

ОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ РЕШЕТКИ ИЗ ЛОМАНЫХ ПРОФИЛЕЙ

И. В. ЛАМБИН

(Казань)

В настоящей работе рассматривается задача отрывного обтекания решетки из ломаных профилей потоком совершенной и несжимаемой жидкости.

Постановка задачи возникла при изучении действия суперкавитирующих гребных винтов, работающих при отрывном обтекании лопастей [2].

В первой части этой статьи рассматривается вопрос отрывного обтекания винтовой решетки, состоящей также из бестелесных, но ломаных пластин.

При исследовании предполагается, что лопасти суперкавитирующего винта имеют такую форму, что при пересечении его поверхностью соосного с ним цилиндра и последующем разворачивании поверхности этого цилиндра на плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ как это обычно делается и в теории некавитирующих винтов, получается решетка, каждое звено которой представляет собой ломаную линию, состоящую из прямолинейных отрезков $G_k P_k$ и $P_k H_k$ (фиг. 1); при разворачивании на плоскость считаем вещественную ось параллельной оси винта.



Фиг. 1

Еторая часть работы посвящена качественному исследованию распределения скоростей и давлений изучаемого потока на основе полученного решения.

1. Формулировка задачи и основные зависимости

Пусть в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ требуется построить бесконечный, стационарный, плоский поток совершенной и несжимаемой жидкости, направленный из левой полуплоскости в правую и встречающийся на своем пути решетку (фиг. 1), т. е. совокупность не пронизываемых для жидкости контуров λ_k (звеньев решетки) $k = \pm 0, 1, 2, 3, \dots$, расположенных так, что каждый контур λ_k может быть получен параллельным переносом контура λ_{k-1} по направлению мнимой оси на величину a (a — шаг решетки).

Каждое звено λ_k решетки представляет собой ломаную линию, состоящую из двух прямолинейных отрезков $G_k P_k$ и $P_k H_k$, с угловой точкой P_k .

Точка G_0 совпадает с началом координат. Звено решетки λ_0 лежит в четвертом квадранте. Угол α_1 между положительным направлением вещественной оси и вектором $G_0 P_0$ отрицателен и по абсолютной величине меньше, чем $\frac{1}{2}\pi$. То же относится и к углу α_2 между положительным направлением вещественной оси и вектором $P_0 H_0$. По условию задачи

$$\alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = |\alpha_1| - |\alpha_2| > 0$$

Требуется, чтобы поток удовлетворял еще следующим условиям.

На концах $G_k H_k$ каждого звена решетки имеет место срыв струй, так что поток заполняет не всю плоскость z , каждому звену λ_k решетки соответствует односвязная область M_k , не заполненная потоком и ограниченная этим звеном и двумя кривыми Жордана, соединяющими точки G_k и H_k с бесконечно удаленной точкой.

Области M_k расположены так, что при $z \rightarrow \infty$ внутри M_k переменная $x \rightarrow \infty$.

Углы $G_k P_k H_k$ обращены вершиной внутрь областей M_k .

Скорость жидкости на границе областей M_k непрерывна. Срыв струй происходит по касательной.

При движении точки z по контуру области M_k от точки G_k до точки H_k против часовой стрелки, не по звену решетки, величина скорости потока остается постоянной, а направление изменяется монотонно.

Точки Q_k раздела струй потока находятся на первых частях звеньев решетки, т. е. между точками G_k и P_k . Скорость жидкости отлична от нуля во всей части плоскости z , заполненной потоком.

Предполагая искомый поток существующим и скорость его имеющей период ai , разделим плоскость z на области, ограниченные каждая двумя линиями тока жидкости, получаемыми одна из другой параллельным переносом на величину ai и не имеющими, кроме точки $z = \infty$, общих точек с контурами областей M_k . Тогда каждая из этих областей содержит одну и только одну из областей M_k .

Обозначим через T_k часть каждой из вышеописанных областей.

Одну из областей T_k подвергнем конформному отображению, взяв, как это делается и при решении аналогичной задачи для неизломанных профилей, в качестве отображающей функции функцию $w = w(z)$, сопряженную со скоростью жидкости. Отображения точек P_k , H_k и G_k при этом и при дальнейших конформных отображениях будем обозначать теми же буквами, но без индексов. Обозначим через w_1 , w_2 , w_0 предельные значения функции $w = w(z)$ соответственно при $z \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, при $z \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ и при $z \rightarrow 0$ внутри T_k .

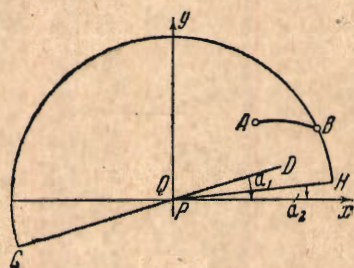
Если строить поток, удовлетворяющий условию однолиственности функции $w(z)$ в области T_k , т. е. условию, что внутри T_k скорость жидкости не принимает одного и того же значения в двух различных точках, то из условия существования потока следует, что в плоскости w области T_k соответствует однолистная область T_w . Из определения отображающей функции видно, что область T_w ограничена дугой окружности с центром в на-

чале координат, прямолинейными отрезками, проходящими через начало координат, и некоторой линией AB , соединяющей точку B этой окружности с одной из внутренних точек соответствующего круга (фиг. 2). Здесь существенно, что скорость жидкости при прохождении ее через решетку увеличивается, так как наличие областей M_k заставляет линии тока сближаться. Две стороны линии AB соответствуют двум вышеописанным линиям тока в плоскости z . Каждой ее точке соответствуют в плоскости z две точки, различающиеся на период a_i функции $\omega(z)$.

