

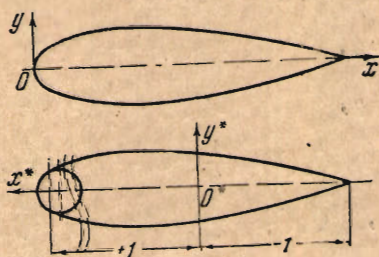
ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Я. М. СЕРЕБРЬСКИЙ

(Москва)

В работе рассматривается метод расчета продольного и поперечного обтекания тел вращения потоком идеальной несжимаемой жидкости, который дает возможность построить с большой точностью распределение давлений на поверхности тела вращения, а также поле скоростей вокруг него. Метод может быть использован для расчета обтекания тел дирижабельной формы, авиабомб, плавных носовых обводов фюзеляжей и т. д.

1. Основные уравнения. Рассмотрим плоскость меридионального сечения тела вращения и совершим в этой плоскости переход от прямоугольных декартовых координат к эллиптическим координатам. Обычно координаты обвода тела вращения задаются в прямоугольной декартовой системе xOy , причем значения x отсчитываются от крайней передней точки (носика) тела вращения (фиг. 1). Предварительно совершим переход к новой прямоуголь-



Фиг. 1

ной декартовой системе координат x^*Oy^* (фиг. 1), связанной с системой xOy формулами

$$x^* = 1 - \frac{x}{2a} + \frac{\rho_1}{4a}, \quad y^* = \frac{y}{2a} \quad (1.1)$$

где

$$a = \frac{l}{\epsilon} \left[100 - \left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\rho_2}{2} \right) \right] \quad (1.2)$$

Все линейные размеры в формулах (1.1), (1.2) берутся в процентах длины тела вращения, а ρ_1 и ρ_2 обозначают, радиусы кривизны носика и хвостика.

Введем эллиптические координаты ψ и θ , пользуясь формулами

$$x^* = \operatorname{ch} \psi \cos \theta, \quad y^* = \operatorname{sh} \psi \sin \theta \quad (1.3)$$

Фокусы эллипсов располагаются в точках, лежащих посредине радиусов кривизны носика и хвостика, и имеют координаты $x^* = \pm 1$, $y^* = 0$.

Решение системы (1.3), т. е. определение ψ и θ , существенно упрощается, если использовать то обстоятельство, что для тонких тел ψ мало и значение $\operatorname{ch} \psi$ близко к единице¹.

Рассмотрим случай продольного обтекания, когда скорость набегающего потока направлена параллельно оси вращения тела. Введем обозначения

$$\lambda = \operatorname{ch} \psi, \quad \mu = \cos \theta \quad (1.4)$$

В случае продольного обтекания уравнение для потенциала скоростей Φ в координатах λ, μ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[(\lambda^2 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right] = 0 \quad (1.5)$$

Известно, что общее решение этого уравнения может быть представлено в виде ряда [2], [3], [4]

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\mu) Q_n(\lambda) \quad (1.6)$$

где $P_n(\mu)$ — функции Лежандра 1-го рода, а $Q_n(\lambda)$ — функции Лежандра 2-го рода (присоединенные функции Лежандра) [5]. Этот ряд сходится вне некоторого эллипсоида, проведенного через особую точку, расположенную внутри тела и наиболее удаленную от оси вращения (имеющую наибольшую координату λ). В частности, если особенности расположены на отрезке оси $-1 \leq x^* \leq +1$, ряд сходится во всем пространстве вне этого отрезка².

