

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ НА ИНДУКТИВНЫЕ СКОРОСТИ КРЫЛА И ВИНТА

Л. А. СИМОНОВ и С. А. ХРИСТИАНОВИЧ

(Москва)

При большой скорости потока, набегающего на тело, поле скоростей вокруг него изменяется с числом Маха вследствие сжимаемости воздуха. В частности, под влиянием сжимаемости воздуха могут изменяться индуктивные скорости крыла и винта.

Изучению влияния сжимаемости воздуха на индуктивные скорости крыла посвящена работа Прандтля^[1] «Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammendrückbaren Medium» и работа Шлихтинга^[2].

Прандтль в своем исследовании предложил общий метод решения задачи о движении крыла при наличии сжимаемости воздуха. Используя неподвижную относительно потока систему координат, Прандтль приводит уравнения движения к волновому уравнению. При решении задачи используются свойства потенциалов движущихся источников. Этим методом Шлихтингом рассмотрена задача о движении крыла в сверхзвуковом потоке. Этот же метод применил Ф. И. Франкль^[3] для решения задачи о влиянии сжимаемости воздуха на индуктивные скорости винта.

Метод Прандтля, позволивший решить задачу о движении крыла при наличии сжимаемости воздуха, при обобщении на другие задачи, например при исследовании индуктивных скоростей винта, оказывается достаточно сложным.

В случае стационарного обтекания дозвуковым потоком (при этом на поверхности обтекаемого тела могут быть местные зоны с сверхзвуковыми скоростями) можно дать весьма простую интерпретацию влияния сжимаемости воздуха на индуктивные скорости вихрей путем обобщения закона Био-Савара, используя для этого линеаризованную систему уравнений, предложенную в свое время Прандтлем и Глауэртом.

Обобщенный закон Био-Савара сразу решает задачу о влиянии сжимаемости на индуктивные скорости в любой точке пространства для вихревой системы крыла или винта с бесконечно большим числом лопастей (вихревую систему такого винта можно рассматривать как стационарную). При вычислении же индуктивных скоростей крыла на несущей линии задача сводится совсем к элементарным соображениям симметрии.

Для винта с конечным числом лопастей обобщенный закон Био-Савара не решает задачи, потому что поле скоростей винта в невращающейся системе координат будет неустановившимся. В этом случае приходится заново рассмотреть уравнения движения в системе координат, связанной с винтом. Сохраняя

в уравнениях движения малые величины первого порядка и пользуясь винтовой симметрией, удастся показать, что индуктивные скорости на несущей нити для винта с конечным числом лопастей в потоке сжимаемого газа определяются так же, как в несжимаемой жидкости.

1. Определение поля скоростей по заданному полю вихрей с учетом наличия влияния сжимаемости воздуха

Найдем, как изменяется из-за влияния сжимаемости воздуха поле скоростей, вызываемое вихревой нитью. В несжимаемой жидкости поле скоростей вихревой нити определяется законом Био-Савара. Задача состоит в том, чтобы показать, какие изменения в закон Био-Савара вносит наличие сжимаемости воздуха.

Обозначим u, v, w проекции вектора скорости на оси прямоугольной системы координат x, y, z .

Уравнение неразрывности с учетом сжимаемости воздуха имеет, как известно, вид

$$(a^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (a^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} + (a^2 - w^2) \frac{\partial w}{\partial z} - uv \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - uw \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - v w \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.1)$$

где a — скорость звука.

Для вихрей имеем уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \omega_x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \omega_y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega_z \quad (1.2)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ представляют собой заданные функции x, y, z , удовлетворяющие условию:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

Величина скорости звука a связана с величиной скорости в данной точке потока соотношением

$$\frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{a_*^2 (\kappa + 1)}{2(\kappa - 1)} \quad (1.4)$$

где a_* — критическая скорость. Критическая скорость является постоянной величиной для всего потока. Уравнения (1.1) и (1.2) представляют собой нелинейную систему уравнений.

Решение задачи определения поля скоростей по данной системе вихрей при наличии сжимаемости воздуха может быть упрощено в случае, относящемся как раз к исследованию крыла и винта. В этом случае поле скоростей определяется, в основном, потоком, набегающим на крыло или винт со скоростью V (скорость потока), и затем добавочными скоростями, вызываемыми присутствием крыла или винта. Эти добавочные скорости во всем потоке, за исключением небольших областей в непосредственной близости от крыла или винта, представляют собой малые величины. При решении вопроса об индуцированных скоростях надо рассматривать вихревую пелену, неограниченно простирающуюся в пространстве, так что влиянием местных зон у поверхности крыла или винта, в котором возмущения значительны, можно пренебречь.