Двойной точке B контура области T_w соответствуют две точки контура области T_k , — двойная точка $z = \infty, x = +\infty$.

Точке A соответствует точка $z = \infty, x = -\infty$. Все эти три точки как точки контура области T_k различны и как точки плоскости z совпадают с точкой $z = \infty$.

При отображении области T_k плоскости z на область T_w плоскости w отрезок $Q_k P_k$ отображается на две стороны QD и PD прямолинейного отрезка, являющегося продолжением отрезка GQ на фиг. 2. Это происходит потому, что скорость жидкости изменяется вдоль отрезка $Q_k P_k$ по величине не монотонно, в то время как направление ее остается постоянным.



Фиг. 2

Поставленное условие однолиственности функции $w = \omega(z)$ обеспечивает возможность разделения отрезка $Q_k P_k$ на две части, на каждой из которых величина скорости изменяется монотонно. Эти части и соответствуют двум сторонам PD и QD прямолинейного отрезка в плоскости w .

Отрезок QD короче отрезка QG или PH , точка D лежит внутри круга, дуга GH окружности которого принадлежит контуру T_w . Это также есть следствие однолиственности функции $w = \omega(z)$.

Длина отрезка QD равна величине скорости жидкости в той точке отрезка $Q_k P_k$, где она достигает максимума. Этот максимум, следовательно, меньше скорости жидкости на бесконечности после встречи потока с решеткой. Эта последняя скорость изображается на фиг. 2 длиной отрезков PH и PG . Углы отрезков PD и PH с осью x равны углам $-\alpha_1$ и $-\alpha_2$.

Расстояние от точки A до начала координат равно скорости жидкости на бесконечности до встречи потока с решеткой.

Существующий по предположению поток в плоскости z перейдет при отображении области T_k на область T_w в плоский поток, все линии тока которого, кроме одной, начинаются в точке A с комплексной координатой w_1 и оканчиваются в точке B с комплексной координатой w_2 . Одна линия тока соединяет точку A с точкой Q контура области T_w , т. е. началом координат.

Обозначим функцию тока, полученного в области T_w потока, через $\Phi = \Phi(w)$. Тогда

$$w(z) = \frac{d\Phi[\omega(z)]}{dz} \tag{1.1}$$

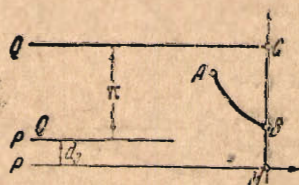
Точка A является для функции $\Phi(w)$ источником жидкости, а точка B — стоком (отрицательным источником). Обозначим через $T_w^{(1)}$ область, получаемую из области T_w присоединением точек линии AB , и продолжим аналитически функцию $\Phi(w)$ на область $T_w^{(1)}$, что, очевидно, возможно в силу периодичности $w(z)$. Функция $\Phi(w)$ неоднозначна в области $T_w^{(1)}$. В самом деле, из только что приведенной формулы имеем

$$\Phi[w(z_2)] - \Phi[w(z_1)] = \int_{z_1}^{z_2} w(z) dz$$

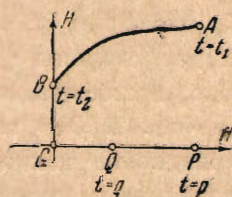
Полагая в этой формуле $z_2 = z_1 + ai$ и выбирая абсциссу z_1 отрицательной и по абсолютной величине достаточно большой, получаем

$$\Delta\Phi(w) = aiw_1 \quad (1.2)$$

где $\Delta\Phi(w)$ — приращение $\Phi(w)$ при обходе w вокруг точки A против часо-



Фиг. 3



Фиг. 4

вой стрелки, а w_1 — значение функции $w(z)$ при $z = \infty$, $x = -\infty$, т. е. комплексная координата точки A в плоскости w .

Из той же формулы, связывающей Φ и w , получаем

$$z = \int_{w_0}^w \frac{\Phi'(u)}{u} du \quad (1.3)$$

и, принимая во внимание значения функции $w(z)$ при $z = \infty$, $x = \pm \infty$,

$$\operatorname{Re} \int_{w_0}^{w_1} \frac{\Phi'(u)}{u} du = -\infty, \quad \operatorname{Re} \int_{w_0}^{w_2} \frac{\Phi'(u)}{u} du = +\infty \quad (1.4)$$

Нетрудно проверить, что для построения искомого потока в плоскости z достаточно построить область $T_w^{(1)}$ (форма которой известна), выбрать в этой области внутреннюю точку w_1 (точка A), и на ограничивающей эту область круговой дуге точку w_2 (точка B) и, наконец, построить потенциальный поток с источником в точке w_1 и стоком в точке w_2 , удовлетворяющий условиям (1.2) и (1.4), условию однолиственности функции $z(w)$, определяемой формулой (1.3), и условию существования линии тока, соединяющей точку A с точкой Q .

Полагая, что при заданной скорости w точка z , в которой поток имеет эту скорость, определяется формулой (1.3), мы и получим искомый поток в области T_k плоскости z . Из этих соображений, конечно, не следует возможности построения такого потока в области $T_w^{(1)}$.

Для построения искомого потока в плоскости w отображаем область T_w , т. е. разрезанную по линии AB область $T_w^{(1)}$, на соответствующую разрезанную область плоскости ζ , ограниченную полупрямыми, параллельными вещест-

венной оси, и прямолинейным отрезком, параллельным мнимой оси (фиг. 3). Эту последнюю область отображаем на также соответственно разрезанный первый квадрант плоскости t (фиг. 4) так, чтобы прямолинейные отрезки, принадлежащие контуру $T_w^{(1)}$, отображались на правую половину вещественной оси, а дуга GH — на верхнюю половину мнимой оси. Полученные области обозначим через T_2 и T_1 . Условие (1.2) имеет место и в плоскости t .