Приведем формулы [5] для $P_n(\mu)$ и $Q_n(\lambda)$:

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1, & P_2(\mu) &= \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \\ P_1(\mu) &= \mu, & P_3(\mu) &= \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu), \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} Q_0(\lambda) &= \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1}, & Q_2(\lambda) &= \frac{1}{4}(3\lambda^2 - 1) \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} - \frac{3}{2}\lambda, \\ Q_1(\lambda) &= \frac{\lambda}{2} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} - 1, & Q_3(\lambda) &= \frac{1}{4}(5\lambda^3 - 3\lambda) \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} - \frac{5}{2}\lambda^2 + \frac{2}{3}, \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

Потенциал скоростей Φ и функция тока Ψ связаны соотношениями

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = (1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = -(\lambda^2 - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$$

Используя дифференциальное уравнение функций Лежандра, легко получить выражение для

$$\Psi = \frac{1}{2} (1 - \mu^2) (\lambda^2 - 1) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 A_n}{n(n+1)} \frac{dP_n}{d\mu} \frac{dQ_n}{d\lambda} + 1 \right]$$

¹ В § 3 нашей работы [4] приводится упрощенный метод определения эллиптических координат.

² Представляет интерес вопрос о характере сходимости этого ряда в случае тел, имеющих вблизи поверхности особенность, которая приводит к местному резкому изменению направления наклона касательной к обводу.

Здесь принято, что скорость набегающего потока $v_\infty = 1$. На поверхности тела $\Psi = 0$, и, следовательно, на поверхности тела выполняется соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 A_n}{n(n+1)} \frac{dP_n}{d\mu} \frac{dQ_n}{d\lambda} + 1 = 0 \quad (1.9)$$

Приведем формулы для $dP_n/d\mu$ и $dQ_n/d\lambda$

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{d\mu} &= 0, & \frac{dQ_0}{d\lambda} &= \frac{1}{1-\lambda^2} \\ \frac{dP_1}{d\mu} &= 1, & \frac{dQ_1}{d\lambda} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \\ \frac{dP_2}{d\mu} &= 3\mu, & \frac{dQ_2}{d\lambda} &= \frac{3}{2} \lambda \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} + \frac{3\lambda^2-2}{1-\lambda^2} \\ \frac{dP_3}{d\mu} &= \frac{1}{2} (15\mu^2-3), & \frac{dQ_3}{d\lambda} &= \frac{3}{4} (5\lambda^2-1) \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} + \frac{15\lambda^3-13\lambda}{2(1-\lambda^2)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Если коэффициенты A_n известны, то местная скорость v в любой точке с координатами λ, μ как на поверхности тела, так и в поле около него находится по формуле

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 &= \frac{1}{\lambda^2-\mu^2} \left\{ (\lambda^2-1) \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{dQ_n}{d\lambda} P_n(\mu) + \mu \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1-\mu^2) \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_n(\lambda) \frac{dP_n}{d\mu} + \lambda \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Рассмотрим задачу о поперечном обтекании тела вращения, полагая, что скорость набегающего потока направлена перпендикулярно оси вращения тела. В этом случае уравнение для потенциала скоростей решается с помощью обобщенных функций Лежандра 1-го порядка. Можно показать [3], что при поперечном обтекании на поверхности тела должно выполняться соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\frac{d(\lambda\mu)}{d\mu} \frac{dP_n}{d\mu} \frac{dQ_n}{d\lambda} - n(n+1) \frac{d}{d\mu} (P_n Q_n) \right] = -\frac{d(\lambda\mu)}{d\mu} \quad (1.12)$$

Если известны коэффициенты C_n , то можно найти распределение скоростей [3]. Кроме того, зная A_n и C_n , легко получить распределение так называемой «перерезывающей силы» при любом угле атаки и т. п.

2. Разложение функций Лежандра. Для $\lambda = \text{ch } \psi$ имеем разложение

$$\lambda = 1 + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^4}{24} + \dots \quad (2.1)$$

В случае тонких тел (при небольших значениях ψ) можно ограничиться двумя первыми членами в формуле (2.1).

При разложении функций Лежандра особое внимание должно быть обращено на разложение $dQ_n/d\lambda$ — производных присоединенных функций Лежандра; которые играют основную роль при решении краевой задачи (1.9).