Положим $u = V + u'$ и будем считать, что u', v, ω — малые величины. Тогда уравнение (1.1) может быть упрощено и система уравнений (1.1) и (1.2) может быть представлена в виде

$$(1 - M^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad \left(M = \frac{V}{a_\infty} \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \omega_x, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega_y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \omega_z \quad (1.6)$$

где a_∞ — скорость звука в невозмущенном потоке.

Систему уравнений (1.5) и (1.6) при помощи простого преобразования можно привести к системе уравнений, отвечающей случаю несжимаемой жидкости. Это преобразование позволяет интерпретировать на модели несжимаемой жидкости влияние сжимаемости воздуха.

Положим

$$u' = \frac{\bar{u}}{\sqrt{1 - M^2}}, \quad x' = \frac{x}{\sqrt{1 - M^2}} \quad (1.7)$$

Уравнения (1.5) и (1.6) принимают тогда вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \omega_x; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x'} = \omega_y \sqrt{1 - M^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \omega_z \sqrt{1 - M^2} \quad (1.9)$$

Решение системы уравнений (1.8) и (1.9) соответствует определению поля скоростей по заданной системе вихрей в несжимаемой жидкости.

Легко проверить, что условие, соответствующее условию (1.3), выполняется для правых частей уравнений (1.9). Вместо рассмотренного преобразования можно было бы воспользоваться другим, совершенно ему эквивалентным преобразованием, а именно можно было бы положить

$$x' = x, \quad y' = y \sqrt{1 - M^2}, \quad z' = z \sqrt{1 - M^2} \quad (1.10)$$

Решение системы уравнений (1.8) и (1.9), как известно, имеет вид^[4]

$$\bar{u} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x'}, \quad \omega = \frac{\partial A_y}{\partial x'} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\omega_x(\xi' \sqrt{1 - M^2}, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x' - \xi')^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi' d\eta d\zeta \\ A_y &= \frac{\sqrt{1 - M^2}}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\omega_y(\xi' \sqrt{1 - M^2}, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x' - \xi')^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi' d\eta d\zeta \\ A_z &= \frac{\sqrt{1 - M^2}}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\omega_z(\xi' \sqrt{1 - M^2}, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x' - \xi')^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi' d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (1.12)$$

Интегралы в формулах (1.12) взяты по области τ' , соответствующей в пространстве x, y, z области τ , занятой вихрями.

Рассмотрим случай вихревой нити. Интенсивность вихревой нити пусть равна $\Gamma = \omega \sigma$, где σ — площадь поперечного сечения вихревой трубки. Пусть

s — координата вдоль оси вихревой трубки; тогда

$$\omega_x = \omega \cos(\omega, x) = \omega \frac{d\xi}{ds}, \quad \omega_y = \omega \cos(\omega, y) = \omega \frac{d\eta}{ds}, \quad \omega_z = \omega \cos(\omega, z) = \omega \frac{d\zeta}{ds}$$

Откуда, принимая во внимание, что $d\tau = d\xi d\eta d\zeta = \sigma ds$, получим

$$\omega_x d\xi' d\eta d\zeta = \omega d\tau \frac{d\xi'}{d\xi} \frac{d\zeta}{ds} = \omega \sigma d\xi'$$

Кроме того,

$$\omega_y d\xi' d\eta d\zeta = \omega d\tau \frac{d\xi'}{d\xi} \frac{d\eta}{ds} = \frac{\omega \sigma d\eta}{\sqrt{1-M^2}}, \quad \omega_z d\xi' d\eta d\zeta = \frac{\omega \sigma d\zeta}{\sqrt{1-M^2}}$$

Формулы (1.12) приобретают тогда вид

$$A_x = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{L'} \frac{d\xi'}{r'}, \quad A_y = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{L'} \frac{d\eta}{r'}, \quad A_z = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{L'} \frac{d\zeta}{r'} \quad (1.13)$$

где $r' = \sqrt{(x' - \xi')^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$. Интегрирование производится по оси нити в пространстве x', y, z .