На фиг. 4 через t_1, t_2, p и q обозначены комплексные координаты точек A, B, P и Q , т. е. отображений точек A, B, P и Q плоскости w .

Обозначим скорости жидкости на бесконечности до встречи потока с решеткой ($x = -\infty$) и после этой встречи ($x = +\infty$) соответственно через

$$\bar{w}_1 = v_1 = |v_1| \exp(-i\gamma_1), \quad \bar{w}_2 = v_2 = |v_2| \exp(-i\gamma_2) \quad (1.5)$$

Как легко проверить, функции, реализующие эти отображения, можно определить формулами

$$\zeta = \ln \frac{w \exp(iz_2)}{|v_2|} \quad (\ln 1 = 0) \quad (1.6)$$

$$\zeta = \frac{\alpha_2}{\pi} \ln \frac{t-p}{t+p} + \ln \frac{t-q}{t+q} \quad (\ln 1 = 0, 0 < q < p) \quad (1.7)$$

При отображении области T_1 на область T_h плоскости z , реализуемой этими формулами и функцией $w = w(z)$, точки H_h, G_h, Q_h и P_h контура T_h соответствуют точкам $t = \infty, t = 0, t = q$ и $t = p$ контура T_1 .

Тройная точка $z = \infty$ контура T_h соответствует точке t_2 и двойной точке t_2 контура T_1 . Точка t_1 лежит внутри первого квадранта плоскости t , а точка t_2 — на верхней половине мнимой оси. При этом $z \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$, когда $t \rightarrow t_1$, и $z \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty$, когда $t \rightarrow t_2$.

Прямолинейные отрезки $G_h P_h$ и $P_h H_h$ соответствуют положительной половине вещественной оси в плоскости t , часть границы области T_h , отделяющая ее от M_h , соответствует верхней половине мнимой оси и, наконец, остающаяся часть границы T_h отвечает двум краям линии AB в плоскости t .

Условие $\ln 1 = 0$ при формулах (1.6) и (1.7) может быть заменено геометрическим правилом выбора значений аргументов дробей $(t-p)/(t+p)$ и $(t-q)/(t+q)$. Правило состоит в том, что

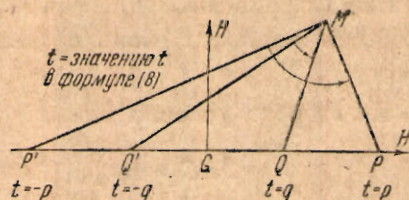
$$\arg \frac{t-p}{t+p} = \angle P'MP > 0, \quad \arg \frac{t-q}{t+q} = \angle Q'MQ > 0 \quad (1.8)$$

где P' и Q' — точки, симметричные с P и Q относительно мнимой оси (фиг. 5), а точка M есть точка с комплексной координатой t в формуле (1.7).

Можно также заменить это условие условием, что аргументы этих дробей лежат между 0 и π во всей области T_1 . Из (1.6) и (1.7) получаем

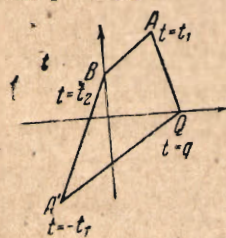
$$w = |v_2| \exp(-ia_2) \frac{t-q}{t+q} \left(\frac{t-p}{t+p} \right)^{\alpha_2/\pi} \quad (1.9)$$

где аргументы дробей определяются согласно (1.8).



Фиг. 5

Вместо того, чтобы строить интересующий нас поток в области $T_w^{(1)}$, построим соответствующий поток в области $T_1^{(1)}$, полученной из T_1 присоединением точек разреза AB так же, как $T_w^{(1)}$ из T_w . Аналитическое выражение функции тока в плоскости t можно найти, пользуясь принципом симметрии относительно осей координат.



Фиг. 6

Обозначая через $\Phi = \Phi[w(t)] = \Phi(t)$ функцию тока этого потока, получаем из формулы (1.3)

$$z = \int_0^t \frac{\Phi'(\tau)}{\omega(\tau)} d\tau \quad (1.10)$$

где

$$\omega(\tau) = \omega[z(t)], \quad \Phi'(\tau) = \frac{d\Phi[\omega(t)]}{dt} \quad \text{при } t = \tau \quad (1.11)$$

Аналитическое выражение функции тока будет

$$\Phi(t) = \bar{C} \ln(t - \bar{t}_1) + C \ln(t - t_1) + \bar{C} \ln(t + \bar{t}_1) + C \ln(t + t_1) - (C + \bar{C}) \ln(t - t_2) - (C + \bar{C}_2) \ln(t - \bar{t}_2) \quad (1.12)$$

Эта функция при любом значении C удовлетворяет условию равенства нулю нормальной составляющей скорости жидкости на границе области $T_1^{(1)}$, условию, что, кроме точек A и B , других источников или стоков жидкости или точек завихрения нет.

Остается удовлетворить еще условию, что точка A является источником, а точка B — стоком жидкости, условиям (1.2) и (1.4), условию однолиственности функции z , определяемой формулами (1.10) и (1.9), и условию, что при $t = q$ скорость жидкости равна нулю. Из первого из этих условий получаем

$$\operatorname{Re} C > 0 \quad (1.13)$$

Из второго условия имеем

$$2\pi i C = ai\omega_1 \quad \text{или} \quad C = \frac{a\omega_1}{2\pi}, \quad \arg C = \arg \omega_1 \quad (1.14)$$

где $\omega_1 = \omega[z(t_1)] = \omega(t_1)$.

