  $X_i$ .

Аналогом потенциальной энергии механической теории упругости является в термодинамической теории упругости свободная энергия. Термодинамический потенциал не может быть аналогом потенциальной энергии. Поэтому (VI) — (IX) не имеют аналогов в механической теории упругости. Аналоги теорем (X) — (XII) хорошо известны. Аналог (XII) называется теоремой Castigliano.

15. До сих пор неизменно предполагалось, что температура системы постоянна. Однако упругие системы доступны такому же термодинамическому рассмотрению, какое здесь проведено, еще и в том случае, когда теплообмен между средой и системой невозможен, и процессы в упругой системе должны быть адиабатическими, а не изотермическими.

В этом случае следует заменить функции  $F$  и  $H$  соответственно функциями  $U$  и  $G = U - \sum_{i=1}^{i=k} X_i x_i$  ( $G$  называется теплоемкостью). Таким образом могут быть получены теоремы и соотношения, вполне соответствующие выведенным здесь, но в предположении не постоянной температуры, а отсутствия теплообмена.

### A. A. AKOPIAN.—APPLICATIONS OF THERMODYNAMICS TO THE EQUILIBRIUM OF IDEAL ELASTIC SYSTEMS

In this paper the equilibrium of an elastic system under the action of external forces is considered from the thermodynamics point of view.

1. For an ideal elastic system with constant temperature the following have been established:

a. The criteria of equilibrium for different conditions (I), (I\*), (I\*\*), (VI).

б. The signs of increments of the free energy and thermodynamic potential for the decrease of the number of internal and external constraints (II), (II\*), (VII) and (VIII).

в. The general relationships for generalized forces and generalized displacements in state of equilibrium (III), (III\*), (IV), (V), (IV\*) and (V\*).

2. The relationships indicated by 1a and 1б are given for a particular case of constant temperature ( $t = \text{const}$ ) and for the constant external generalized forces for an elastic system following Hooke's law (X), (XI) and (XII).

3. A part of relationships indicated by 1в are also given for an elastic system governed by Hooke's law.

4. It is shown that for  $t = \text{const}$  the free energy of thermodynamic elastic systems is analogous to the potential energy of mechanical elastic systems and thus all relationships of the thermodynamic theory of elasticity concerning free energy must have their analogies in the mechanical theory of elasticity.

5. It is pointed out that the relationships taking place in an arbitrary ideal elastic system for  $t = \text{const}$  are also valid for systems of invariable bodies with ideal constraints.

6. It is further pointed out that analogous results may be obtained in all above mentioned cases if instead of the condition  $t = \text{const}$  no heat exchange is required between the elastic system and medium.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. The collected works of J. W. Gibbs. Vol. I. Longman; Green and Co. New York, London, Toronto. 1918. [P. 184 — 218]. Комментарии к этой работе см. A Commentary on the Scientific Writings of J. W. Gibbs. Vol. I. Yale University Press. New Haven. 1936 [P. 395 — 504].
2. Jouguet E. Notes sur la théorie de l'élasticité. Annales de la Faculté de Science de Toulouse. 1921.
3. Biot. Non Linear Theory of Elasticity and the Linearised Case of a Body under Initial Stress: Philosophical Magazine, 7 series. April 1939. [P. 468 — 489].
4. Duhem P. Traité d'énergétique.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР. 1935. [Стр. 182, § 119].
6. Thomson a. Tait. Treatise on Natural Philosophy. Sec. Edit. § 345, ii.
7. Southwell. Introduction to the Theory of Elasticity. Oxford. 1936. § 84.
8. Lord Rayleigh. Theory of Sound. Vol. I. Macmillan. London. 1929. Ch. IV, § 74.
9. Ламб Г. Теоретическая механика. ОНТИ НКТП СССР. 1936. Т. I. § 89.
10. Epstein. Textbook of Thermodynamics. New York. John Willey and Sons. 1937. § 143. For. (21.23). (21.27).