Формулы (1.12) и (1.13) выражают закон Био-Савара и позволяют дать следующую интерпретацию влияния сжимаемости воздуха на поле скоростей вокруг вихревой нити: для того чтобы при наличии сжимаемости воздуха найти скорость, индуцированную вихревой нитью в какой-нибудь точке пространства (x, y, z) , следует растянуть вихревую нить, не изменяя ее интенсивности, в направлении потока на бесконечности в $1/\sqrt{1-M^2}$ раз и определить, пользуясь законом Био-Савара, скорость, вызванную этой нитью в точке $(x/\sqrt{1-M^2}, y, z)$; затем надо еще дополнительно увеличить полученную добавочную составляющую скорости в направлении набегающего потока в $1/\sqrt{1-M^2}$ раз.

2. Влияние сжимаемости на индуцированные скорости крыла

При определении индуктивных скоростей крыла пользуются схемой Прандтля, заменяя крыло несущей вихревой нитью с отходящей от нее системой свободных вихрей, тянущихся вдоль линий тока.

Особенно просто определяются индуктивные скорости крыла на несущей линии и в плоскости, проходящей через нее перпендикулярно скорости набегающего потока.

Сбегающая с крыла вихревая пелена представляет систему полубесконечных прямолинейных вихрей. Для определения поля индуктивных скоростей достаточно определить поле скоростей, возбужденное полубесконечным прямолинейным вихрем, так как скорости всей системы получаются затем простым сложением.

Для бесконечного прямолинейного вихря из самого определения циркуляции следует, что поле скоростей вокруг него вычисляется одинаково как в несжимаемой жидкости, так и в сжимаемом газе. Полубесконечный вихрь по соображениям симметрии возбуждает в плоскости, проходящей через конец вихря перпендикулярно к нему, скорости ровно вдвое меньше, чем бесконечный вихрь, и, следовательно, тоже одинаковые как в несжимаемой жидкости, так и в сжимаемом газе.

Отсюда следует, что для крыла в дозвуковом потоке сжимаемого газа индуктивные скорости на несущей нити (и на всей поверхности, проходящей через нее перпендикулярно к скорости набегающего потока) будут те же, как для крыла в несжимаемой жидкости, с тем же распределением циркуляции по размаху. Влияние сжимаемости воздуха сказывается только на изменении характеристик сечений крыла.

Заметим, что рассуждения о симметрии перестают быть справедливыми в сверхзвуковом потоке, так как исходящие от вихря возмущения будут сдуваться вниз по течению и распространяться только внутри конуса Маха, имеющего вершину в начале вихря, вне конуса Маха возмущения равны нулю. В случае сверхзвукового потока индуктивные скорости на несущей линии просто равны нулю.

Для индуктивных скоростей крыла в произвольной точке пространства соображения о симметрии уже неприменимы, и надо обратиться в обобщенному закону Био-Савара.

Рассмотрим прямолинейный отрезок вихревой нити, совпадающий по направлению со скоростью потока на бесконечности. Пусть точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ будут началом и концом этого отрезка. Скорость на бесконечности направлена параллельно оси x .

В этом случае в какой-либо точке $M(x, y, z)$ скорость, индуцированная этим отрезком вихревой нити, будет лежать в плоскости, перпендикулярной оси нити. Добавочные составляющие скорости, параллельные скорости набегающего потока, будут, следовательно, равны нулю. Пользуясь данной выше интерпретацией, можно определить скорости в плоскости, перпендикулярной оси вихря:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} \left(\sqrt{1 - \frac{h^2}{[(x-x_A)/\sqrt{1-M^2}]^2 + h^2}} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{[(x-x_B)/\sqrt{1-M^2}]^2 + h^2}} \right) \quad (2.1)$$

где $h = \sqrt{(y-y_A)^2 + (z-z_A)^2}$ есть расстояние рассматриваемой точки от вихревой нити.

В частности, для полубесконечной вихревой нити имеем

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} \left(\sqrt{1 - \frac{h^2}{[(x-x_A)/\sqrt{1-M^2}]^2 + h^2}} + 1 \right) \quad (2.2)$$

Для скорости в точке плоскости, перпендикулярной оси нити и проходящей через ее конец, получим

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} \quad (2.3)$$

Скорость оказывается в этом случае такая же, как в несжимаемой жидкости.