Условия (1.4) при таком выборе C удовлетворяются так же, как и условие однолиственности вышеуказанной функции z .

Наконец, условие $\Phi'(q) = 0$ дает

$$\frac{C}{q - t_1} + \frac{\bar{C}}{q - \bar{t}_1} + \frac{C}{q + t_1} + \frac{C}{q + t_1} - \frac{C + \bar{C}}{q - t_2} - \frac{C + \bar{C}}{q - \bar{t}_2} = 0$$

Отсюда принимая во внимание, что $q = \bar{q}$ и $t_2 = -\bar{t}_2$, получаем

$$\arg \left(\frac{C}{q - t_1} + \frac{C}{q + t_1} - \frac{C}{q - t_2} - \frac{C}{q + t_2} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

где k — целое число. Отсюда

$$\arg \left(\frac{2q}{q^2 - t_1^2} - \frac{2q}{q^2 - t_2^2} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi - \arg C$$

или, принимая во внимание, что $\arg q = 0$ и $\arg(q^2 - t_2^2) = 0$, имеем

$$\arg \frac{t_1^2 - t_2^2}{q^2 - t_1^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi - \arg C$$

Наконец, изменяя значение k на единицу, получим

$$\arg \frac{t_2 - t_1}{q - t_1} + \arg \frac{t_2 + t_1}{q + t_1} = \frac{\pi}{2} + k\pi - \arg C \quad (1.15)$$

где k — произвольное число (т. е. условие $\Phi'(q) = 0$ выполняется при любом k). Число k становится определенным, если принять определенное правило выбора значений аргументов дробей $(t_2 - t_1)/(q - t_1)$ и $(t_2 + t_1)/(q + t_1)$.

В качестве такого правила примем (фиг. 6)

$$\arg \frac{t_2 - t_1}{q - t_1} = -\angle QAB, \quad \arg \frac{t_2 + t_1}{q + t_1} = \angle QA'B \quad (1.16)$$

где точки Q, A, A' и B имеют комплексные координаты $q, t_1, -t_1$ и t_2 , а углы QAB и $QA'B$ положительны и являются внутренними углами четырехугольника $AQA'B$.

Из (1.16) заключаем, что величина в левой части формулы (1.15), а следовательно, и в ее правой части лежит между 0 и $-\pi$, т. е.

$$-\pi < \frac{1}{2}\pi + k\pi - \arg C < 0 \quad (1.17)$$

Из (1.17) и (1.3) следует, что $k = -1$. Таким образом окончательно

$$\arg \frac{t_2 - t_1}{q - t_1} + \arg \frac{t_2 + t_1}{q + t_1} = -\frac{\pi}{2} - \arg C \quad (1.18)$$

если аргументы дробей в этой формуле определяются согласно (1.16).

Совокупность формул (1.1), (1.10), (1.9), (1.8), (1.12), (1.18) и (1.14) решает поставленную задачу. Решения можно получить, давая параметрам $\alpha_1, \alpha_2, t_1, t_2, p$ и q произвольные значения, но только такие, при которых указанные формулы не приводят к противоречию.

Противоречие возможно лишь в одном случае, — величина $\arg C$ может быть вычислена по формуле (1.18) и по формулам (1.9), (1.8) и (1.14), полагая $t = t_1$ в формуле (1.9).

При выборе значений параметров $\alpha_1, \alpha_2, t_1, t_2, p$ и q необходимо позаботиться о том, чтобы эти два способа приводили к одному и тому же результату. Условия, указанные в постановке задачи, и условия, вытекающие из геометрического смысла параметров, следующие: 1) величины α_1, α_2, p и q — вещественны, 2) $-\frac{1}{2}\pi < \alpha_1 < \alpha_2 < 0$, 3) $p > q > 0$, 4) точка t_1 лежит в первом квадранте плоскости t , точка t_2 лежит на верхней половине мнимой оси.

Наконец, самые решения получаем, считая, что скорость потока в точке z плоскости комплексного переменного z , определяемой формулами (1.1), (1.10), (1.9), (1.11) и (1.12), может быть вычислена по формулам (1.9), (1.8) и (1.1) как величина, сопряженная с w . Тогда значения скорости потока на бесконечности до и после встречи его с решеткой получаются из формулы (1.9) при $t = t_1$ и $t = t_2$. Комплексные координаты точек G_0, P_0, H_0 и Q_0 получаются из формулы (1.10) при $t = 0, t = p, t = \infty$ и $t = q$.

Значения $\Phi'(\tau)$ и $w(\tau)$ под интегралом формулы (1.10) определяются формулами (1.9), (1.12) и (1.1). Для вычисления скоростей и давлений потока при наперед заданных значениях длин отрезков P_0G_0 и P_0H_0 и скорости жидкости на бесконечности до встречи потока с решеткой необходимо подобрать параметры t_1, t_2, p и q так, чтобы получить требуемые значения этих величин.