Приведем необходимые для дальнейшего вспомогательные разложения

$$\frac{1}{1-\lambda^2} = -\frac{1}{\psi} + \frac{1}{3} - \frac{\psi^2}{15} + \dots, \quad \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \ln \frac{2}{\psi} + \frac{\psi^2}{12} + \dots \quad (2.2)$$

Очевидно, что в этих формулах для сравнительно небольших значений ψ ($0 < \psi < 0.4$) величина $1/\psi^2$ и величина $\ln 2/\psi$ представляют собой главные члены разложения; а остальные слагаемые являются небольшими поправками.

Если воспользоваться формулой (2.2), то можно получить разложения для Q_n и $dQ_n/d\lambda$

$$\begin{aligned} Q_0 &= \ln \frac{2}{\psi} + \frac{\psi^2}{12} + \dots \\ Q_1 &= \ln \frac{2}{\psi} - 1 + \frac{\psi^2}{2} \ln \frac{2}{\psi} + \frac{\psi^2}{12} + \dots \\ Q_2 &= \ln \frac{2}{\psi} - \frac{3}{2} + \frac{3\psi^2}{2} \ln \frac{2}{\psi} - \frac{2\psi^2}{3} + \dots \\ Q_3 &= \ln \frac{2}{\psi} - \frac{11}{6} + 3\psi^2 \ln \frac{2}{\psi} - \frac{29\psi^2}{12} + \dots \\ \frac{dQ_0}{d\lambda} &= -\frac{1}{\psi^2} + \frac{1}{3} - \dots \\ \frac{dQ_1}{d\lambda} &= -\frac{1}{\psi^2} + \ln \frac{2}{\psi} - \frac{1}{3} + \dots \\ \frac{dQ_2}{d\lambda} &= -\frac{1}{\psi^2} + 3 \ln \frac{2}{\psi} - \frac{17}{6} + \dots \\ \frac{dQ_3}{d\lambda} &= -\frac{1}{\psi^2} + 6 \ln \frac{2}{\psi} - \frac{47}{6} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для разложений при больших значениях n имеются рекуррентные формулы.

$$\begin{aligned} (n+1)Q_{n+1} &= (2n+1)\lambda Q_n - nQ_{n-1} \\ (n+1)\frac{dQ_{n+1}}{d\lambda} &= (2n+1)\left(\lambda \frac{dQ_n}{d\lambda} + Q_n\right) - n\frac{dQ_{n-1}}{d\lambda} \end{aligned} \quad (2.4)$$

У всех Q_n и $dQ_n/d\lambda$ первые члены разложения не зависят от n . Примем, что

$$Q_n = \ln \frac{2}{\psi} + \gamma_n, \quad \frac{dQ_n}{d\lambda} = -\frac{1}{\psi^2} + \delta_n \quad (2.5)$$

Чем меньше ψ , тем меньше γ_n и δ_n по сравнению с первыми членами разложения. Для дальнейшего удобно также ввести $\bar{\delta}_n$ по формуле

$$\frac{dQ_n}{d\lambda} = -\frac{1}{\psi^2} + \ln \frac{2}{\psi} - \frac{1}{3} + \bar{\delta}_n \quad (2.6)$$

На фиг. 2 даны графики функции $\delta_n(\psi)$ для различных n , на фиг. 3 даны графики функции Q_n .

Из теории функций Лежандра [6] известно, что $P_n(\cos \bar{\theta})$ можно представить в виде тригонометрического полинома

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left[2 \cos n\theta + \frac{1 \cdot (2n)}{2 \cdot (2n-1)} 2 \cos (n-2)\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2n)(2n-2)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} 2 \cos (n-4)\theta + \dots \right] \end{aligned}$$