3. Влияние наличия стенок трубы на индуктивные углы и коэффициент индуктивного сопротивления

Для несжимаемой жидкости этот вопрос был решен Прандтлем и затем подробно исследован в работе Глауэрта [5].

Влияние стенок трубы может быть учтено введением добавочной вихревой

пелены. Изменение индуктивного угла и индуктивного сопротивления, вызванное наличием этой добавочной вихревой пелены, имеет вид

$$\Delta\alpha_i = \bar{\eta} \frac{c}{s} c_y, \quad \Delta c_{xi} = \bar{\eta} \frac{c}{s} c_y^2 \quad (3.1)$$

Коэффициент $\bar{\eta}$ зависит от распределения циркуляции по размаху и от отношения размаха крыла к диаметру трубы. Однако коэффициент $\bar{\eta}$ изменяется весьма мало при изменении этих параметров и обычно для крыльев произвольной формы в плане при отношении размаха крыла к диаметру трубы до 0.8 принимается одним и тем же, равным 0.125.

Так как вихревая пелена, заменяющая стенки трубы, состоит из полубесконечных прямых нитей, имеющих направление скорости потока, то на основании полученных выше результатов можно утверждать, что формулы (3.1) останутся справедливыми и в этом случае. Зависимость коэффициента $\bar{\eta}$ от числа Маха будет подобна зависимости этого коэффициента от распределения циркуляции по размаху, т. е. весьма малой, так что и в этом случае при весьма значительном изменении числа Маха этот коэффициент можно считать постоянным, равным 0.125.

4. Влияние сжимаемости воздуха на индуктивные скорости винта с бесконечно большим числом лопастей

Пусть M — число Маха полета. Рассмотрим винт в несжимаемой жидкости с тем же распределением циркуляции вдоль лопасти винта.

При бесконечно большом числе лопастей позади винта образуется область непрерывно распределенных вихрей, которые можно рассматривать как совокупность бесконечно большого числа элементарных вихрей; имеющих вид полубесконечных прямолинейных нитей, параллельных оси винта, и кольцевых вихрей.

Применяя обобщенный закон Био-Савара, надо деформировать систему.

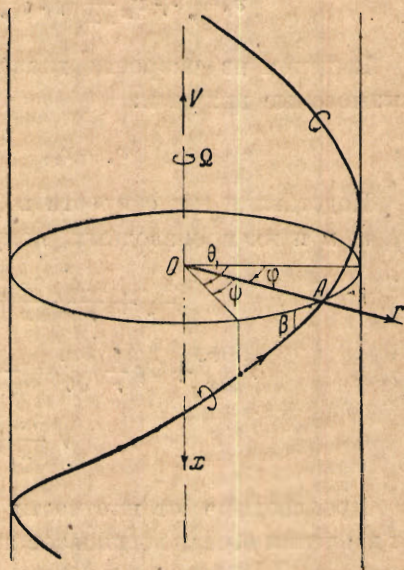
Прямолинейные вихри при этом не изменяются, а расстояния между вихревыми кольцами увеличиваются. Прямолинейные вихри вызывают только окружные индуктивные скорости, которые остаются неизменными. Кольцевые вихри вызывают радиальные и осевые индуктивные скорости, которые в плоскости винта при деформации уменьшаются в $1/\sqrt{1-M^2}$ раз, но осевые скорости надо еще увеличить в $1/\sqrt{1-M^2}$ раз; таким образом, в плоскости винта с бесконечным числом лопастей индуктивные скорости (за исключением радиальных составляющих) подсчитываются одинаково как в сжимаемом газе, так и в несжимаемой жидкости.

5. Влияние сжимаемости на индуктивные скорости винта с конечным числом лопастей

Вихревая система винта с конечным числом лопастей состоит из радиальных несущих вихревых нитей переменной циркуляции, заменяющих лопасти, от которых отходят свободные вихри. Свободные вихри тянутся вдоль траекторий относительного движения. В случае слабонагруженного винта

можно считать, что оси вихрей лежат на пересечении цилиндрических поверхностей и винтовой поверхности, определяемой поступательной скоростью V и угловой скоростью Ω винта (фиг. 1).