2. Распределение скоростей и давлений жидкости

1°. Точки обращения в нуль функции $w(z)$ и ее производной. Из формулы (1.9) находим, что $w(z)$ не обращается ни в 0, ни в ∞ внутри изучаемой области. На контуре этой области функция w обращается в нуль в точках $t=p$ и $t=q$, т. е. в угловой точке P_k изучаемой решетки и в одной точке Q первой пластинки (фиг. 1). Для производной функции имеем

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{dw}{dt} \frac{1}{dz/dt} = w \frac{d \ln w}{dt} \frac{1}{dz/dt} = w \left(\frac{\alpha_3}{\pi} \frac{1}{t-p} - \frac{\alpha_3}{\pi} \frac{1}{t+p} + \frac{1}{t-q} - \frac{1}{t+q} \right) \frac{w(t)}{\Phi'(t)} \quad (2.1)$$

Точки, где $w(t)=0$, указаны выше. Остается определить значения t , удовлетворяющие условию

$$\frac{\alpha_3}{\pi} \frac{1}{t-p} - \frac{\alpha_3}{\pi} \frac{1}{t+p} + \frac{1}{t+q} - \frac{1}{t-q} = 0 \quad (2.2)$$

Решая это уравнение относительно t , получаем

$$t^2 = \frac{\pi p + \alpha_3 q}{\pi q + \alpha_3 p} pq \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что значение t^2 лежит между p^2 и q^2 . В самом деле,

$$t^2 - q^2 = pq \frac{\pi p + \alpha_3 q}{\pi q + \alpha_3 p} - q^2 = \frac{\pi q}{\pi q + \alpha_3 p} (p^2 - q^2) > 0 \quad (2.4)$$

$$p^2 - t^2 = p^2 - pq \frac{\pi p + \alpha_3 q}{\pi q + \alpha_3 p} = \frac{\alpha_3 p}{\pi q + \alpha_3 p} (p^2 - q^2) > 0 \quad (2.5)$$

Следовательно, dw/dz обращается в нуль только в одной точке, а именно в точке первой пластинки между P_k и Q_k . Отрицательный корень уравнения (2.3) не дает точки обращения в нуль dw/dz , так как соответствующее значение t лежит вне первого квадранта.

Таким образом функция $w(z)$, оставаясь аналитической и отличной от нуля внутри изучаемой области, обращается в нуль в двух точках ее контура: в точке P_k и в точке Q_k , т. е. в угловой точке и в точке раздела струи.

Функция dw/dz , оставаясь также аналитической и отличной от нуля внутри изучаемой области, обращается в нуль в одной точке ее контура, лежащей между P_k и Q_k (фиг. 1).

2°. Линии равного аргумента функции $w(z)$. Рассмотрим теперь всю плоскость комплексного переменного z , а не часть ее, соответствующую первому квадранту плоскости t , как это делалось выше. Тогда функция $w(z)$ имеет бесконечное множество нулей, — по два нуля на каждом звене решетки, а функция dw/dz — по одному нулю на каждом звене решетки.

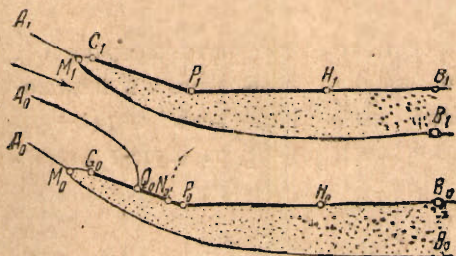
На основании общих свойств аналитических функций можно утверждать, что через всякую точку плоскости комплексного переменного z , кроме точек мертвой зоны и ее границы, проходит одна и только одна линия равного аргумента функции $w(z)$, соединяющая ее с одним из нулей $w(z)$, т. е. с некоторой точкой одного из звеньев пластинки или же с бесконечно удаленной точкой. Линий равного аргумента этого последнего типа может быть в любой конечной части плоскости только конечное число.

Разделим всю плоскость z на части, каждая из которых заполнена линиями равного аргумента w , соединяющими точки этой области с одним определенным звеном решетки.

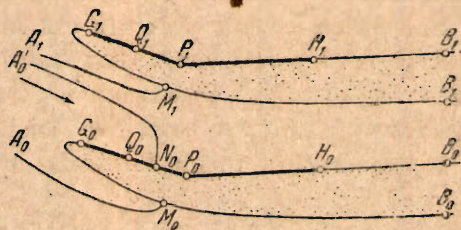
В силу наличия у функции $w(z)$ чисто мнимого периода каждая из таких областей представляет собой бесконечную полосу (правда, не прямолинейную, а неправильной формы), которая тянется от $x \rightarrow -\infty$ до $x \rightarrow +\infty$. Граница этой полосы состоит из точек границы мертвой зоны, из точек решетки и из линий равного аргумента $w(z)$. Следовательно, каждая связная часть мертвой зоны (т. е. каждая отдельная ее часть, связанная с одним звеном решетки) допускает соединение ее с бесконечно удаленной точкой линией равного аргумента $w(z)$, имеющей точки со сколь угодно большими по абсолютной величине отрицательными значениями x (фиг. 7, линии A_0M_0 и A_1M_1).

Покажем, что точка M_0 будет находиться на части B_0G_0 границы мертвой зоны, а не на части B_0H_0 этой границы.

При достаточно малом шаге решетки по сравнению с длинами линии



Фиг. 7



Фиг. 8

$H_0P_0G_0$ точка M_0 будет находиться вблизи левого края мертвой зоны, как это изображено на фиг. 7. Для доказательства достаточно интерпретировать линии равного аргумента $w(z)$, как линии сил электрического поля, считая точки P_k и Q_k точечными электрическими зарядами, линии $H_kP_kG_k$ — состоящими из вещества с диэлектрической проницаемостью 0, а линии $H_kB_kG_k$ — проводниками.

Если теперь начать раздвигать звенья решетки, т. е. увеличивать ее шаг, не меняя размеров звеньев, то каждая точка M_k будет перемещаться по границе мертвой зоны направо (фиг. 8), но даже при неограниченном удалении их друг от друга она не перейдет на линию $B_{k-1}H_{k-1}$, так как такое неограниченное удаление равносильно приближению всей задачи к случаю изолированного профиля, а в этом случае, очевидно, все точки линий B_kH_k будут соединены каждая линиями сил поля, т. е. линиями равного аргумента $w(z)$, с тем звеном решетки, с которым связана данная линия. В самом деле, в этом случае другие звенья отсутствуют.