Таким образом $P_n(u)$, dP_n/du и их линейные комбинации можно всегда

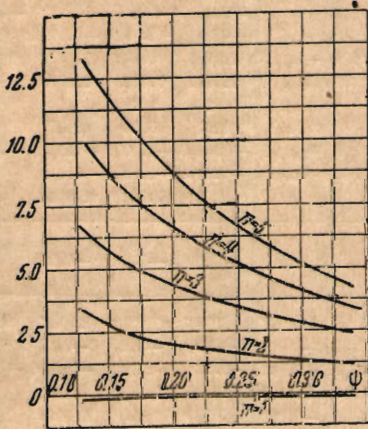
заменить конечным тригонометрическим полиномом. В дальнейшем нам придется представлять различные функции $F(\theta)$ в виде

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{dP_n}{d\mu} \tag{2.7}$$

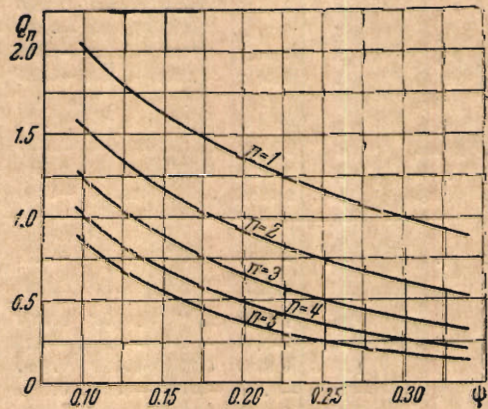
Однако в связи с тем, что приближенные методы разложения в тригонометрические ряды достаточно хорошо разработаны, мы предпочитаем раскладывать $F(\theta)$ в обычный тригонометрический ряд

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n-1)\theta \tag{2.8}$$

а затем, ограничиваясь некоторым конечным $n = N$, переходить от коэффициен-



Фиг. 2



Фиг. 3

тов b_n к коэффициентам a_n . Связь между a_n и b_n находится из тождества:

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^N a_n \frac{dP_n}{d\mu} = \sum_{n=1}^N b_n \cos(n-1)\theta \tag{2.9}$$

Формулы для перехода от b_n к a_n получаются очень простыми. Приведем, например, формулы для случая $N=5$

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + \frac{9}{4} a_3 + \frac{225}{64} a_5, & b_2 &= 3a_2 + \frac{45}{8} a_4, & b_3 &= \frac{45}{4} a_3 + \frac{405}{46} a_5 \\ b_4 &= \frac{35}{8} a_4, & b_5 &= \frac{315}{64} a_5 \\ a_1 &= b_1 - \frac{3}{5} b_3 + \frac{3}{35} b_5, & a_2 &= \frac{1}{3} b_2 - \frac{3}{7} b_4, & a_3 &= \frac{4}{45} b_3 - \frac{46}{45} b_5 \\ a_4 &= \frac{8}{35} b_4, & a_5 &= \frac{64}{315} b_5 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Для получения связи при больших значениях N можно пользоваться либо непосредственно тождеством (2.9), либо рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} (n+1)P_{n+1} &= (2n+1)\mu P_n - nP_{n-1} \\ (n+1)\frac{dP_{n+1}}{d\mu} &= (2n+1)\left(\mu\frac{dP_n}{d\mu} + P_n\right) - n\frac{dP_{n-1}}{d\mu} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для удобства расчетов в табл. 1 даны P_n и $dP_n/d\mu$ для значений μ , характеризующих достаточно подробно обвод тела вращения.

3. Продольное обтекание тел вращения. Решение задачи о продольном обтекании сводится к решению уравнения (1.9), т. е. к определению коэффициентов A_n . Если использовать (2.5), то уравнение (1.9) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n}{n(n+1)} \frac{dP_n}{d\mu} \left(-\frac{1}{\psi^2} + \delta_n \right) + 1 = 0 \tag{3.1}$$

