

ЗАМЕТКИ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОМ СЛОЕ

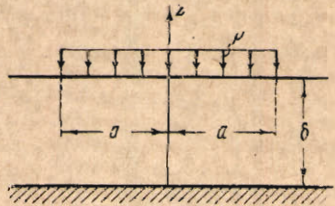
Г. С. ШАПИРО

(Москва)

Задача о передаче давления через слой в весьма общей постановке была принципиально решена еще J. Dougall<sup>[1]</sup>, O. Tedone<sup>[2]</sup> и L. Orlando<sup>[3]</sup>. Эффективное решение этой задачи может быть получено применением функций напряжений. В общем случае распределения нагрузки на слое полная система функций, решающих задачу, была указана Б. Г. Галеркиным<sup>[4]</sup>.

Остановимся на случае нагрузки, равномерно распределенной по площади круга.

Пусть  $p$  — интенсивность нагрузки,  $a$  — радиус загруженного круга,  $\delta$  — толщина слоя и  $P$  — равнодействующая сил, действующих на слой ( $P = \pi a^2 p$ ). Оси координат предполагаем, как показано на фиг. 1.



Фиг. 1

Предполагая основание гладким и несжимаемым, имеем граничные условия

$$\begin{aligned} \widehat{rz} = 0, \quad w = 0 & \quad \text{при } z = 0 \\ \widehat{rz} = 0, \quad \widehat{zz} = -p & \quad \text{при } z = \delta \end{aligned} \quad (1)$$

Эти условия будут выполнены, если для функции напряжений принять выражение<sup>[5]</sup>

$$\varphi = \int_0^\infty (Az \operatorname{ch} az + B \operatorname{ch} az) J_0(ar) da \quad (2)$$

Функция (2) может быть получена как частный случай из решения, данного Б. Г. Галеркиным для толстой круглой плиты<sup>[4]</sup>, если в этом решении ряд заменить на интеграл Фурье и сохранить лишь члены, зависящие от координат  $r$  и  $z$ .

Как известно, напряжения и смещения для случая тела вращения выражаются через функцию  $\varphi$

$$\widehat{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \sigma) \nabla \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \quad (3)$$

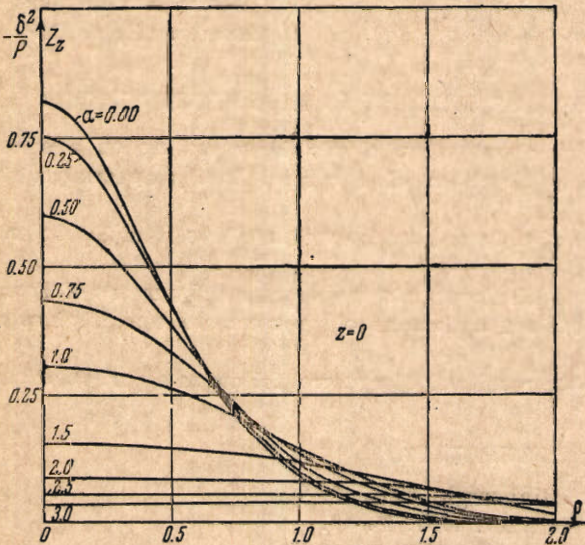
$$\widehat{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \sigma) \nabla \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]$$

$$w = \frac{1 + \sigma}{E} \left[ (1 - 2\sigma) \nabla \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются путем подстановки (2) в (3) и использования условий (1).

Обозначим

$$a\delta = \eta, \quad \frac{a}{\delta} = \alpha_0, \quad \frac{r}{\delta} = \rho, \quad \frac{z}{\delta} = \zeta, \quad \Delta = \eta + \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta$$

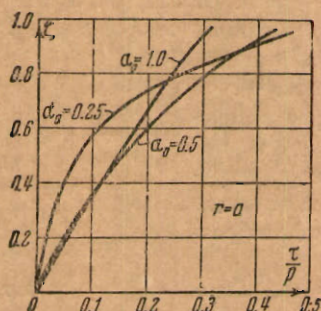


Фиг. 2

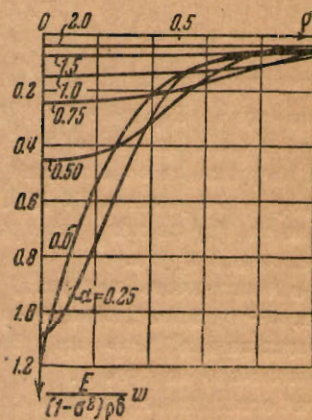
Вместо (1), (3) получим

$$\begin{aligned} \widehat{z z} \Big|_{z=0} &= -\alpha_0 P \int_0^{\infty} (\operatorname{sh} \eta + \eta \operatorname{ch} \eta) J_0(\rho \eta) J_1(\alpha_0 \eta) \frac{d\eta}{\Delta} \\ \widehat{r z} &= \alpha_0 P \int_0^{\infty} (\eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta \zeta - \eta \zeta \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta \zeta) J_1(\rho \eta) J_1(\alpha_0 \eta) \frac{d\eta}{\Delta} \\ \omega \Big|_{z=1} &= -\frac{2(1-\sigma^2)P}{E \pi \alpha_0 \delta} \int_0^{\infty} \operatorname{sh}^2 \eta J_0(\rho \eta) J_1(\alpha_0 \eta) \frac{d\eta}{\Delta} \end{aligned} \quad (4)$$

Результаты вычислений по формулам (4), найденные приближенным путем, представлены графически на фиг. 2—4.



Фиг. 3



Фиг. 4

Полагая в (4)  $\alpha_0 \rightarrow 0$ , приходим к случаю давления, сосредоточенного в точке, — рассмотренному ранее К. Marguerre [6].

Поступила в редакцию  
21 VI 1943

Институт механики  
Академии Наук СССР

#### G. S. SCHAPIRO.—DISTRIBUTION OF STRESSES IN AN INFINITE LAYER

The author considers the problem about of an elastic layer resting [on a smooth incompressible surface and subjected to the action of a normal load  $p$  uniformly distributed over a circle.

The solution is obtained by means of a stress function which follows from the Galerkin solution [4] for a thick circular plate.

The final formulae for stresses and displacements are expressed by means of Fourier integrals. The numerical results obtained by means of approximate computations are given graphically (fig. 2—4).

For  $\rho$  approaching zero from (4) the results of Marguerre follow as a particular case.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dougall J. Trans. Roy. Soc. Edinburgh. 1904. Т. 41.
2. Tedone O. Rend. Circ. Mat. Palermo. 1904. Т. 18.
3. Orlando L. Rend. Circ. Mat. Palermo. 1905. Т. 19.
4. Галеркин В. Г. ДАН 1931. [Стр. 280].
5. Шапиро Г. С. ДАН. 1942. Т. 37. № 9.
6. Marguerre K. Ingenieur Archiv. 1933. Vol. IV.