Тот же самый результат можно получить, исходя из геометрических соображений, а именно: на линии A_kM_k аргумент $w(z)$ остается постоянным и, следовательно, равным аргументу функции $w(-\infty + iy)$, т. е. γ_1 .

Вдоль границы мертвой зоны аргумент $w(z)$ меняется монотонно и, следовательно, принимает значение γ_1 не более одного раза. Существование

линии $A_k M_k$ показывает, что один раз $\arg w(z)$ принимает значение γ_1 , а именно в точке M_k . Следовательно, точка M_k будет находиться в той точке границы мертвой зоны, где касательная к этой границе параллельна скорости жидкости на ∞ до встречи потока с решеткой. Геометрически ясно, что точка эта находится на отрезке $B_k H_k$ вблизи левого края мертвой зоны.

Рассмотрим вопрос о существовании других линий равного $\arg w(z)$ с тем же значением γ_1 этого аргумента.

Если они существуют, то они должны содержать отрезки либо в любой близости к P_k , либо в любой близости к Q_k .

Вблизи Q_k имеем

$$\arg w(z) = -\alpha_2 + \alpha_3 + \arg(t-q) = -\alpha_1 + \arg(t-q) \quad (2.6)$$

$$0 < \arg(t-q) < \pi, \quad -\alpha_1 < \arg w(z) < -\alpha_1 + \pi \quad (2.7)$$

С другой стороны,

$$-\alpha_1 < \gamma_1 < \frac{1}{2}\pi \quad (2.8)$$

Следовательно, в точке Q_k начинается одна линия равного $\arg w(z)$ со значением этого аргумента, равным γ_1 .

Найдем угол, под которым эта линия пересекает пластинку в точке Q_k .

Этот угол равен углу, под которым отображение этой линии в плоскости t пересекает вещественную ось, а этот последний есть $\arg(t-q)$. Поэтому из (2.6) получим, что искомый угол равен $\gamma_1 + \alpha_1$, т. е. углу атаки.

В окрестности точки P_k имеем из (1.9)

$$\arg w = -\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\pi} \arg(t-p), \quad 0 < \arg(t-p) < \pi \quad (2.9)$$

Следовательно,

$$-\alpha_2 < \arg w < -\alpha_2 + \alpha_3, \quad \text{или} \quad -\alpha_2 < \arg w < -\alpha_1 \quad (2.10)$$

Угол γ_1 не лежит в этих пределах и, следовательно, вблизи точки P нет линий равного $\arg w(z)$ со значением его, равным γ_1 .

Итак, кроме линий $A_1 M_1$ и $A_0 M_0$, в области, изображенной на фиг. 7, существует одна и только одна линия $\arg w = \gamma_1$. Один конец ее находится в точке Q_0 . Другой конец A_0 этой линии должен находиться в точке $z = \infty$, $z = -\infty$, так как другого места для него нет.

На фиг. 7 линии $A_1 M_1$, $A_0' Q_0$ и $A_0 M_0$ являются линиями $\arg w = \gamma_1$, т. е. линиями, на которых направление скорости жидкости совпадает с направлением скорости ее на бесконечности до встречи с решеткой. Касательные в точках M_0 и M_1 к границе мертвой зоны параллельны этой скорости. Угол между отрезками $Q_0 P_0$ и касательной к линии $Q_0 A_0'$ равен углу атаки

$$\gamma_1 + \alpha_1 = \gamma_1 - |\alpha_1|$$

Схема, представленная на фиг. 7, очевидно, соответствует случаю, когда угол атаки отличен от нуля.

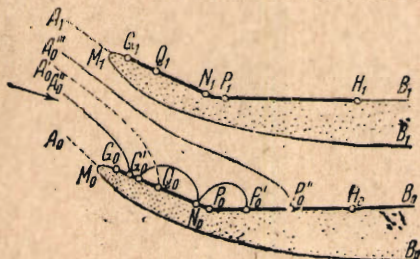
В случае безударного входа, т. е. при угле атаки, равном нулю, линия $Q_0 A_0'$ на фиг. 7 должна быть заменена линией $Q_0 N_0 A_0'$, состоящей из отрезка $Q_0 N_0$ обтекаемой пластинки $P_0 G_0$ и линии $N_0 A_0'$ (фиг. 8).

Линии равного $\arg w(z)$ в области, ограниченной на фиг. 7 линией

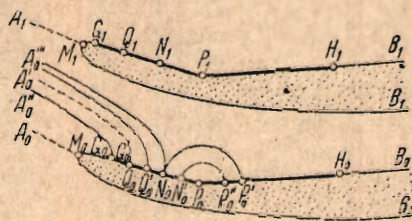
$A_0M_0G_0Q_0A_0'$ или на фиг. 8 линией $A_0M_0G_0Q_0N_0A_0'$ (безударный вход), соединяют точку Q_0 с точками отрезка G_0M_0 границы мертвой зоны.

Направление скорости в каждой точке этой области совпадает с направлением скорости в некоторой точке указанного отрезка G_0M_0 , т. е. с направлением касательной к этому отрезку. Линии равного $\arg w(z)$ в области, ограниченной на фиг. 7 линией $A_1M_1B_1B_0H_0P_0Q_0A_0'$ или на фиг. 8 линией $A_1M_1B_1B_0H_0P_0N_0A_0'$ (безударный вход), соединяют каждая или точку P_0 , или Q_0 с некоторой точкой отрезка M_1B_1 или B_0H_0 границы мертвой зоны.

Направление скорости в каждой ее точке совпадает с направлением скорости в некоторой точке этого отрезка, т. е. с касательной к нему.