Таблица 1

μ	1	0.95	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0
θ°	0°	$18^\circ 12'$	$25^\circ 50'$	$36^\circ 52'$	$45^\circ 34'$	$53^\circ 08'$	$60^\circ 00'$	$66^\circ 25'$	$72^\circ 32'$	$78^\circ 27'$	$84^\circ 15'$	$90^\circ 00'$
P_1	1	0.95	0.80	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0
P_2	1	0.8538	0.7135	0.4600	0.3350	0.0400	-0.1250	-0.3600	-0.3650	-0.4400	-0.4850	-0.5000
P_3	1	0.7134	0.4730	0.0800	-0.1930	-0.3600	-0.4375	-0.4400	-0.3825	-0.2800	-0.1475	0
P_4	1	0.5541	0.2079	-0.2330	-0.4120	-0.4080	-0.2890	-0.1130	0.0729	0.0232	0.3379	0.3750
P_5	1	0.3727	-0.0411	-0.3995	-0.3652	-0.1523	0.0898	0.2706	0.3464	0.3075	0.1788	0
$dP_1/d\mu$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$dP_2/d\mu$	3	2.85	2.70	2.40	2.10	1.80	1.50	1.50	1.90	0.60	0.30	0
$dP_3/d\mu$	6	5.2688	4.5750	3.3000	2.1750	1.3000	0.3750	-0.3000	-0.8250	-1.2000	-1.4250	-1.5000
$dP_4/d\mu$	10	9.9328	6.0075	2.9600	0.7525	-0.7200	-1.5625	-1.8800	-1.7775	-1.3600	-0.7325	0
$dP_5/d\mu$	15	10.2560	5.9464	1.2030	-1.5336	-2.4720	-2.2266	-1.3170	-0.1686	0.8880	1.6164	1.8750

μ	-1	-0.95	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10	0
θ°	180°	$161^\circ 48'$	$154^\circ 10'$	$143^\circ 08'$	$134^\circ 26'$	$126^\circ 52'$	$110^\circ 00'$	$113^\circ 35'$	$107^\circ 28'$	$101^\circ 33'$	$95^\circ 45'$	$90^\circ 00'$
P_1	-1	-0.95	-0.90	-0.80	-0.70	-0.60	-0.50	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10	0
P_2	1.0000	0.8538	0.7150	0.4600	0.2350	0.0400	-0.1250	-0.2600	-0.3650	-0.4400	-0.4850	-0.5000
P_3	-1.0000	-0.7134	-0.4725	-0.0800	0.1925	0.3600	0.4375	0.4400	0.3825	0.2800	0.1475	0
P_4	1.0000	0.5541	0.2079	-0.2330	-0.4120	-0.4080	-0.2890	-0.1130	0.0729	0.2300	0.3379	0.3750
P_5	-1.0000	-0.3727	0.0411	0.3995	0.3652	0.1523	-0.0898	-0.2706	-0.3454	-0.3075	-0.1788	0
$dP_1/d\mu$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$dP_2/d\mu$	-3	-2.85	-2.70	-2.40	-2.10	-1.80	-1.50	-1.50	-0.90	-0.60	-0.30	0
$dP_3/d\mu$	6.0000	5.2688	4.5750	3.3000	2.1750	1.3000	0.3750	-0.3000	-0.8250	-1.2000	-1.4250	-1.5000
$dP_4/d\mu$	-10.0000	-9.9328	-6.0075	-2.9600	-0.7525	0.7200	1.5625	1.8800	1.7775	1.3600	0.7325	0
$dP_5/d\mu$	15.0000	10.2560	5.9464	1.2030	-1.5336	-2.4720	-2.2266	-1.3170	-0.1686	0.8880	1.6164	1.8750

Мы уже указали, что для тонких тел величина $1/\psi^2$ является главной частью разложения $dQ_n/d\lambda$ и что чем меньше ψ , тем меньше $|\delta_n|$ по сравнению с $1/\psi^2$. Примем, что в первом приближении можно пренебречь величиной δ_n или, точнее, произведем $\frac{2A_n}{n(n+1)} \frac{dP_n}{d\mu} \delta_n$. Тогда уравнение

$$\psi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{dP_n}{d\mu} \quad \left(a_n = \frac{2A_n}{n(n+1)} \right) \tag{3.2}$$

дает приближенное решение задачи о продольном обтекании тонкого плавного тела вращения в эллиптических координатах.