Рассмотрим проекции на оси x, θ индуктивной скорости на несущей линии OA . Вычисление этих составляющих сильно упрощается, если все свободные вихри продолжить до бесконечности перед винтом. Вихревая система с бесконечными в обе стороны вихрями на радиусе OA вызывает окружные и осевые скорости вдвое большие, чем система с полубесконечными вихрями. В этом нетрудно убедиться, если заметить; что верхняя половина вихрей совпадает с нижней, если ее повернуть на 180° вокруг радиуса OA , но будет иметь различное направление вихрей. Если нижняя половина вихрей индуцирует на радиусе OA скорости осевую v , окружную u , радиальную v_r , то верхняя половина, повернутая на 180° , относительно радиуса OA в той же точке индуцирует скорости $-v$, $-u$, $+v_r$, а верхняя половина в ее естественном положении индуцирует скорости v , u , $-v_r$. Верхняя и нижняя половина вместе индуцируют скорости $2v$, $2u$, $v_r=0$. Эти рассуждения справедливы как для четного, так и для нечетного числа лопастей.



Фиг. 1

Симметрией можно воспользоваться только для вычисления скоростей на осях лопастей, в остальных точках плоскости винта она не дает удвоения скоростей.

Вся система вихрей теперь представляет сумму элементарных винтовых вихрей, уходящих в обе стороны до бесконечности, поэтому рассмотрим течение сжимаемого газа только для одного винтового вихря. Для этого воспользуемся цилиндрическими координатами r, θ, x , связанными жестко с винтом. Координатная система вращается с угловой скоростью Ω и движется поступательно со скоростью V вдоль оси винта. В этой системе координат движение будет установившимся, неподвижная среда будет казаться набегающей на винт с осевыми скоростями V и окружными скоростями Ωr , направленными против вращения винта.

Уравнение сплошности в выбранных координатах имеет вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_x}{r} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{v_\theta}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0 \quad (5.1)$$

Уравнения Эйлера будут содержать в правых частях кроме градиента давления, кориолисовы и центробежные силы инерции; обусловленные вращением системы координат

$$\begin{aligned}
 v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \Omega^2 r - 2\Omega v_\theta \\
 v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + 2\Omega v_r
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Выделим из скорости главную часть $(V, \Omega r)$ и малые скорости u, v, v_r , вызываемые вихрями:

$$v_r = v_r, \quad v_x = V + v, \quad v_\theta = \Omega r + u \tag{5.3}$$

Подставляя эти скорости в (51) и (52) и пренебрегая высшими степенями v_r, v, u и их производных, получим

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{V}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\Omega r}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0 \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
 V \frac{\partial v_r}{\partial x} + \Omega r \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad V \frac{\partial v}{\partial x} + \Omega r \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 V \frac{\partial u}{\partial x} + \Omega r \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Производные от плотности ρ могут быть выражены через производные от давления p , если воспользоваться выражением для скорости звука $a^2 = dp/d\rho$, а именно

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{5.6}$$

Подставляя эти выражения в (5.4) и заменяя производные от p производными от скоростей с помощью уравнений Эйлера (5.5), получим уравнение сплошности в виде

$$(1 - M_v^2) \frac{\partial v}{\partial x} + (1 - M_u^2) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - M_v M_u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \tag{5.7}$$

Здесь введены числа Маха M_v, M_u , равные

$$M_v = \frac{V}{a}, \quad M_u = \frac{\Omega r}{a} \tag{5.8}$$

Уравнение (5.7) значительно упрощается, если применить специальные винтовые координаты и воспользоваться «винтовой симметрией», имеющей место в рассматриваемой задаче.

Винтовые координаты r, φ, ψ имеют координатные поверхности, — цилиндры $r = \text{const}$, винтовые поверхности $\varphi = \text{const}$ с углом $\beta = \text{arc tg}(V : \Omega r)$ и плоскости, перпендикулярные к оси винта $\psi = \text{const}$. Перемещение вдоль винтовой поверхности определяется углом ψ .