Фиг. 9



Фиг. 10

На границе между этими областями направление скорости совпадает с направлением скорости на ∞ до встречи с решеткой.

3°. *Линии равного модуля функции $w(z)$* . Всякая линия равного модуля функции $w(z)$, расположенная в области, ограниченной линией $A_0M_0G_0Q_0A_0'$ на фиг. 7, соединяет некоторую точку линии Q_0G_0 с некоторой точкой линии $Q_0A_0'A_0M_0$, чем и определяется их конфигурация.

В области, ограниченной линией $A_1M_1B_1B_0H_0P_0Q_0A_0'$, расположение их несколько сложнее в силу наличия двух нулей функции $w(z)$ на контуре.

Изучим отдельно эти линии в областях, на которые только что указанная область делится линией равного аргумента N_0L , не изображенной на фиг. 7, в виду неопределенности положения точки L —либо на отрезке M_1B_1 , либо на отрезке B_0H_0 , либо, наконец, в точке B_0 , или, что то же самое, в точке B_1 .

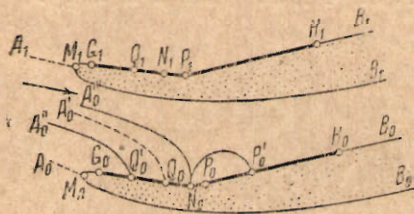
Каждая линия равного модуля функции $w(z)$, расположенная в области, ограниченной линией $A_1M_1LN_0Q_0A_0'$, соединяет некоторую точку линии Q_0N_0L с некоторой точкой линии $Q_0A_0'A_1M_1$.

Каждая линия равного модуля функции $w(z)$, расположенная в области, ограниченной линией $N_0P_0H_0LN_0$, соединяет некоторую точку линии P_0H_0 с некоторой точкой линии P_0N_0L .

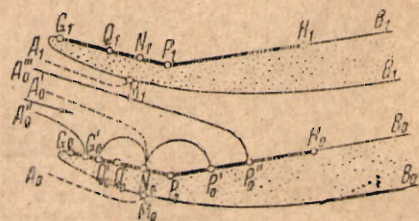
Отметим в той и другой области линию равного модуля, проходящую через точку N_0 . Она состоит из двух частей, одна из которых соединяет точку N_0 с некоторой точкой N' линии $Q_0A_0'A_1M_1$, другая соединяет точку N_0 с некоторой точкой линии P_0H_0 . Возможны три случая: когда точка N' находится на линии Q_0A_0' , когда она находится на линии A_1M_1 и когда она совпадает с точкой A_1 , или, что то же самое, с точкой A_0' (фиг. 9, 10 и 11). Пунктиром изображены линии равного $\arg w(z)$.

В случае безударного входа расположение линий равного модуля $w(z)$ определяется линиями равного $\arg w(z)$, изображенными на фиг. 12 пунктиром. На фиг. 12 всякая линия равного модуля $w(z)$, лежащая в области, ограниченной линией $Q_0 N_0 A_0' A_0 M_0 G_0 Q_0$, соединяет некоторую точку линии $Q_0 N_0 A_0' A_0 M_0$ с некоторой точкой линии $Q_0 G_0$, чем и определяется их конфигурация.

Всякая линия равного модуля $w(z)$, лежащая в области, ограниченной линией $P_0 N_0 A_0' A_1 M_1 B_1 B_0 H_0 P_0$, соединяет некоторую точку линии $P_0 N_0 A_0' A_1 M_1$ с некоторой точкой линии $P_0 H_0$, чем их конфигурация определяется.



Фиг. 11



Фиг. 12

Отметим ту линию равного модуля $w(z)$, которая проходит через точку N_0 . В силу только что указанной конфигурации изучаемых линий она соединяет точку N_0 с некоторой точкой P_0' отрезка $P_0 H_0$ и с некоторой точкой Q_0' отрезка $Q_0 G_0$.

Отметим еще те линии равного модуля функции $w(z)$, для которых $|w(z)| = |w(-\infty + iy)|$. В силу той же конфигурации линий равного модуля $w(z)$ их будет две. Одна из них соединяет точку $z = -\infty + iy$ с некоторой точкой P_0'' отрезка $P_0' H_0$ и лежит внутри области, ограниченной линией $P_0 N_0 A_0' A_1 M_1 B_1 B_0 H_0 P_0$, другая соединяет ту же точку с некоторой точкой G_0' отрезка $Q_0' G_0$ и лежит в области, ограниченной линией $Q_0 G_0 M_0 A_0 A_0' N_0 Q_0$. Таким образом расположение этих линий равного модуля функции $w(z)$ на фиг. 12 совпадает с расположением их на фиг. 9.

4°. *Распределение давлений в окрестности обтекаемой решетки.* В силу уравнения Бернулли изобары изучаемого потока тождественны с линиями равного модуля функции $w(z)$, так как она отличается от скорости жидкости только знаком аргумента. Но распределение давлений по этим линиям будет противоположно распределению скоростей, т. е. там, где скорость жидкости меньше, давление больше. Таким образом давление жидкости будет наибольшим в точках P_0 и Q_0 , где скорость жидкости равна нулю.

Обозначим это давление через p_0 . Тогда

$$p_0 > p_1 > p_2 \quad (2.11)$$

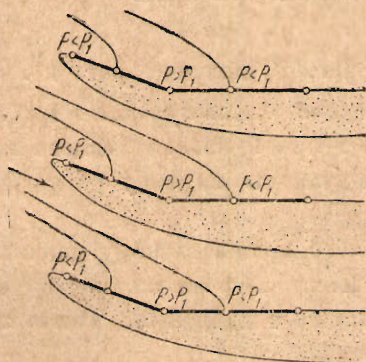
где p_1 — давление жидкости на бесконечности до встречи потока с решеткой, p_2 — давление на бесконечности после этой встречи.