Дальнейшее сводится к разложению функции ψ^2 в тригонометрический ряд

$$\psi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n-1)\theta \tag{3.3}$$

и переходу от коэффициентов b_n к коэффициентам a_n .

Для более толстых тел (ψ порядка 0.2—0.4) можно получить еще лучшее первое приближение, если для $aQ_n/d\lambda$ воспользоваться формулой (2.6). Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n}{n(n+1)} \frac{dP_n}{d\mu} \left(-\frac{1}{\psi^2} + \ln \frac{2}{\psi} - \frac{1}{3} + \bar{\delta}_n \right) + 1 = 0 \quad (3.4)$$

Введем функцию

$$M(\psi) = - \left(-\frac{1}{\psi^2} + \ln \frac{2}{\psi} - \frac{1}{3} \right)^{-1} = \psi^2 + \psi^4 \left(\ln \frac{2}{\psi} - \frac{1}{3} \right) + \psi^6 \left(\ln \frac{2}{\psi} - \frac{1}{3} \right)^2 + \dots \quad (3.5)$$

На фиг. 4 дан график функции $M(\psi) - \psi^2$ по ψ .

Полагая в первом приближении $\bar{\delta}_n = 0$, получаем в этом случае вместо (3.2) уравнение

$$M(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{dP_n}{d\mu} \quad \left(a_n = \frac{2A_n}{n(n+1)} \right) \quad (3.6)$$

Дальнейшее также сводится к разложению функции $M(\psi)$ в тригонометрический ряд.

Как показали расчеты, для плавных и не очень толстых тел вращения достаточной для всех практических целей точностью можно ограничиться первым приближением. Нахождение

второго приближения сводится к введению небольших поправок в первое приближение. Дадим формулы для определения этих поправок.

Пусть a_{n1} значение коэффициентов a_n в первом приближении, а Δa_n искомая поправка, т. е.

$$a_n = a_{n1} + \Delta a_n \quad (3.7)$$

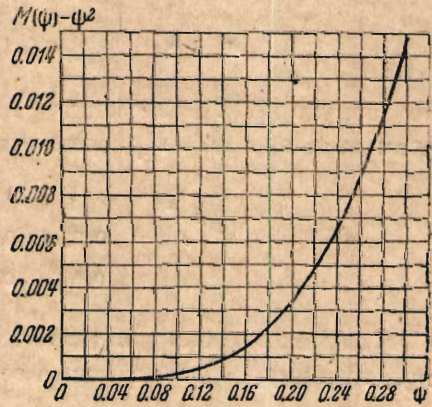
Тогда, используя соотношение (1.9) и пренебрегая произведениями $\bar{\delta}_n \Delta a_n$, получим

$$M(\psi) \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \frac{dP_n}{d\mu} \bar{\delta}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta a_n \frac{dP_n}{d\mu} \quad (3.8)$$

По существу дело сводится к определению функции

$$\Delta M(\psi) = M(\psi) \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \frac{dP_n}{d\mu} \bar{\delta}_n \quad (3.9)$$

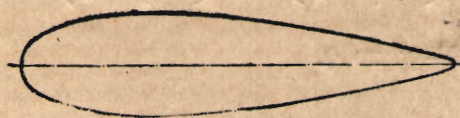
и последующему разложению ее в ряд для определения Δa_n . Геометрически введение поправки эквивалентно тому, что расчет по первому приближению производится для контура, несколько отличающегося от заданного.