Переход от цилиндрических координат к винтовым осуществляется формулами

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{x}{r} \text{ctg } \beta, & \varphi &= \theta - \frac{x}{r} \text{ctg } \beta, & r &= r, & \text{tg } \beta &= \frac{V}{\Omega r} \\
 v &= v_\psi \sin \beta, & u &= v_\varphi + v_\psi \cos \beta, & v_r &= v_r, & \frac{d\beta}{dr} &= -\frac{\sin \beta \cos \beta}{r}
 \end{aligned}$$

Уравнение сплошности (5.7), преобразованное к новым координатам, примет вид

$$\frac{\cos \beta}{r} (1 - M_w^2) \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} - M_w^2 \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.9)$$

$$M_w = (V^2 + \Omega^2 r^2) : a^2$$

Винтовая симметрия для нашего примера заключается в том, что вдоль винтовых линий $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ скорости не изменяются, поэтому производные по ψ обращаются в нуль. Вследствие винтовой симметрии в уравнении (5.9) исчезают члены, зависящие от чисел Маха:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (5.10)$$

Скорости v_φ , v_r , v_ψ полностью определяются уравнением (5.10) и уравнениями для вихрей, которые всюду, за исключением оси вихря, равны нулю, т. е.

$$2\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial x} = \frac{\text{ctg } \beta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial v_\psi}{\partial \varphi} = 0$$

$$2\omega_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{\text{ctg } \beta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \sin \beta \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{\cos^2 \beta \sin \beta}{r} v_\psi = 0 \quad (5.11)$$

$$2\omega_x = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \cos \beta \frac{\partial v_\psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r} + \frac{(1 + \sin^2 \beta) \cos \beta}{r} v_\psi = 0,$$

а на оси вихря

$$2\omega d\sigma = \Gamma \quad (5.12)$$

где $d\sigma$ — площадь сечения вихревого шнура, Γ — циркуляция.

Для трех неизвестных функций v_φ , v_ψ , v_r получено четыре уравнения, но одно из них должно являться следствием других.

Из уравнения $\omega_r = 0$ имеем

$$v_\varphi = f(r) - \frac{v_\psi}{\cos \beta}$$

Подставляя его в уравнения для ω_θ и ω_x , получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} \frac{\partial v_\psi}{\partial r} - \frac{\sin^2 \beta \cos \beta}{r} v_\psi = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} \frac{\partial v_\psi}{\partial r} - \frac{\sin^2 \beta \cos \beta}{r} v_\psi - \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r} = 0$$

Последние уравнения должны совпадать, из чего определяется функция

$$f(r) = \frac{C}{r}$$

где константа C может быть найдена из условий на оси винта.

Система уравнений для v_φ , v_ψ , v_r в потоке сжимаемого газа и несжимаемой жидкости одинакова, поэтому индуктивные скорости в потоке сжимаемого газа при дозвуковых скоростях остаются при одинаковом распределении циркуляции теми же, как и в потоке несжимаемой жидкости.

Влияние сжимаемости на работу винта сказывается только в изменении характеристик сечений.

В случае сверхзвуковых скоростей индуктивные скорости на несущей нити, как для крыла, обращаются в нуль, если лопасть не попадает в звуковую волну, исходящую от соседней лопасти.

Поступила в редакцию
2 III 1944.

Центральный аэрогидродинамический институт

L. A. SIMONOV and S. A. CHRISTIANOVITCH.—INFLUENCE OF AIR COMPRESSIBILITY ON INDUCTIVE VELOCITIES OF AN AEROFOIL AND AIR-SCREW

The generalized law of Bio-Savar permits the solution of the problem expressed in the title of this article for an aerofoil and for a screw with an infinite number of blades.

The induced velocities of the gas may be determined on the lifting line of an aerofoil or of a blade in the same manner as in a flow of incompressible liquid.

The influence of the compressibility of air manifests itself only in a change in the profile characteristics.

At points away from the lifting line the induced velocities depend on Mach's number for the flow.

For a screw with a finite number of blades the problem is considered with respect to a system of coordinates rotating together with the screw. Equations are formulated for the relative motion of the gas for small induced velocity values.

By employing the special screw coordinates the authors show that for a screw with an infinite number of blades the induced velocities on the lifting line in a flow of gas may be determined in the same manner as in a flow of incompressible liquid.

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl, Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammengedrückbaren Medium. Luftfahrtforschung. 1936. 13. № 10.
2. Schlichting, Tragflügeltheorie bei Überschallgeschwindigkeiten.
3. Франкль Ф. И. Теория винта с конечным числом лопастей при больших поступательных и окружных скоростях. Труды ЦАГИ. 1942. Вып. 540.
4. Кочин Н. Е. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. 1938. Ч. I. (Стр. 152—167).
5. Glaucert, The Interference on the Characteristics at an Aerofoil in a Windtunnel of Circular Section. R. M. 1932. № 1453.