Разделим всю область, заполненную потоком, на область, где $p < p_1$, и область, где $p > p_1$. Первую будем называть областью пониженного давления, вторую — областью повышенного давления.

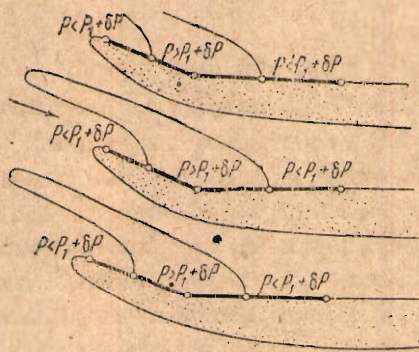
На фиг. 9 и 12 область повышенного давления ограничена частью $G_0'P_0''$ обтекаемой пластинки и линиями $G_0'A_0''$ и $P_0''A_0'''$.

В этом случае каждому звену решетки соответствует область повышенного давления, которая тянется от звена до бесконечности навстречу потоку. Остальная часть потока будет областью пониженного давления.

Таким образом, область пониженного давления распадается на бесконечное множество криволинейных полос, тянущихся каждая от $x = -\infty$ до $x = +\infty$ и разделенных полосами, состоящими каждая из одной области повышенного давления и области неподвижности жидкости (мертвой зоны).



Фиг. 13



Фиг. 14

Распределение давлений на фиг. 10 и 11 отличается от только что описанного лишь тем, что область повышенного давления, соответствующая данному звену решетки, распадается в этом случае на две области. На фиг. 10 одна из них ограничена линией $A_0''G_0'Q_0'A_0'''A_0''$, другая ограничена линией $N_0'P_0P_0''N_0'$.

На фиг. 11 одна из них ограничена линией $A_0''Q_0'Q_0N_0A_0'''A_0''$, другая — линией $N_0P_0P_0'N_0$.

Разница в расположении изобар на фиг. 9 и 12 и на фиг. 10 и 11 не существенна, если мы изучаем давления и скорости до встречи потока с решеткой и после встречи потока с решеткой, не рассматривая детально изменений давления и скорости внутри самой решетки. Поскольку при применении изложенной теории имеет место именно такой подход к полученным результатам, можно считать расположение изобар на фиг. 10 и 11 подобным расположению их на фиг. 9 и 12 и в дальнейшем ограничиться рассмотрением этого последнего случая. В этом случае схема потока принимает вид, изображенный на фиг. 13.

Области повышенного и пониженного давления отмечены на фиг. 13 надписями $p > p_1$ и $p < p_1$. Области неподвижности заштрихованы.

Относительно линий, разграничивающих области повышенного и пониженного давления, следует заметить, что фиг. 13 изображает только качественное их строение. Например, на фиг. 13 они изображены не имеющими точек перегиба. В действительности весьма вероятно наличие этих точек.

Следует еще заметить, что $p \rightarrow p_1$ при $x \rightarrow -\infty$ и, таким образом, разность между давлением в области повышенного давления и в области пони-

женного давления стремится при этом к нулю. Остается лишь открытым вопрос, на каком расстоянии от решетки эта разность становится настолько малой, чтобы ею можно было пренебречь.

В целях придания большей наглядности полученным результатам полезно разделить область потока на область повышенного давления и область пониженного давления несколько иначе, а именно: считать областью повышенного давления область, где $p > p_1 + \delta p$, а областью пониженного давления область, где $p < p_1 + \delta p$, обозначая через δp некоторое, достаточно малое, выбранное произвольно и в дальнейшем фиксированное число. Тогда разграничивающие эти области изобары будут иметь уравнение

$$p = p_1 + \delta p,$$

а не $p = p_1$, как было прежде. Тогда вместо фиг. 13 получим фиг. 14.

5°. *Связь полученных результатов с теорией кавитирующего гребного винта.* Сопоставляя полученные результаты с теорией кавитирующего гребного винта видим, что они указывают на следующую картину распределения давлений в его окрестности:

1) Упор винта и сопротивление жидкости его вращательному движению получаются не за счет скачка давления до и после встречи жидкости с винтом, а за счет наличия отдельных зон повышенного давления. Такая зона существует около каждой отдельной лопасти винта.

2) Эти зоны повышенного давления начинаются каждая около той стороны лопасти, которая омывается жидкостью, и тянутся в ту сторону, откуда на лопасти набегаёт поток жидкости.

Давление является наибольшим у самой поверхности лопасти. (Вопрос о том, как быстро падает давление при удалении от поверхности лопасти, здесь не рассматривался.)

3) На некотором расстоянии от винта можно считать давление жидкости постоянным, причем давление p_1 до встречи потока с винтом больше, чем давление p_2 после встречи потока с винтом.

Давление p_2 после встречи потока с винтом равно давлению паров жидкости внутри пустот, образовавшихся на тыльных сторонах лопастей винта. Надо полагать, что это давление можно принять равным нулю.

Поступила в редакцию

20 IX 1943

N. V. LAMBIN.—DISCONTINUOUS FLOW PAST A LATTICE OF BROKEN PROFILES

The paper is concerned with the problem of determining pressure and velocity distributions which the steady flow of an ideal incompressible fluid exerts on a lattice of broken rigid profiles.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламбин Н. В. Отрывное обтекание решетки из ломаных профилей. ДАН СССР. 1943. Т. XLI. № 4.
2. Поздюнин В. Л. О работе суперкавитирующих винтов. ДАН СССР. 1943. XXXIX. № 8.