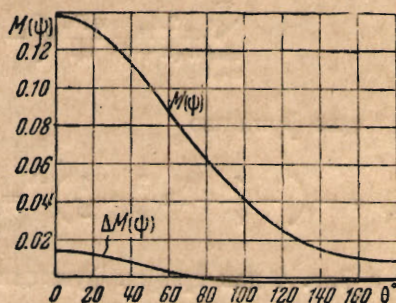
Фиг. 4

В случае необходимости поправка на второе приближение может быть введена. Для оценки второго приближения рассмотрим в качестве примера расчет обтекания тела вращения дирижабельной формы (фиг. 5).

На фиг. 6 приводится вычисленная по формуле (3.6) кривая $M(\psi)$, которую нужно разложить в тригонометрический ряд, и кривая $\Delta M(\psi)$, найденная



Фиг. 5



Фиг. 6

по формуле (3.9). Разложением $\Delta M(\psi)$ в тригонометрический ряд были получены значения ΔA_n . Приводим численные значения A_{n1} и ΔA_n :

n	1	2	3	4	5
A_{n1}	0.0562	0.0623	0.0171	0.0007	0.00005
ΔA_n	0.0001	0.0006	0.00015	0.00002	0

Получилось, что для тела, имеющего сравнительно большую относительную толщину, ΔA_n невелики, а соответствующие им поправки при определении скорости пренебрежимо малы (порядка 0.1—0.3% скорости).

На фиг. 7 показана кривая распределения давления по поверхности для рассмотренного здесь примера.

Таким образом с достаточной для практических целей точностью можно в случае тонких плавных тел вращения ограничиться расчетом по первому приближению.

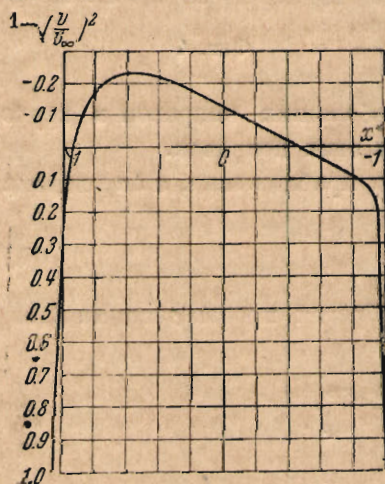
Заметим, что и для более толстых тел (ψ порядка 0.2—0.5) первое приближение, исходящее из разложения (2.6), дает вполне удовлетворительную точность, так как $\bar{\delta}_n$ мало (например, $\bar{\delta}_2 = 2 \ln(2/\psi) - 15/16$ и т. д.).

Если ограничиться первым приближением, то отпадают трудности, которые всегда

получаются в осесимметричной задаче при построении контура по заданным A_n .

Если принять первое приближение в форме (3.2), то с большой точностью можно считать, что при увеличении относительной толщины тела вращения в k раз коэффициенты A_n увеличиваются в k^2 раз.

Используя этот результат, можно существенно упростить расчет серии тел с различной относительной толщиной. Доказательство предложения о влиянии



Фиг. 7

относительной толщины и оценка погрешности могут быть проведены методом, аналогичным тому, который применялся при решении плоской задачи [1].

4. Поперечное обтекание тел вращения. Рассматривая задачу о поперечном обтекании тел вращения, представим уравнение (1.12) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\frac{dP_n}{d\mu} \frac{dQ_n}{d\lambda} - n(n+1) \frac{1}{d(\lambda\mu)/d\mu} \frac{d}{d\mu} (P_n Q_n) \right] - 1 = 0 \quad (4.1)$$

В случае обтекания тонкого плавного тела будем пользоваться формулой (2.5). Оценим порядок величины

$$L_n = C_n n(n+1) \frac{1}{d(\lambda\mu)/d\mu} \frac{d}{d\mu} (P_n Q_n) = C_n n(n+1) \frac{1}{d(\lambda\mu)/d\mu} \left(\frac{dP_n}{d\mu} Q_n + P_n \frac{dQ_n}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} \right)$$

Оценим величину $\frac{d\lambda}{d\mu} \approx \frac{d(\psi^2/2)}{d\mu}$. Пусть $\psi^2 = a_1 + a_2 \cos \theta + \dots$. Тогда имеем $\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{a_2}{2} + \dots$. Но, как показали расчеты, порядок величины a_2 не превышает $\left(\frac{\psi^2}{2}\right)_{\max}$. Следовательно, $\frac{d\lambda}{d\mu}$ оказывается величиной порядка $\left(\frac{\psi^2}{4}\right)_{\max}$, а произведение $\frac{dQ_n}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu}$ получается величиной порядка меньшего, чем δ_n , так как оно не имеет первого логарифмического члена. Производная $\frac{d(\lambda\mu)}{d\mu} = 1 + \mu \frac{d\lambda}{d\mu}$ очень близка к единице. Далее, согласно (2.5) величина $Q_n = \ln \frac{2}{\psi} + \gamma_n$, т. е. Q_n одного порядка с δ_n . При оценке всей величины L_n нужно учесть, что коэффициенты C_n убывают значительно быстрее, чем A_n .

Таким образом, полученная здесь грубая оценка позволяет сделать вывод, что величина L_n имеет тот же порядок, что и δ_n . Это качественное заключение хорошо подтвердилось расчетами.

При анализе продольного обтекания тонкого тела мы пренебрегали в первом приближении величинами порядка δ_n . Построим первое приближение для поперечного обтекания, также исходя из предположения, что величинами порядка δ_n можно пренебречь. Чем тоньше тело, тем более справедливо такое предположение.

Тогда вместо (4.1) получим уравнение

$$\psi^2 = - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{dP_n}{d\mu} \quad (4.3)$$

для приближенного решения задачи о поперечном обтекании тонкого плавного тела вращения в эллиптических координатах.

Оказывается, что коэффициенты A_n продольного и C_n поперечного обтекания тонкого тела вращения связаны между собой простым соотношением, имеющим вид

$$C_n = - \frac{2A_n}{n(n+1)} \quad (4.4)$$

Определение второго приближения сводится к введению небольшой поправки к первому приближению. Укажем, каким образом вводится эта поправка. Пусть C_{n1} величина коэффициентов C_n в первом приближении. Обозначим

$$C_n = C_{n1} + \Delta C_n \quad (4.5)$$

Пренебрегая членами порядка $\Delta C_n \delta_n$, получаем

$$\psi^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{n1} \left[\frac{dP_n}{d\mu} \delta_n - n(n+1) \frac{1}{d(\lambda\mu)/d\mu} \frac{d}{d\mu} (P_n Q_n) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta C_n \frac{dP_n}{d\mu} \quad (4.6)$$

т. е. дополнительно ищем разложение в тригонометрический ряд известной функции, стоящей в левой части уравнения (4.6).

В случае поперечного обтекания тонких плавных тел вращения с достаточной для целей практики точностью можно ограничиться расчетом по первому приближению.

Поступила в редакцию
23 VI 1943.

J. M. SEREBRIJSKY. — FLOW PAST BODIES OF REVOLUTION

An approximate method is considered in this work which permits the construction of the distribution of pressures of an incompressible liquid on the surface of a body of revolution. The same method may be used to construct a field of flows velocities for this flow.

ЛИТЕРАТУРА

1. С е р е б р и й с к и й Я. М. Обтекание крылового профиля произвольной формы. Инженерный сборник Ин-та механики АН СССР. Т. III. Вып. 1.
2. L a m b. Hydrodynamics. Cambridge. 1924.
3. К а р л а н С. Potential Flow about Elongated Bodies of Revolution. Rep. NACA. 1935. № 516.
4. S m i t h R. H. Longitudinal Potential Flow about an Arbitrary Body of Revolution with Application to the Airship Acron. J. Aeronautical Sciences. 1935. Vol. 3. № 1.
5. W h i t t a k e r, W a t s o n. A Course of Modern Analysis. Cambridge. 1920.